

高一数学导学案

第 1 课时 向量的概念及表示

数学建构

(一) 生成概念

引导学生思考、讨论上面的问题,从而引出以下概念.

(1) 定义:既有大小又有方向的量叫向量,如位移、力、速度、加速度等.

(2) 向量的表示方法

1° 几何表示法:有向线段——具有一定方向的线段,如 \overrightarrow{AB} ;

2° 字母表示法:如 \mathbf{a} .

(3) 模的概念:向量 \overrightarrow{AB} 的大小称为向量的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$,模是可以比较大小的.

(4) 两个特殊的向量

1° 零向量:长度(模)为 0 的向量,记作 $\mathbf{0}$. $\mathbf{0}$ 的方向是任意的.

2° 单位向量:长度(模)为 1 个单位长度的向量叫做单位向量.

(5) 平行向量:方向相同或相反的非零向量叫做平行向量.向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 平行,记作 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 规定: $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

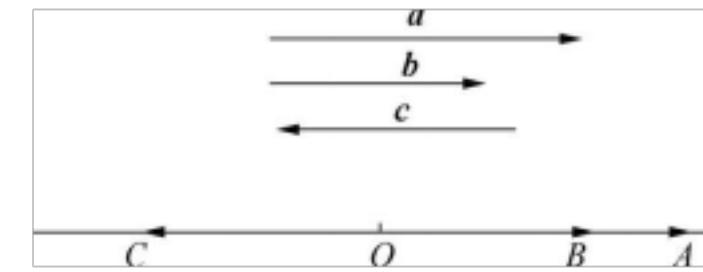
(6) 相等向量:长度相等且方向相同的向量叫做相等向量.向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

规定: $\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(7) 相反向量:长度相等且方向相反的向量叫做相反向量.

(8) 共线向量:任一组平行向量都可移到同一条直线上,所以平行向量也叫共线向量.

如图 3, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 且 $\mathbf{a} // \mathbf{b} // \mathbf{c}$, 则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 可以平移到一条直线上.



(图 3)

(二) 理解概念

(1) 数量与向量的区别:数量只有大小,可以比较大小;向量既有方向又有大小,不能比较大小

(2) $\mathbf{0}$ 与 0 的区别: $\mathbf{0}$ 是向量,是有方向的(虽然方向是任意的) 0 是数量,没有方向.

(3) 任意两个相等的非零向量都可用同一条有向线段表示,与起点无关.

数学运用

【例 1】 下列命题中正确的是_____ (填序号).

① 向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线, \mathbf{b} 与 \mathbf{c} 共线, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{c} 也共线;

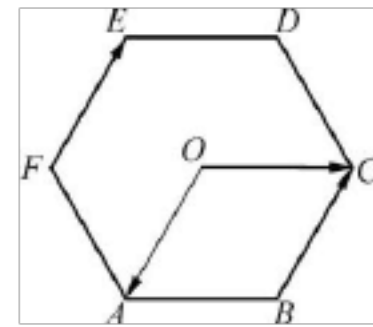
② 任意两个相等的非零向量的始点与终点是一平行四边形的四顶点;

③ 向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 都是非零向量;

④ 有相同起点的两个非零向量不平行. [B]

(变式 2)

【例 2】已知 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,在下图所标出的向量中:



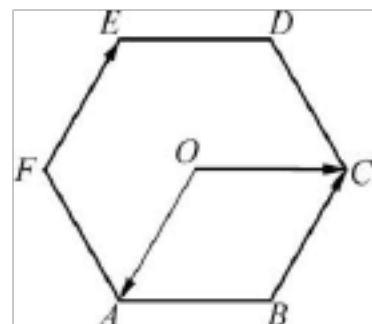
(例 2)

(1) 试找出与 \vec{FE} 共线的向量;

(2) 确定与 \vec{FE} 相等的向量;

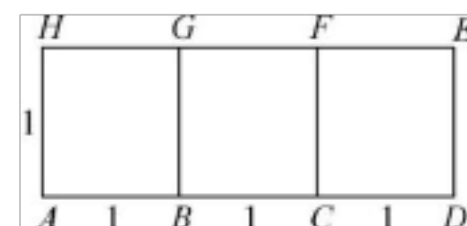
(3) \vec{OA} 与 \vec{BC} 相等吗?[4]

变式 1 在图中标出的向量中,与向量 \vec{OA} 模相等的向量有多少个?



