

2023~2024 学年第二学期天域全国名校协作体联考

高三数学

考生须知：

1. 本卷共 5 页满分 150 分，考试时间 120 分钟.
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字.
3. 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效.
4. 考试结束后，只需上交答题纸.

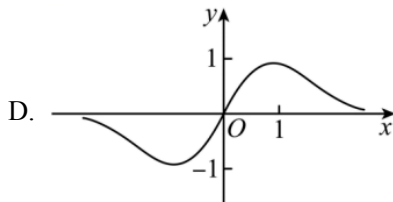
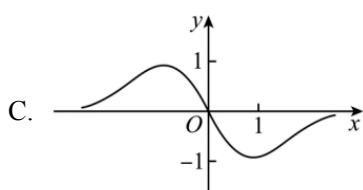
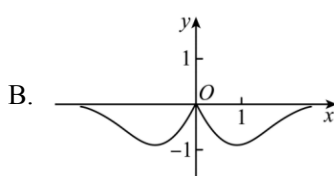
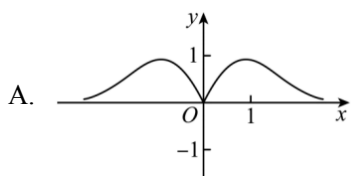
选择题部分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 A, B 是全集 U 的非空子集，且 $A \subseteq \complement_U B$ ，则 ()

- A. $B \subseteq A$ B. $B \subseteq \complement_U A$ C. $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ D. $A \subseteq B$

2. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来分析函数的图象特征. 则函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



3. 已知复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 且 $x^2 - (4 + 2i)x + 4 + ai = 0$ 有实数根 b ，则 $|z^2| =$ ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 12 C. $2\sqrt{5}$ D. 20

4. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2，点 D, E 分别为 AB, BC 的中点，若 $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EF}$ ，则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AF} =$ ()

- A. 1 B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{5}{4}$

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 P 满足

$$\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PF_1} = -2a^2, \text{ 则双曲线离心率的最小值为 () }$$

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 为其前 n 项和，首项 $a_1 = 1$ ，且函数 $f(x) = x^3 - a_{n+1} \sin x + (2a_n + 1)x + 1$ 的导函数有唯一零点，则 $S_5 = ()$

- A. 26 B. 63 C. 57 D. 25

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x+2) - 2$ 为奇函数， $f(3x+1)$ 为偶函数， $f(1) = 0$ ，则 $\sum_{k=1}^{2024} f(k) = ()$

- A. 4036 B. 4040 C. 4044 D. 4048

8. 已知直线 $l: Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$ 与曲线 $W: y = x^3 - x$ 有三个交点 D, E, F ，且 $|DE| = |EF| = 2$ ，则以下能作为直线 l 的方向向量的坐标是 ()。

- A. $(0, 1)$ B. $(1, -1)$ C. $(1, 1)$ D. $(1, 0)$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知由样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 10)$ 组成的一个样本，得到回归直线方程为 $\hat{y} = -x + 3$ ，且 $\bar{x} = 4$ 。剔除一个偏离直线较大的异常点 $(-5, -1)$ 后，得到新的回归直线经过点 $(6, -4)$ 。则下列说法正确的是

- A. 相关变量 x, y 具有正相关关系
B. 剔除该异常点后，样本相关系数的绝对值变大
C. 剔除该异常点后的回归直线方程经过点 $(5, -1)$
D. 剔除该异常点后，随 x 值增加相关变量 y 值减小速度变小

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以坐标原点 O 为顶点，以 x 轴的非负半轴为始边，其终边经过点 $M(a, b)$ ， $|OM| = m (m \neq 0)$ ，定义 $f(\theta) = \frac{b+a}{m}$ ， $g(\theta) = \frac{b-a}{m}$ ，则 ()

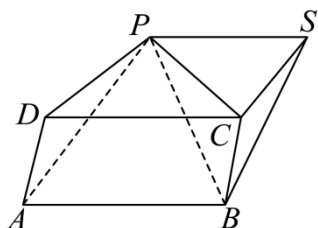
A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

B. $f(\theta) + f^2(\theta) \geq 0$

C. 若 $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = 2$, 则 $\sin 2\theta = \frac{3}{5}$

D. $f(\theta)g(\theta)$ 是周期函数

11. 如图, 多面体 $PS-ABCD$ 由正四棱锥 $P-ABCD$ 和正四面体 $S-PBC$ 组合而成, 其中 $PS=1$, 则下列关于该几何体叙述正确的是 ()



A. 该几何体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. 该几何体为七面体

C. 二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$

D. 该几何体为三棱柱

非选择题部分

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 从某工厂生产的零件中随机抽取 11 个, 其尺寸值为 43, 45, 45, 45, 49, 50, 50, 51, 51, 53, 57 (单位: mm), 现从这 11 个零件中任取 3 个, 则 3 个零件的尺寸刚好为这 11 个零件尺寸的平均数、第六十百分位数、众数的概率为_____.

