

【2-9】试列出图 2-17，图 2-18 所示问题的全部边界条件。在其端部小边界上，应用圣维南原理列出三个积分的应力边界条件。

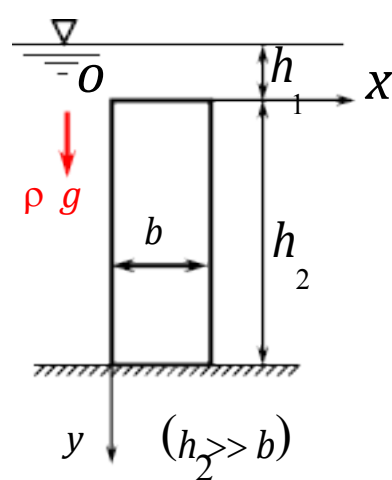


图 2-17

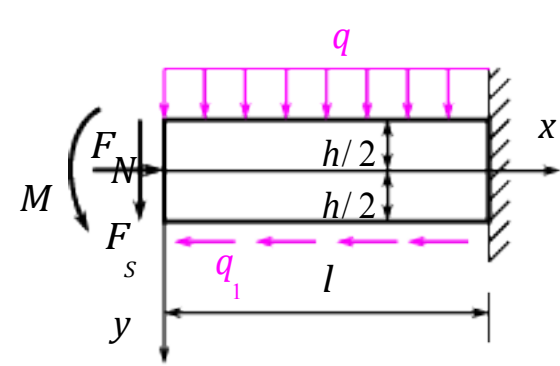


图 2-18

【分析】有约束的边界上可考虑承受位移边界条件，假设为小边界也可写成圣维南原理的三个积分形式，大边界上应准确满足公式〔2-15〕。

【解答】图 2-17：

|                | 上 (y=0)     | 左(x=0)          | 右 (x=b)          |
|----------------|-------------|-----------------|------------------|
| $l$            | 0           | -1              | 1                |
| $m$            | -1          | 0               | 0                |
| $\bar{f}_x(s)$ | 0           | $\rho g(y+h)_1$ | $-\rho g(y+h)_1$ |
| $\bar{f}_y(s)$ | $\rho gh_1$ | 0               | 0                |

代入公式〔2-15〕得

①在主要边界上  $x=0$ ， $x=b$  上准确满足应力边界条件：

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{x=0} &= -\rho g(y+h)_1, (\tau_{xy})_{x=0} = 0; \\ (\sigma_x)_{x=b} &= -\rho g(y+h)_1, (\tau_{xy})_{x=b} = 0; \end{aligned}$$

②在小边界  $y=0$  上，能准确满足以下应力边界条件：

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\rho gh, (\tau_{xy})_{y=0} = 0$$

③在小边界  $y=h_2$  上，能准确满足以下位移边界条件：

$$(u)_{y=h_2} = 0, (v)_{y=h_2} = 0$$

这两个位移边界条件可以应用圣维南原理，改用三个积分的应力边界条件来代替，当板厚 $\delta=1$ 时，可求得固定端约束反力分别为：

$$F_s = 0, F_N = -\rho ghb, M = 0$$

由于  $y = \frac{h}{2}$  为正面，故应力重量与面力重量同号，则有：

$$\begin{cases} \int_{-b}^b (\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} dx = -\rho g h b \\ \int_{-b}^b (\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} dx = 0 \\ \int_{-b}^b (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} dx = 0 \end{cases}$$

(2)图 2-18

①上下主要边界  $y=-h/2, y=h/2$  上，应准确满足公式〔2-15〕

|                    | $l$ | $m$ | $\bar{f}_x$ (s) | $\bar{f}_y$ (s) |
|--------------------|-----|-----|-----------------|-----------------|
| $y = -\frac{h}{2}$ | 0   | -   | 0               | $q$             |
| $y = \frac{h}{2}$  | 0   | 1   | $-q$            | 0               |

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = -q, (\tau_{yx})_{y=-h/2} = 0, (\sigma_x)_{y=h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=h/2} = -q$$

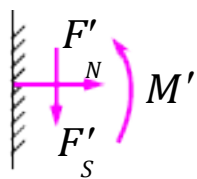
②在  $x=0$  的小边界上，应用圣维南原理，列出三个积分的应力边界条件：负面上应力与面力符号相反，有

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dx = -F_S \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dx = -F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dx = -M \end{cases}$$

③在  $x=l$  的小边界上，可应用位移边界条件  $u_{x=l} = 0, v_{x=l} = 0$  这两个位移边界条件也可改用三个积分的应力边界条件来代替。