变式 2 如图,在以 $1\text{cm} \times 3\text{cm}$ 方格纸中的格点为起点和终点的所有向量中,请写

出以 A 为起点的不同向量,并求其大小.[5]



课堂练习

1. 有下列命题:① 向量的模是一个正实数;② 两个相等向量必是两个平行向量;③ 坐标平面上的 x 轴和 y 轴都是向量;④ 温度有零上温度和零下温度,所以温度是向量. 其中真命题的个数是_____.

2. 设点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心,在以正方形的顶点及点 O 为起点或终点的向量中,分别与 \vec{OA} , \vec{OB} 相等的向量是_____.

3. 某人从 A 点出发向东走了 5m 到达 B 点,然后改变方向往东北方向走了 $10\sqrt{2}\text{m}$ 到达 C 点,到达 C 点后又改变方向向西走了 10m 到达 D 点,求 \vec{AD} 的模.

课堂小结

1. 向量的概念:定义、表示方法、零向量、单位向量.(三个定义,两种表示)

2. 向量的关系:平行向量(共线向量)、相等向量、相反向量.(三个关系)

3. 两种思想:数形结合思想、分类讨论思想.

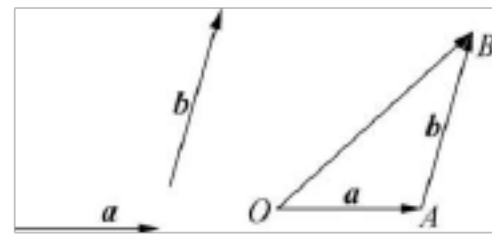
第2课时 向量的加法

数学建构

一般地,如何定义向量的加法运算?

1. 向量的加法的含义

如图 2,已知向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ,在平面内任取一点 O ,作 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$,则向量 \overrightarrow{OB} 叫做 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和,记作 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.



(图 2)

求两个向量的和的运算叫做向量的加法.

2. 向量加法的三角形法则

根据向量加法的定义得出的求向量和的方法,称为向量加法的三角形法则.

说明 三角形法则使用时应该“首尾相连”,即其中一个向量的起点应该与另一个向量的终点相连,若不“首尾相连”可通过平移使之“首尾相连”.

3. 向量运算(类比于数的加法)的法则

对于零向量和任一向量 \mathbf{a} ,有 $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

对于相反向量,有 $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

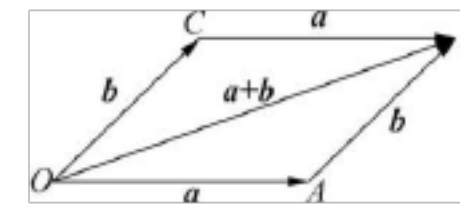
向量的加法满足交换律、结合律: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

通过作图方式验证向量的加法满足交换律.

如图 3,作 $\square OACB$ 使 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{b}$,

则 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\mathbf{b}$.

因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,所以 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.



(图 3)

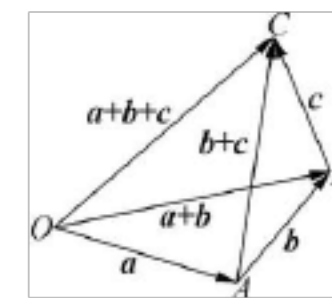
4. 向量加法的平行四边形法则

图 3 还表明,对于两个不共线的非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} ,我们还可以作平行四边形来求两个向量的和.分别记作 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{b}$,以 OA, OB 为邻边作 $\square OACB$ 则以 O 为起点的对角线 \overrightarrow{OB} 就是向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和.

