四川省新高考联盟2025届高三上学期
12月模拟考试数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数z满足$z\left(2+\mathrm{i}^{7}\right)=-3\mathrm{i}+4$，则复数$z$在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】由$z\left(2+\mathrm{i}^{7}\right)=-3\mathrm{i}+4$，

得$z\left(2-\mathrm{i}\right)=4-3\mathrm{i}$，

所以$z=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{\left(4-3\mathrm{i}\right)\left(2+\mathrm{i}\right)}{\left(2-\mathrm{i}\right)\left(2+\mathrm{i}\right)}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$，

所以z在复平面内对应的点为$\left(\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$，位于第四象限.

故选：D.

2. 已知：$p:\dfrac{1}{x-2}\geq 1,q:\log_2\left(x-a\right)\geq 1$．若$p$是$q$的充分不必要条件，则实数的取值范围为（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(0,1\right]$

C. $\left(-\infty,0\right]$　　D. $\left(-\infty,1\right]$

【答案】C

【解析】由$p:\dfrac{1}{x-2}\geq 1\Rightarrow 1-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x-3}{x-2}\leq 0$，可得$\begin{cases}(x-2)(x-3)\leq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow 2<x\leq 3$；

由$q:\log_2\left(x-a\right)\geq 1\Rightarrow x-a\geq 2\Rightarrow x\geq a+2$，

因为p是q的充分不必要条件，则$a+2\leq 2\Rightarrow a\leq 0$.

故选：C

3. 已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若$\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，则$\dfrac{S_{12}}{S_3+S_6}=$（　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. 8　　C. 9　　D. 16

【答案】B

【解析】因为$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{4}$, 所以$S_6=4S_3$，则$S_6-S_3=3S_3$，

由等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的性质可知，

数列$S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,S_{12}-S_9$是以$S_3$为首项，3为公比的等比数列，

所以$S_9-S_6=3^2S_3=9S_3$，即$S_9=9S_3+S_6=13S_3$，

$S_{12}-S_9=3^3S_3=27S_3$，即$S_{12}=27S_3+S_9=40S_3$，

所以$\frac{S_{12}}{S_3+S_6}=\frac{40S_3}{S_3+4S_3}=8$.

故选：B.

4. 已知$\sin(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha-\beta),\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}$，则$\tan\alpha\cdot\tan\beta=$（　　）

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】由$\sin(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha-\beta)$

可得$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$，

两边同除以$\cos\alpha\cos\beta$可得，$\tan\alpha+\tan\beta=2+2\tan\alpha\tan\beta$，

代入$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}$，可得$\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{3}$，

故选：D

5. 已知点D在$\triangle ABC$确定的平面内，O是平面ABC外任意一点，满足$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OA}-y\overrightarrow{OB}$，且$x>0,y>0$，则$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为（　　）

A. $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

C. $\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OA}-y\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OA}-y\overrightarrow{OB}$，

因为A,B,C,D四点共面，

所以$3-x-y=1\Rightarrow x+y=2$，

注意到$x>0,y>0$，从而$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{x+y}{2}=\frac{3}{2}+\frac{y}{x}+\frac{x}{2y}\geq\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

当且仅当 $x=4-2\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}-2$ 时等号成立，

所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

故选：B.

6. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，已知 $a=\sqrt{3}$ ， $A=\frac{\pi}{3}$ ，则 b^2+2c^2 的最大值为（　　）

A. 9　　B. $6+2\sqrt{3}$　　C. $9+\sqrt{3}$　　D. 12

【答案】B

【解析】由 $a=\sqrt{3}$ ， $A=\frac{\pi}{3}$ ，则 $b^2+2c^2=\frac{3(b^2+2c^2)}{a^2}$ ，

根据正弦定理，可得 $b^2+2c^2=\frac{3(\sin^2 B+2\sin^2 C)}{\sin^2 A}=4(\sin^2 B+2\sin^2 C)$

$=4(\frac{1-\cos 2B}{2}+2\cdot\frac{1-\cos 2C}{2})=6-2\cos 2B-4\cos 2C$ ，

在 $\triangle ABC$ 中， $C=\pi-A-B$ ，则 $C=\frac{2\pi}{3}-B$ ，

$b^2+2c^2=6-2\cos 2B-4\cos(\frac{4\pi}{3}-2B)=6-2\cos 2B+2\cos 2B+2\sqrt{3}\sin 2B$

$=2\sqrt{3}\sin 2B+6$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，易知 $0<B<\frac{2\pi}{3}$ ，当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时， $(b^2+2c^2)_{\max}=6+2\sqrt{3}$.

故选：B.

7. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，点 P,A,B 都在椭圆 E 上，若 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1A},\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2B}$ ，且 $\lambda+\mu\geq 4$ ，则椭圆 E 的离心率的取值范围为（　　）

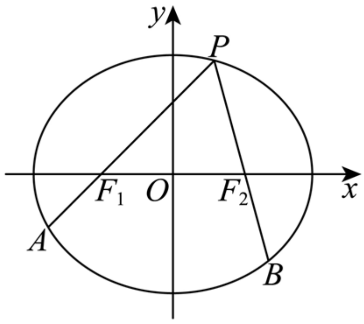
A. $\left[\frac{1}{3},1\right)$　　B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{3}\right]$

【答案】B

【解析】依题意知 $F_1(-c,0)$， $F_2\left(c,0\right)$ ，

如图，由 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$ ， $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2B}$ 可知 P,A,F_1 三点共线， P,B,F_2 三点共线.

设 $P(x_0,y_0)$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，直线 $PA:x=m_1y-c$ ，直线 $PB:x=m_2y+c$ ，



由$\begin{cases} x=m_1y-c \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$消去$x$，

可得$\left(a^2+b^2m_1^2\right)y^2-2b^2cm_1y-a^2b^2+b^2c^2=0$，

则$y_1y_0=\dfrac{b^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2m_1^2}$，

同理可得$y_2y_0=\dfrac{b^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2m_2^2}$，

显然$y_1\neq 0$，$y_0\neq 0$，$y_2\neq 0$，

由$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$代入坐标可得：$(-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c,y_1)$，即得$\lambda=-\dfrac{y_0}{y_1}$，

同理由$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2B}$可得，$\mu=-\dfrac{y_0}{y_2}$，由$x_0=m_1y_0-c$，可得$m_1=\dfrac{x_0+c}{y_0}$，

同理，$m_2=\dfrac{x_0-c}{y_0}$，故$\lambda+\mu=-y_0^2\left(\dfrac{1}{y_1y_0}+\dfrac{1}{y_2y_0}\right)=-y_0^2\cdot\dfrac{2a^2+b^2m_1^2+b^2m_2^2}{b^2c^2-a^2b^2}$

$=\dfrac{y_0^2}{a^2b^2-b^2c^2}[2a^2+b^2(\dfrac{x_0+c}{y_0})^2+b^2(\dfrac{x_0-c}{y_0})^2]=\dfrac{2}{a^2b^2-b^2c^2}\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2+b^2c^2\right)$

（*），

又点P在椭圆上，则有$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，则（*）式可化成：

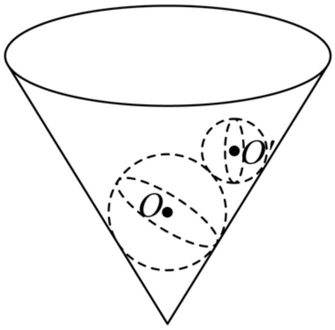
$\dfrac{2\left(a^2b^2+b^2c^2\right)}{a^2b^2-b^2c^2}=\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)}{a^2-c^2}\geq 4$，

解得$a^2\leq 3c^2$，故得$e=\dfrac{c}{a}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又$0<e<1$，故E的离心率的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$.

故选：B.

8. 如图，在一个有盖的圆锥容器内放入两个球体，已知该圆锥容器的底面圆直径和母线长都是$\sqrt{3}$，则（　　）



A. 这两个球体的半径之和的最大值为$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

B. 这两个球体的半径之和的最大值为$\dfrac{4}{3}$

C. 这两个球体的表面积之和的最大值为$\left(6+3\sqrt{3}\right)\pi$

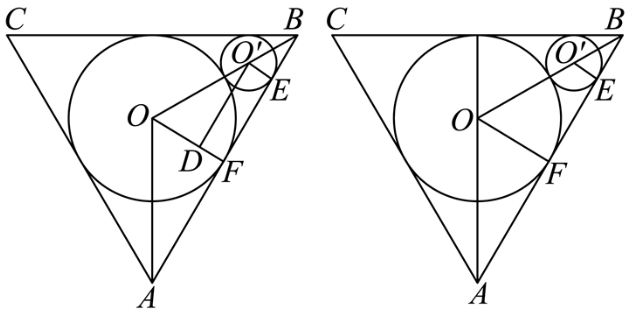
D. 这两个球体的表面积之和的最大值为$\dfrac{10\pi}{9}$

【答案】D

【解析】当这两个球体的半径或者表面积之和取最大值时，上面的球与圆锥的底面相切，过底面圆的直径作截面，

如图所示，过点O作OF⊥AB，垂足为F，过点O'作$O'E\perp$AB，垂足为E，

过点O'作$O'D\perp$OF，垂足为D.