首先，求固定端约束反力，按面力正方向假设画反力，如下图，列平衡方程求反力：

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, F_N + F'_N = q l \Rightarrow F'_N = q l - F_N \\ \sum F_y = 0, F_S + F'_S + q l = 0 \Rightarrow F'_S = -q l - F_S \end{aligned}$$



$$\sum M_A = 0, M + M'_S + F'_N l - \frac{1}{2} q l^2 - \frac{1}{2} q l h = 0 \Rightarrow M = \frac{q l h}{2} - M'_S - F'_N l - \frac{q l^2}{2}$$

由于  $x=l$  为正面，应力重量与面力重量同号，故

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = F'_N = q l - F \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = M'_N = \frac{q l h}{2} - M - F l - \frac{q l^2}{2} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = F'_S = -q l - F \end{array} \right.$$

【2-10】试应用圣维南原理，列出图 2-19 所示的两个问题中 OA 边上的三个积分的应力边界条件，并比较两者的面力是否是静力等效？

【解答】由于  $h \gg l$ ，OA 为小边界，故其上可用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

(a) 上端面 OA 面上面力  $f_x = 0, f_y = \frac{x}{b} q$

由于 OA 面为负面，故应力主矢、主矩与面力主矢、主矩符号相反，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = - \int_0^b f_y dx = - \int_0^b \frac{x}{b} q dx = - \frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = - \int_0^b f_y x dx = - \int_0^b \frac{x}{b} q \left( \frac{b}{2} - x \right) dx = \frac{qb^2}{12} \text{ (对 OA 中点取矩)} \\ \int_0^b (\tau_{yx})_{y=0} dx = 0 \end{array} \right.$$

(b) 应用圣维南原理，负面上的应力主矢和主矩与面力主矢和主矩符号相反，面力主矢  $y$  向为正，主矩为负，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = -F_N = - \frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = -M_N = \frac{qb^2}{12} \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=0} dx = 0 \end{array} \right.$$

综上所述，在小边界OA上，两个问题的三个积分的应力边界条件一样，故这两个问题是静力等效的。

【2-14】检验以下应力重量是否是图示问题的解答：

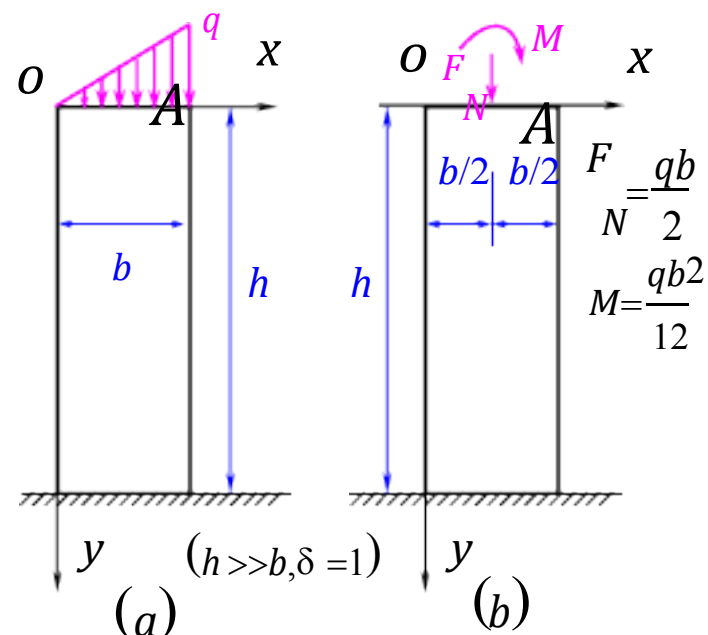


图2-19

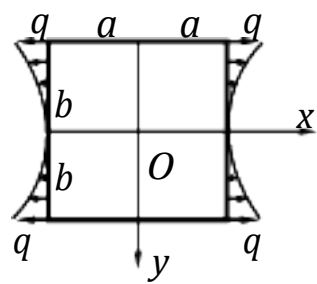


图 2-20

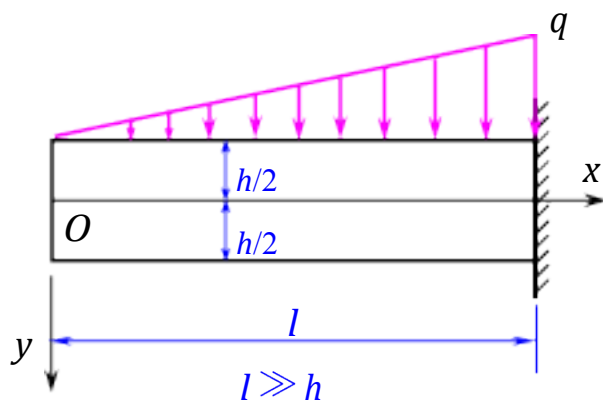


图 2-21

(a) 图 2-20,  $\sigma_x = \frac{y^2}{b^2} q$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。