我们把这种方法叫做向量加法的平行四边形法则.

说明 平行四边形法则使用时应该“共起点”,即其中一个向量的起点应该与另一个向量的起点相同,若不“共起点”可通过平移使之“共起点”.

同样,根据图 4 可以验证,向量的加法满足结合律.



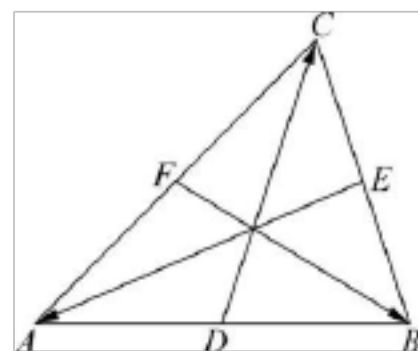
(图 4)

思考 如果平面内有 n 个向量依次首尾连接组成一条封闭折线,那么这 n 个向量的和是什么?

数学运用

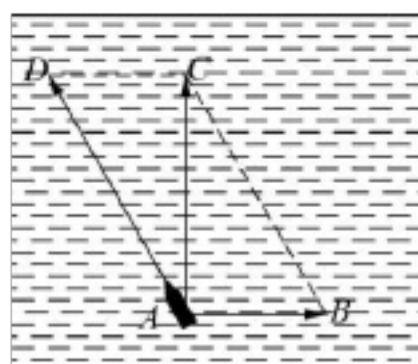
)

【例 2】 如图,已知 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 的中点,求证: $\vec{EA} + \vec{FB} + \vec{DC}$
=0.



(例 2)

【例 3】 在长江南岸某渡口处,江水以 12.5km/h 的速度向东流,渡船的速度为 25km/h.渡船要垂直地渡过长江,其航向应如何确定?



(例 3)

四、 课堂练习

1. 在矩形 ABCD 中, $|\vec{AB}| = \sqrt{3}$, $|\vec{BC}| = 1$, 则向量 \vec{BD} 的模等于 _____

2. 化简: (1) $\vec{DB} + \vec{CD} + \vec{BE} =$ _____; (2) $\vec{AB} + \vec{DF} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{FA} =$ _____

3. 在正六边形 ABCDEF 中, $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{FA} = \mathbf{b}$, 则 $\vec{EC} =$ _____ (用 \mathbf{a}, \mathbf{b} 表示).

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 若 $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AC}| = 4$, 则 $|\vec{AB} + \vec{AC}| =$ _____.

第3课时 向量的减法

数学建构

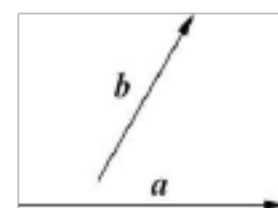
问题1 类似于实数的减法,你能定义向量的减法吗?

向量的减法是向量的加法的逆运算.

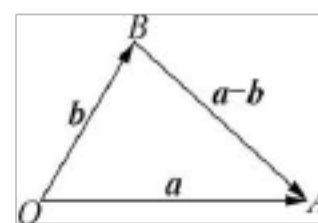
若 $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$, 则向量 \mathbf{x} 叫做 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的差, 记为 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 求两个向量差的运算, 叫做向量的减法.

问题2 类似于向量的加法, 你能作出向量减法的几何表示吗?

作法: 如图1、图2, 在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.