设圆O的半径为R，圆O'的半径为r，当下面的球与上底面相切时，R取得最大值，

此时R为该圆的内切球半径，等边三角形的边长为$\sqrt{3}$，内切球半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，

故$OB=1$，故R的最大值为$\frac{1}{2}$，且取最大值时，

O,O',B三点共线，设$O'E=r$，则$O'B=2r$，则$2r+r+\dfrac{1}{2}=1$，解得$r=\dfrac{1}{6}$，

所以$R\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$，$r\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$，$|OD|=R-r$，$|OO'|=R+r$，

$|O'D|=|EF|=|AB|-|AF|-|BE|=\sqrt{3}-\sqrt{3}R-\sqrt{3}r$.

因为$|OD|^2+|O'D|^2=|OO'|^2$，所以$(R-r)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}R-\sqrt{3}r\right)^2=(R+r)^2$①，

整理得$3R^2+(2r-6)R+3\left(r^2-2r+1\right)=0$，解得$R=1-\frac{r}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3r-2r^2}$，

令函数$f(r)=R+r=1-\frac{r}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3r-2r^2}+r=1+\frac{2r}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3r-2r^2}$，$r\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$，

$f'(r)=\frac{2\sqrt{3r-2r^2}-3+4r}{3\sqrt{3r-2r^2}}$.

令函数$g(r)=2\sqrt{3r-2r^2}-3+4r$，$g'(r)=\frac{3-4r}{\sqrt{3r-2r^2}}+4>0$，所以$g(r)$是增函数.

又因为$g\left(\frac{1}{6}\right)<0$，$g\left(\frac{1}{2}\right)>0$，所以$\exists r_0\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$，$g(r_0)=0$，

所以$r\in\left[\frac{1}{6},r_0\right)$，$g(r)<0$，$r\in\left(r_0,\frac{1}{2}\right]$，$g(r)>0$，

即$r\in\left[\frac{1}{6},r_0\right)$，$f'(r)<0$，$r\in\left(r_0,\frac{1}{2}\right]$，$f'(r)>0$，

所以$f(r)$在$\left[\frac{1}{6},r_0\right)$上单调递减，在$\left(r_0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增.

因为$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$，所以$f(r)_{\max}=\frac{2}{3}$，即这两个球体的半径之和的最大值为$\frac{2}{3}$.

由①可得$R^2+r^2=-\frac{1}{2}\left[(R+r)^2-6(R+r)+3\right]$，

这两个球体的表面积之和为$4\pi\left(R^2+r^2\right)=-2\pi\left[(R+r)^2-6(R+r)+3\right]$.

令$x=R+r\le\frac{2}{3}$，函数$y=-2\pi\left(x^2-6x+3\right)$在$\left(0,\frac{2}{3}\right]$上单调递增，

所以$y_{\max}=-2\pi\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-6\times\frac{2}{3}+3\right]=\frac{10\pi}{9}$，即这两个球体的表面积之和的最大值为$\frac{10\pi}{9}$.

故选：D.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求；全部选对的得6分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分.

9. 随机事件 A，B 满足 $P(A)=\frac{1}{2},P(\overline{B})=\frac{2}{3},P(\overline{A}|B)=\frac{3}{4}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $P(AB)=P(A)P(B)$

B. $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{3}{8}$

C. $P(A+B)=\frac{3}{4}$

D. $P(AB|(A+B))P(\overline{A}B)=P^2(A)P^2(B)$

【答案】CD

【解析】A. $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，

所以 $P(AB)=P(A|B)P(B)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$，$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，

所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，故 A 错误；

B. $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}|B)P(B)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$，故 B 错误；

C. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$，故 C 正确；

D. $P(AB|A+B)=\dfrac{P(AB)}{P(A+B)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{9}$，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A}|B)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$，

所以 $P(AB|(A+B))P(\overline{A}B)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$，$P^2(A)P^2(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$，故 D 正确.