【解答】在单连体中检验应力分量是否是图示问题的解答，必需满足：(1) 平衡微分方程 (2-2)；(2) 用应力表示的相容方程 (2-21)；(3) 应力边界条件 (2-15)。

(1) 将应力分量代入平衡微分方程式，且  $f_x = f_y = 0$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{明显满足}$$

(2) 将应力分量代入用应力表示的相容方程式 (2-21)，有

$$\text{等式左} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2q}{b^2} \neq 0 = \text{右}$$

应力分量不满足相容方程。

因此，该组应力分量不是图示问题的解答。

(b) 图 2-21，由材料力学公式， $\sigma_x = \frac{M}{I} y$ ,  $\tau_{xy} = \frac{F S^*}{bI}$  (取梁的厚度  $b=1$ )，

得出所示问题的解答： $\sigma_x = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$ ,  $\tau_{xy} = -\frac{3q x^2}{4 lh^3} (h^2 - 4y^2)$ 。又依据平衡微分

方程和边界条件得出： $\sigma_y = \frac{3q xy}{2 lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q x}{2 l}$ 。试导出上述公式，并检验解

答的正确性。

【解答】(1) 推导公式

在分布荷载作用下，梁发生弯曲变形，梁横截面是宽度为 1，高为  $h$  的矩形，

其中性轴 (Z 轴) 的惯性矩  $I = \frac{h^3}{12}$ ，应用截面法可求出任意截面的弯矩方程和

剪力方程  $M(x) = -\frac{q}{6l} x^3$ ,  $F(x) = -\frac{qx}{2l}$ 。

所以截面内任意点的正应力和切应力分别为：

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} y = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3F(x)}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = -\frac{3q}{4} \cdot \frac{x^2}{lh^3} (h^2 - 4y^2)。$$

依据平衡微分方程其次式（体力不计）。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} =$$

得：

$$\sigma_x = \frac{3q}{2} \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} + A$$

依据边界条件  $\sigma_x = 0$  于  $y = h/2$  得

$$A = -\frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

故

$$\sigma_x = \frac{3q}{2} \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

将应力重量代入平衡微分方程〔2-2〕第一式：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = -6q \cdot \frac{x^2}{lh^3} + 6q \frac{xy^2}{lh^3} = 0 = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad \text{满足}$$

其次式 自然满足

将应力重量代入相容方程〔2-23〕

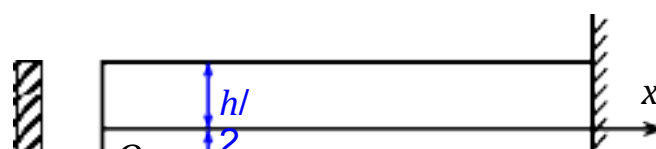
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right) = -12q \cdot \frac{x^2}{lh^3} - 12q \cdot \frac{xy^2}{lh^3} \neq 0 = \text{右}$$

应力重量不满足相容方程。

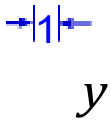
故，该重量组重量不是图示问题的解答。

**【2-18】** 设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受有集中荷载 **F**（图 2-22），体力可以不计。试依据材料力学公式，写出弯应力  $\sigma_x = 0$ ，然后证明这些表达式满足平衡微分方程和相容方程，再说明这些表达式是否就表示正确的解答。

**【解答】**（1）矩形悬臂梁发生弯曲变形，任意



横截面上的弯矩方程  $M(x) = -Fx$ ，横截面对  
中性轴



的惯性矩为  $I_z = h^3 / 12$ ，依据材料力学公式

$$\text{弯应力 } \sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{12F}{h^3} xy;$$

该截面上的剪力为  $F_s(x) = -F$ ，剪应力为

$$\tau_{xy} = \frac{F_s(x) S^*}{b I_z} = \frac{1 \times (-F)}{h^3 / 12} \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot b \cdot \left[ \frac{h/2 - y}{2} + y \right] = -\frac{6F}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