13. 已知偶函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 则 $\omega =$ _____.

14. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 25$, 则 $\sqrt{50+8x+6y} + \sqrt{50+8x-6y}$ 的最大值为_____

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - ax$, $a \in \mathbb{R}$

(1) 若 $f(x)$ 在定义域内是减函数, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点.

16. 据新华社北京 2 月 26 日报道, 中国航天全年预计实施 100

次左右发射任务，有望创造新的纪录，我国首个商业航天发射场将迎来首次发射任务，多个卫星星座将加速组网建设；中国航天科技集团有限公司计划安排近 70 次宇航发射任务，发射 290 余个航天器，实施一系列重大工程任务.由于航天行业拥有广阔的发展前景，有越来越多的公司开始从事航天研究，某航天公司研发了一种火箭推进器，为测试其性能，对推进器飞行距离与损坏零件数进行了统计，数据如下：

飞行距离 x (kkm)	56	63	71	79	90	102	110	117
损坏零件数 y (个)	61	73	90	105	119	136	149	163

参考数据： $\bar{x}=86$ ， $\bar{y}=112$ ， $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 82743$ ， $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 62680$

- (1) 建立 y 关于 x 的回归模型 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ ，根据所给数据及回归模型，求 y 关于 x 的回归方程（ $\hat{b}$ 精确到 0.1， $\hat{a}$ 精确到 1）；
- (2) 该公司进行了第二项测试，从所有同型号推进器中随机抽取 100 台进行等距离飞行测试，对其中 60 台进行飞行前保养，测试结束后，有 20 台报废，其中保养过的推进器占比 30%，请根据统计数据完成 2×2 列联表，并根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为推进器是否报废与保养有关？

	保养	未保养	合计
报废			20
未报废			
合计	60		100

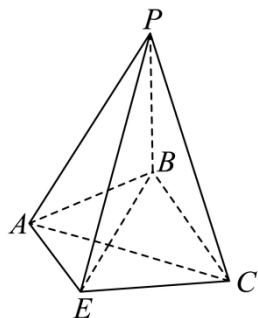
附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$ ， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$ ，

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}，\ n=a+b+c+d；$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
-------------------	------	-----	------	-------	------	-------

k_0	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp$ 平面 ABC , $AB=BC=BP=2$, 点 E 在平面 ABC 内, 且满足平面 $PAE \perp$ 平面 PBE , BA 垂直于 BC



(1) 当 $\angle ABE \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, 求点 E 的轨迹长度;

(2) 当二面角 $E-PA-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 求三棱锥 $E-PCB$ 的体积.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e , 已知椭圆长轴长是短轴长的 2 倍, 且椭圆 W 过点 $(1, e)$.

(1) 求椭圆 W 的方程;

(2) 已知平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点均在 W 上, 求平行四边形 $ABCD$ 的面积 S 的最大值.

19. 对称变换在对称数学中具有重要的研究意义. 若一个平面图形 K 在 m (旋转变换或反射变换) 的作用下仍然与原图形重合, 就称 K 具有对称性, 并记 m 为 K 的一个对称变换. 例如, 正三角形 R 在 m_1 (绕中心 O 作 120° 的旋转) 的作用下仍然与 R 重合 (如图 1 图 2 所示), 所以 m_1 是 R 的一个对称变换, 考虑到变换前

后 R 的三个顶点间的对应关系, 记 $m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 又如, R 在 l_1 (关于对称轴 r_1 所在直线的反射) 的作

用下仍然与 R 重合 (如图 1 图 3 所示), 所以 l_1 也是 R 的一个对称变换, 类似地, 记 $l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 记正

三角形 R 的所有对称变换构成集合 S . 一个非空集合 G 对于给定的代数运算来说作成一群, 假如同时满足:

- I. $\forall a, b \in G, a \circ b \in G$;
- II. $\forall a, b, c \in G, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- III. $\exists e \in G, \forall a \in G, a \circ e = e \circ a = a$;
- IV. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

对于一个群 G , 称 III 中的 e 为群 G 的单位元, 称 IV 中的 a^{-1} 为 a 在群 G 中的逆元. 一个群 G 的一个非空子集 H 叫做 G 的一个子群, 假如 H 对于 G 的代数运算 $\circ$ 来说作成一个群.