(图1)



(图2)

因为 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, 即 $\mathbf{b} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$, 所以 $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

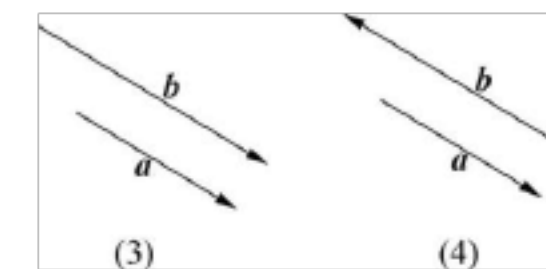
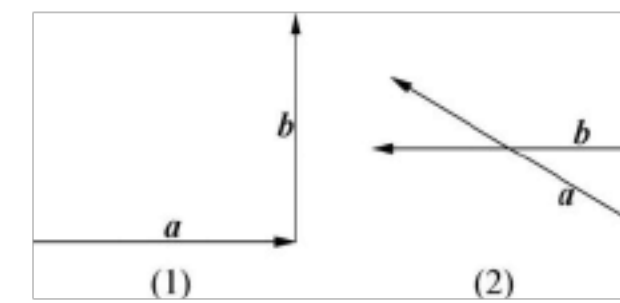
这就是说, 当向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 起点相同时, 从 \mathbf{b} 的终点指向 \mathbf{a} 的终点的向量就是 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

由向量加法结合律可知, $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a} + [(-\mathbf{b}) + \mathbf{b}] = \mathbf{a}$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

这表明: 减去一个向量等于加上这个向量的相反向量.

三、数学运用

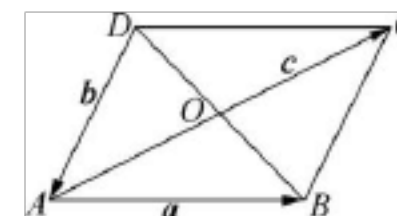
【例1】 如图, 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 求作 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.^[3]



(例1)

(例2)

【例2】 如图, O 是 $\square ABCD$ 对角线的交点, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 试证明: $\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$.



【例 3】 证明:对于任意两个向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都有 $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

四、 课堂练习

1. 在四边形 ABCD 中, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 则四边形 ABCD 的形状为 _____

2. 下列各式中, 能化简为 \overrightarrow{AD} 的是 _____ (填序号).

① $\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$;

② $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC})$;

③ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BO}$;

④ $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CD}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} =$ _____

4. 设 D 是正三角形 ABC 的 BC 边中点, 若 $|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}| =$ _____.

第 4 课时 向量的数乘

一、问题情境

一艘船上午 8 点从某港口出发,以 $v\text{km/h}$ 的速度向南偏东 45° 的方向航行,下午 1 点半该船到达何处?若设该船每小时的位移为 \mathbf{a} ,则该船 5.5 小时的位移应如何表示?

二、数学建构

问题 1 位移为 $5.5\mathbf{a}$,它是向量吗,有什么特点?

问题 2 向量 $5.5\mathbf{a}$ 可以看成什么运算的结果?

问题 3 一般地,实数 λ 与向量 \mathbf{a} 的积是一个向量,记作 $\lambda\mathbf{a}$,叫做向量的数乘,

那它的方向、大小与向量 \mathbf{a} 有什么关系?

(1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 \mathbf{a} 的方向相同;当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 \mathbf{a} 的方向相反;

特别地,当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

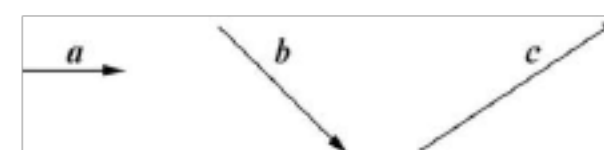
问题 4 类比于实数的运算,向量的数乘有哪些运算律?

根据向量数乘的定义,可以验证向量的数乘满足下列运算律:

(1) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$; (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$; (3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

三、数学运用

【例 1】 如图(1)已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$,求作向量 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$.

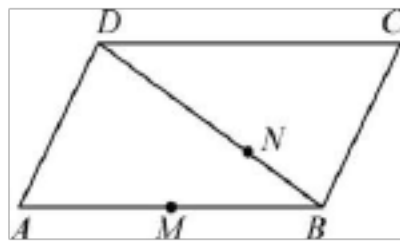


【例 2】 计算:

(1) $3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$; (2) $2(2\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 3\mathbf{c}) - 3(-3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$.