故选：CD

10. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如：$[-0.5]=-1,[1.1]=1$，已知函数 $f(x)=[x]$，下列结论正确的有（　　）

A. 若 $x\in(0,1)$，则 $f(-x)+\frac{1}{4}<-\left[f(x)+\frac{1}{4}\right]$

B. $\forall x,y\in\mathbf{R},f(x+y)<f(x)+f(y)$

C. 函数 $y=[x],x\in\mathbf{R}$ 的图象不关于原点对称

D. 设方程 $[|x-1|]=3$ 的解集为 A，集合 $B=\{x|2x^2-11kx+15k^2\geq 0\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 $k\in\left[-1,-\frac{4}{5}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{8}{5},\frac{5}{3}\right]$

【答案】ACD

【解析】对于 A，当 $x\in(0,1)$，

则 $f(x)=[x]=0$，

所以有 $f(-x)+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4},-\left[f(x)+\frac{1}{4}\right]=-\left[0+\frac{1}{4}\right]=0$，

显然 $f(-x)+\frac{1}{4}<-\left[f(x)+\frac{1}{4}\right]$成立，故 A 正确；

对于 B，$f(0.6)+f(0.6)=0+0=0, f(0.6+0.6)=f(1.2)=[1.2]=1$，

此时 $\forall x,y\in\mathbf{R}, f(x+y)<f(x)+f(y)$不成立，故 B 错误；

对于 C，因为 $f(-0.5)=[-0.5]=-1, f(0.5)=[0.5]=0$，

所以 $f(-0.5)\neq -f(0.5)$，

即 $f(x)=[x]$不是奇函数，

所以函数 $y=[x], x\in\mathbf{R}$ 的图象不关于原点对称，故 C 正确；

对于 D，方程$[|x-1|]=3$，可得$|x-1|\in[3,4)$，

解得：$4\le x<5$ 或$-3<x\le -2$，

所以 $A=\{x\mid -3<x\le -2$ 或$4\le x<5\}$，

又因为 $A\cup B=\mathbf{R}$，$B=\left\{x\middle|2x^2-11kx+15k^2\ge 0\right\}$，

所以当 $B=\mathrm{R}$ 时，满足题意，

此时 $\Delta=121k^2-120k^2=k^2\le 0$，解得 $k=0$；

当 $B\neq \mathrm{R}$ 时，由上可知方程 $2x^2-11kx+15k^2=0$ 有两根，解得 $x_1=\frac{5}{2}k, x_2=3k$，

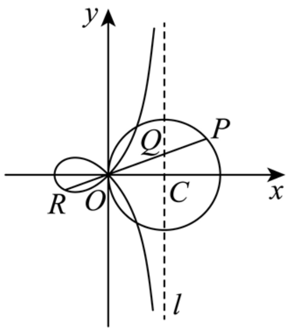
当 $k>0$ 时，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则需要满足$\begin{cases}\frac{5}{2}k\ge 4\\ 3k\le 5\end{cases}\Rightarrow \frac{8}{5}\le k\le \frac{5}{3}$，

当 $k<0$ 时，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则需要满足$\begin{cases}3k\ge -3\\ \frac{5}{2}k\le -2\end{cases}\Rightarrow -1\le k\le -\frac{4}{5}$，

综上可得：$k\in\left[-1,-\frac{4}{5}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{8}{5},\frac{5}{3}\right]$，故 D 正确；

故选：ACD.

11. 已知⊙$C:(x-2)^2+y^2=4$，直线$l:x=2,O$为原点，点P在⊙C上，直线OP与l交于点Q,R在直线OP上，且$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}$，点$R$的轨迹为史留斯蚌线，记为曲线$E$，其中$l$是$E$的渐近线，如图所示．设$M\left(x_0,y_0\right)$是$E$上一点，则（　　）



A. $-2\le x_0<2$

B. 存在异于原点O的点M，使得M关于点O的对称点仍在E上

C. 若M在第二象限，则y_0的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D. 若M在第一象限，则直线OM的斜率大于$\mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}}$

【答案】AD

【解析】设$R\left(x,y\right)$，$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，

由OP与l相交，则P不与O重合，即$x_1\ne 0$，

设$\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OP}\left(\lambda\ne 0\right)$，则$\left(x,y\right)=\lambda\left(x_1,y_1\right)$，所以$\begin{cases}x_1=\dfrac{x}{\lambda}\\ y_1=\dfrac{y}{\lambda}\end{cases}$，

代入$(x-2)^2+y^2=4$，可得$\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^2-\dfrac{4x}{\lambda}=0$，

即$\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{4x}{x^2+y^2}$，

设$\overrightarrow{OR}=\mu\overrightarrow{OQ}\left(\mu\ne 0\right)$，则$\left(x,y\right)=\mu\left(x_2,y_2\right)$，即$x_2=\dfrac{x}{\mu}$，

代入$x=2$，即$\dfrac{x}{\mu}=2$，即$\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{2}{x}$，

由$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}$，即$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}$，所以$\frac{1}{\mu}\overrightarrow{OR}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR}$，

当$\overrightarrow{OR}\ne\vec{0}$时$\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\lambda}=1$，从而，整理得$y^2=\dfrac{2+x}{2-x}\cdot x^2$；