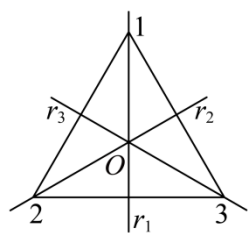


图1

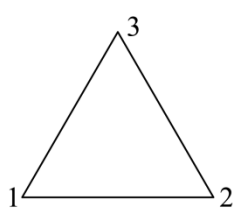


图2

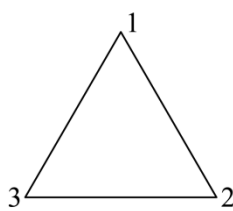


图3

(1) 直接写出集合 S (用符号语言表示 S 中的元素);

(2) 同一个对称变换的符号语言表达形式不唯一, 如

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ 对于集合 } S \text{ 中的}$$

元素, 定义一种新运算 $*$, 规则如下: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{1, 2, 3\}.$$

①证明集合 S 对于给定的代数运算 $*$ 来说作成一个群;

②已知 H 是群 G 的一个子群, e, e' 分别是 G, H 的单位元, $a \in H, a^{-1}, a'$ 分别是 a 在群 G , 群 H 中的逆元. 猜想 e, e' 之间的关系以及 a^{-1}, a' 之间的关系, 并给出证明;

③写出群 S 的所有子群.

参考答案

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 A, B 是全集 U 的非空子集, 且 $A \subseteq \complement_U B$, 则 ()

- A. $B \subseteq A$ B. $B \subseteq \complement_U A$ C. $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ D. $A \subseteq B$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 Venn 图，结合子集和集合间的运算理解判断.

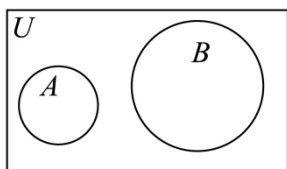
【详解】由题意知 $A \subseteq \complement_U B$ ，从而可得 Venn 图如下图，

对 A、D：由 Venn 图，可得 $B \cap A = \emptyset$ ，故 A、D 错误；

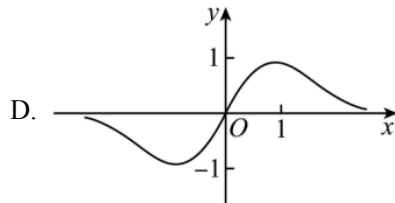
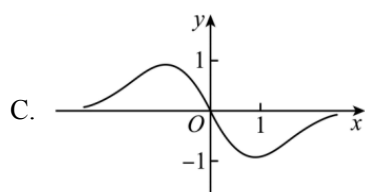
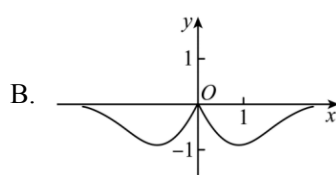
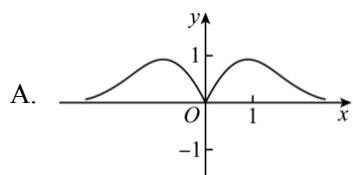
对 B：因为 $B \cap A = \emptyset$ ， $B \subseteq \complement_U A$ 正确，故 B 正确；

对 C：因为 $B \cap A = \emptyset$ ，则 $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ 错误，故 C 错误；

故选：B.



2. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来分析函数的图象特征. 则函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性求解即可.

【详解】函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，排除 A,B 选项，

又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} > 0$, 排除 C 选项, 选项 D 满足题意,

故选: D.

3. 已知复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 且 $x^2 - (4 + 2i)x + 4 + ai = 0$ 有实数根 b , 则 $|z^2| =$ ()

A. $2\sqrt{3}$

B. 12

C. $2\sqrt{5}$

D. 20

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据题意可求得 $b^2 - 4b + 4 + (2b + a)i = 0$, 从而得 $\begin{cases} b^2 - 4b + 4 = 0 \\ (2b + a)i = 0 \end{cases}$, 求解得 $z = -4 + 2i$, 从而可求解.

而可求解.

【详解】 由题意知 b 为 $x^2 - (4 + 2i)x + 4 + ai = 0$ 的实数根,

则 $b^2 - (4 + 2i)b + 4 + ai = 0$, 即 $b^2 - 4b + 4 + (a - 2b)i = 0$,

则 $\begin{cases} b^2 - 4b + 4 = 0 \\ (a - 2b)i = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases}$, 所以 $z = 4 + 2i$,

所以 $|z^2| = 4^2 + 2^2 = 20$, 故 D 正确.