【例 3】 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, M 是 AB 的中点, N 在 BD 上且 $BN = \frac{1}{3}BD$,

求证: M, N, C 三点共线.[4]



一般地,对于两个向量 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 和 \mathbf{b} ,有如下的向量共线定理:

如果有一个实数 λ 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 那么 \mathbf{b} 与 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 是共线向量;反之,如果 \mathbf{b} 与 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 是共线向量,那么有且只有一个实数 λ 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

证明 根据向量数乘的定义可知,对于两个向量 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 和 \mathbf{b} ,如果有一个实数 λ 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 那么 \mathbf{b} 与 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 是共线向量.

反过来,如果向量 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 是共线向量,

当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 同方向时,令 $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$;当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 反方向时,令 $\lambda = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$;若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$,则令 $\lambda = 0$.

从而有一个实数 λ 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

假设有两个实数 λ, λ' ,使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} = \lambda' \mathbf{a}$,则 $\mathbf{b} - \mathbf{b} = (\lambda - \lambda') \mathbf{a} = \mathbf{0}$,即 $(\lambda - \lambda') |\mathbf{a}| = 0$.

因为 $|\mathbf{a}| \neq 0$,所以 $\lambda - \lambda' = 0$,即 $\lambda = \lambda'$.

从而有且只有一个实数 λ 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

四、 课堂练习

1. 计算: $-3(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = -$ _____,

$2(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) - 4(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = -$ _____.

2. 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(4\mathbf{a} - 3\mathbf{c}) + 3(5\mathbf{c} - 4\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{c} = -$ _____.

3. 已知点 \mathbf{R} 在线段 \mathbf{PQ} 上,且 $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3} \overrightarrow{PQ}$, 设 $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{QR}$, 则 $\lambda =$ _____.

4. 已知向量 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = -3(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1)$, 求证: \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 是共线向量.

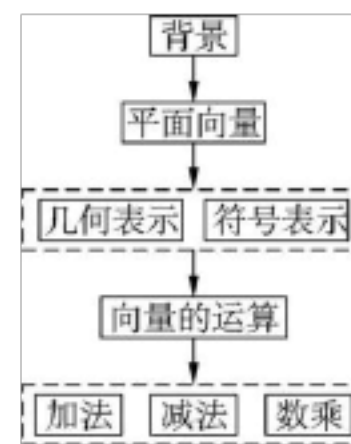
(例 2)

五、 课堂小结

1. 理解并掌握向量数乘的定义及运算律.
2. 理解向量共线定理,并能运用它判断两个向量是否共线.

第 5 课时 向量线性运算习题课

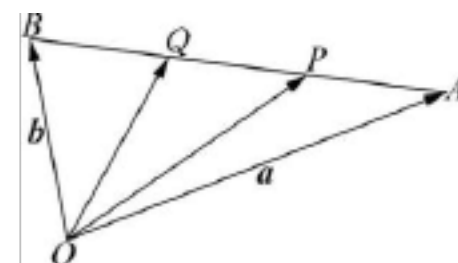
问题情境
梳理知识结构



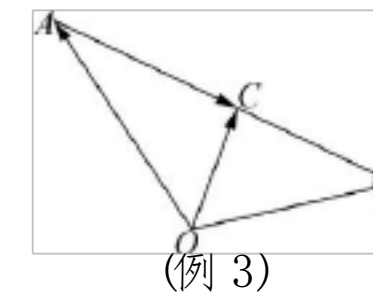
数学运用

【例 1】 设 e 是非零向量,若 $a+b=2e, 2a-b=3e$,向量 a 与 b 是否平行?

【例 2】 如图,设 P, Q 是线段 AB 的三等分点,若 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b$,试用 a, b 表示向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$.