取挤压应力  $\sigma_y = 0$

(2) 将应力重量代入平衡微分方程检验

$$\text{第一式: 左} = -\frac{12F}{h^2} y + \frac{12F}{h^3} y = 0 = \text{右}$$

其次式: 左 = 0 + 0 = 0 = 右

该应力重量满足平衡微分方程。

(3) 将应力重量代入应力表示的相容方程

$$\text{左} = \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 = \text{右} \quad \text{满足相容方程}$$

(4) 考察边界条件

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应准确满足应力边界条件(2-15)

|                      | $l$ | $m$ | $\overline{f_x}$ | $\overline{f_y}$ |
|----------------------|-----|-----|------------------|------------------|
| $y = -\frac{h}{2}$ 上 |     | -1  | 0                | 0                |
| $y = \frac{h}{2}$ 上  | 0   | 1   | 0                | 0                |

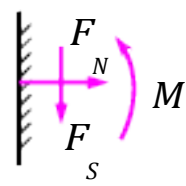
代入公式 (2-15)，得

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{y=-h/2} &= (\sigma_x)_{y=h/2} = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=-h/2} &= (\tau_{xy})_{y=h/2} = 0 \end{aligned}$$

②在次要边界  $x=0$  上，列出三个积分的应力边界条件，代入应力重量主矢主矩

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy &= 0 = x \text{向面力主矢} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy &= 0 = \text{面力主矩} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{6F}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] dy = -F = y \text{向面力主矢} \end{aligned}$$

$\left. \begin{matrix} -h/2 < y < h/2 \\ x=0 \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} h^3 & 4 \\ \end{matrix} \right\}$   
 满足应力边界条件



③在次要边界上，首先求出固定边面力约束反力，按正方向假设，即面力的主矢、主矩， $F_N = 0, F_S = -F, M = -Fl$

其次，将应力重量代入应力主矢、主矩表达式，推断是否与面力主矢与主矩等效：

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly dy = 0 = F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly^2 dy = -Fl = M \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{6F}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = -F = F_S\end{aligned}$$

满足应力边界条件，因此，它们是该问题的正确解答。

## 第一章 平面问题的直角坐标解答

**【3-4】** 试考察应力函数  $\Phi = ay^3$  在图 3-8 所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题(体力不计)？

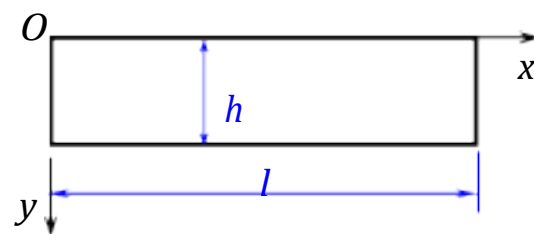


图3-8

**【解答】** (1)相容条件：

不管系数  $a$  取何值，应力函数  $\Phi = ay^3$  总能满足应力函数表示的相容方程，式(2-25)。

(2)求应力重量

当体力不计时，将应力函数  $\Phi$  代入公式(2-24)，得

$$\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

(3)考察边界条件

上下边界上应力重量均为零，故上下边界上无面力。

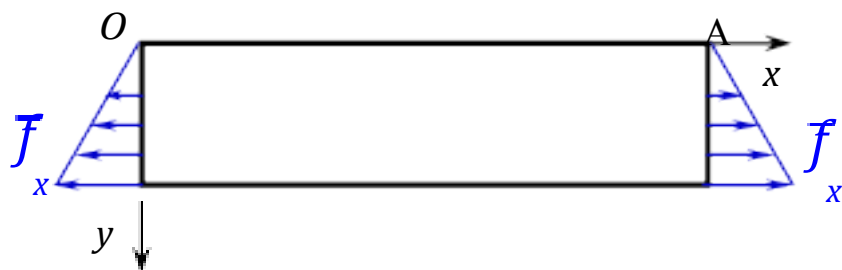
左右边界上：

当  $a > 0$  时，考察  $\sigma_x$  分布状况，留意到  $\tau_{xy} = 0$ ，故  $y$  向无面力

$$\text{左端: } \bar{f}_x(\sigma_x)_{x=0} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y(\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

$$\text{右端: } \bar{f}_x(\sigma_x)_{x=l} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y(\tau_{xy})_{x=l} = 0$$

应力分布如下图，当  $l \gg h$  时应用圣维南原理可以将分布的面力，等效为矢，主矩



主矢的中心在矩下边界位置。即此题状况下，可解决各种偏心拉伸问题。

偏心距  $e$ :