【例 3】 如图,在 $\triangle OAB$ 中, C 为直线 AB 上一点, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} (\lambda \neq 1)$, 求证: $\overrightarrow{OC} = \frac{OA + \lambda OB}{1 + \lambda}$.

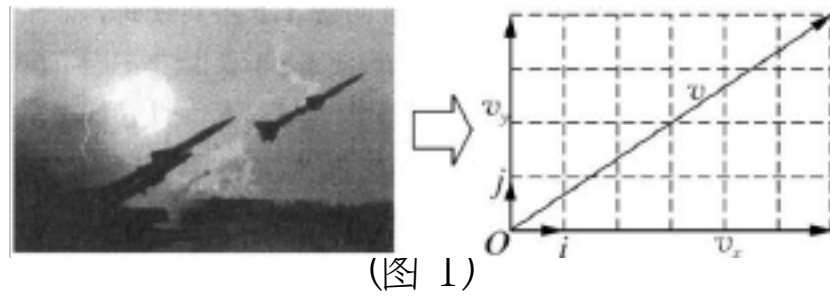


【例 4】 已知点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,过 G 作直线与 AB, AC 两边分别交于 M, N 两点,且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$,求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值.

6 课时 平面向量基本定理

一、问题情境^[3]

1 情境:火箭在升空的某一时刻,速度可以分解成竖直向上和水平向前的两个分速度(如下图所示).在力的分解的平行四边形法则中,我们看到一个力可以分解为两个不共线方向的力的和.



(图 1)

2. 问题:平面内任一向量是否可以用两个不共线的向量来表示?

二、数学建构

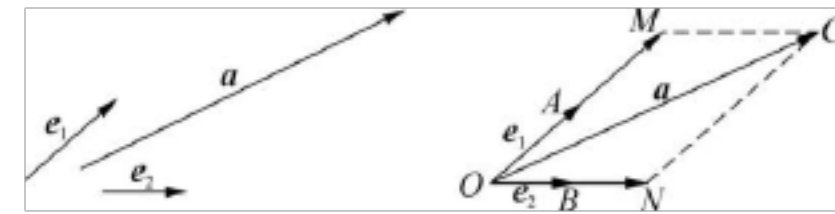
设 e_1, e_2 是平面内两个不共线的向量.

活动 1 请同学们作出向量 $\overrightarrow{OC} = 2.5e_1 + 1.5e_2$.^[4]

活动 2 a 是平面内的任一向量,能否通过作图用 e_1, e_2 表示呢?^[5]

如图 2,在平面内任取一点 O ,作 $\overrightarrow{OA} = e_1, \overrightarrow{OB} = e_2, \overrightarrow{OC} = a$.过点 C 作平行于 OB 的直线,交直线 OA 于 M ;过点 C 作平行于 OA 的直线,交直线 OB 于 N ,则有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ,

使得 $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 e_1, \overrightarrow{ON} = \lambda_2 e_2$. 因为 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 所以 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.



(图 2)

问题 1 是不是平面内每一个向量都可以分解成两个不共线的向量?

这样的分解是否唯一?

问题 2 对于平面上两个不共线的向量 e_1, e_2 , 是不是平面上所有的向量都可以用它们来表示?^[6]

平面向量基本定理 如果 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,那么对于这一平面内的任一向量 a ,有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ,使 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

我们把不共线的向量 e_1, e_2 , 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

一个平面向量用一组基底 e_1, e_2 表示成 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式,我们称它为向量的分解.当 e_1, e_2 互相垂直时,就称为向量的正交分解.

定理理解

(1) 基底 e_1, e_2 必须不共线;

(2) λ_1, λ_2 是被 e_1, e_2, a 唯一确定的实数对.

思考 平面向量基本定理与前面所学的向量共线定理,在内容和表述形式上有什么区别和联系?(平面向量基本定理是向量共线定理的推广)

三、数学运用

【例 1】如图, $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 M , $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 试用基底 a, b 表

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/197016101023006161>