由于在 A 点的应力为零。设板宽为  $b$ ,



集中荷载  $p$  的偏心距  $e$ :

$$(\sigma_x)_A = \frac{p}{bh} - \frac{pe}{bh^2/6} = 0 \Rightarrow e = h/6$$

同理可知，当  $a < 0$  时，可以解决偏心压缩问题。

**【3-5】** 取满足相容方程的应力函数为:

(1)  $\Phi = ax^2y$ , (2)  $\Phi = bxy^2$ , (3)  $\Phi = cxy^3$ , 试求出

应力重量 (不计体力), 画出图 3-9 所示弹性体边界上的面力分布, 并在小边界上表示出面力的主矢量和主矩。

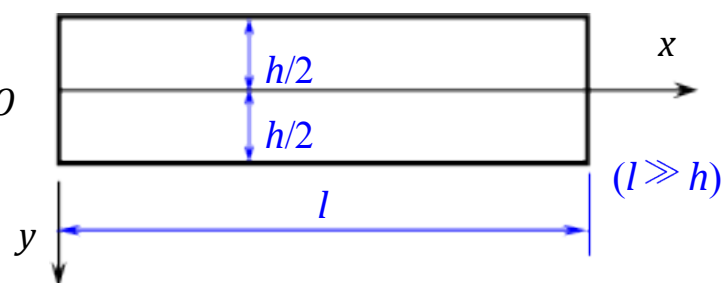


图3-9

**【解答】** (1) 由应力函数  $\Phi = ax^2y$ , 得应力重量表达式

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 2ay, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2ax$$

考察边界条件, 由公式 (2-15) 
$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \bar{f}_x(s) \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s) \end{cases}$$

①主要边界, 上边界  $y = -\frac{h}{2}$  上, 面力为

$$\bar{f}_x(y = -\frac{h}{2}) = 2ax, \quad \bar{f}_y(y = -\frac{h}{2}) = ah$$

②主要边界, 下边界  $y = \frac{h}{2}$ , 面力为

$$\bar{f}_x(y = \frac{h}{2}) = -2ax, \quad \bar{f}_y(y = \frac{h}{2}) = ah$$

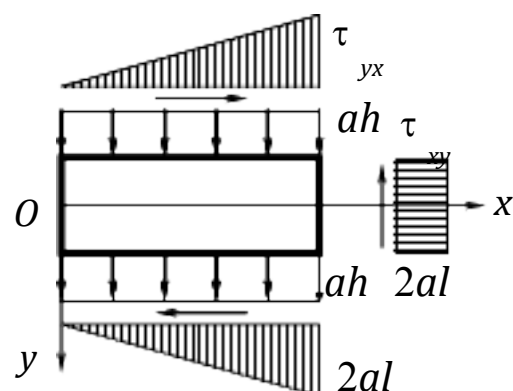
③次要边界, 左边界  $x=0$  上, 面力的主矢, 主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0$$

$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

次要边界, 右边界  $x=l$  上, 面力的主矢, 主矩为



$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2al) dy = -2alh$$

$$\text{主矩: } M = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0$$

弹性体边界上面力分布及次要边界上面力的主矢，主矩如下图

$$(2) \Phi = bxy^2$$

将应力函数代入公式 (2-24)，得应力分量表达式

$$\sigma_x = 2bx, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2by$$

考察应力边界条件，主要边界,由公式 (2-15) 得

$$\text{在 } y = -\frac{h}{2} \text{ 主要边界, 上边界上, 面力为 } f_x \left( y = -\frac{h}{2} \right) = bh, f_y \left( y = -\frac{h}{2} \right) = 0$$

$$\text{在 } y = \frac{h}{2}, \text{ 下边界上, 面力为 } f_x \left( y = \frac{h}{2} \right) = -bh, f_y \left( y = \frac{h}{2} \right) = 0$$

在次要边界上，分布面力可按(2-15)计算，面力的主矢、主矩可通过三个积分边界条件求得：

$$\text{在左边界 } x=0, \text{ 面力分布为 } f_x(x=0)=0, f_y(x=0)=2by$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-2by) dy = 0$$

$$\text{主矩: } M = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

在右边界  $x=l$  上，面力分布为

$$f_x(x=l)=2bl, f_y(x=l)=-2by$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bldy = 2blh$$

$$y \text{ 向主矢: } F''_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2by) dy = 0$$

$$\text{主矩: } M'' = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bly dy = 0$$

弹性体边界上的面力分布及在次要上面力的主矢和主矩如下图

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/197062201113006114>