故选: D.

4. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 D 、 E 分别为 AB 、 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EF}$, 则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AF} =$ ()

A. 1

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{6}{5}$

D. $\frac{5}{4}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 取 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 为基底, 利用平面向量基本定理表示出 $\overrightarrow{EF}$ 、 $\overrightarrow{AF}$, 进行数量积运算即可.

【详解】 在 $\triangle ABC$ 中, 取 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 为基底, 则 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$.

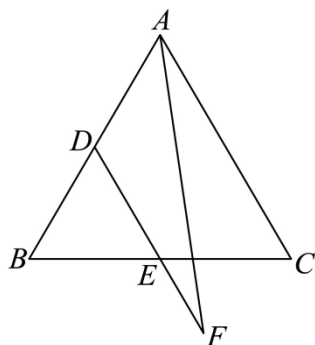
因为点 D 、 E 分别为 AB 、 BC 的中点,

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{8} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{16} \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{1}{8} \times 2 \times 2 \times \cos 60^\circ + \frac{3}{16} \times 4 = 1\end{aligned}$$

故选：A



5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 P 满足

$\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PF_1} = -2a^2$ ，则双曲线离心率的最小值为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 P 的坐标，代入双曲线的方程，利用数量积的坐标表示，结合双曲线离心率的计算公式求解即得.

【详解】设 $P(x_0, y_0)$ ，双曲线的半焦距为 c ，则有 $|x_0| \geq a$ ， $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ， $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，

于是 $\overrightarrow{PF_2} = (c - x_0, -y_0), \overrightarrow{PF_1} = (-c - x_0, -y_0)$ ，

因此 $\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PF_1} = x_0^2 - c^2 + y_0^2 = x_0^2 + \left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right)b^2 - c^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot x_0^2 - b^2 - c^2 \geq \frac{c^2}{a^2} \cdot a^2 - b^2 - c^2 = -b^2$ ，

当且仅当 $|x_0| = a$ 时取等号，则 $-2a^2 \geq -b^2$ ，即 $\frac{b^2}{a^2} \geq 2$ ，离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \geq \sqrt{3}$ ，

所以双曲线离心率的最小值为 $\sqrt{3}$ 。

故选：D

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 为其前 n 项和，首项 $a_1 = 1$ ，且函数 $f(x) = x^3 - a_{n+1} \sin x + (2a_n + 1)x + 1$

的导函数有唯一零点，则 $S_5 = (\quad)$

A. 26

B. 63

C. 57

D. 25

【答案】C

【解析】

【分析】计算 $f'(x)$ ，分析 $f'(x)$ 的奇偶性，可判断零点取值，代入计算可得 $\{a_n\}$ 的递推关系，求出前 5 项，计算求和即可.

【详解】因为 $f(x) = x^3 - a_{n+1} \sin x + (2a_n + 1)x + 1$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - a_{n+1} \cos x + (2a_n + 1)$ ，由题意可知： $f'(x) = 0$ 有唯一零点.

令 $g(x) = f'(x) = 3x^2 - a_{n+1} \cos x + (2a_n + 1)$ ，可知 $g(x)$ 为偶函数且有唯一零点，

则此零点只能为 0，即 $g(0) = 0$ ，代入化简可得： $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ，

又 $a_1 = 1$ ，所以 $a_2 = 3$ ， $a_3 = 7$ ， $a_4 = 15$ ， $a_5 = 31$ ，所以 $S_5 = 57$.

故选：C

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x+2)-2$ 为奇函数， $f(3x+1)$ 为偶函数， $f(1)=0$ ，则 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)$
= ()

A. 4036

B. 4040

C. 4044

D. 4048

【答案】D

【解析】

【分析】根据题中 $f(x+2)-2$ 为奇函数， $f(3x+1)$ 为偶函数，从而可得出 $f(x)$ 为周期为 4 的函数，从而可求解.

【详解】由题意得 $f(x+2)-2$ 为奇函数，所以 $f(x+2)-2 + f(-x+2)-2 = 0$ ，即

$f(x+2) + f(-x+2) = 4$ ，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 2)$ 中心对称，

由 $f(3x+1)$ 为偶函数，所以可得 $f(x+1)$ 为偶函数，则 $f(x+1) = f(-x+1)$ ，所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $f(x+2) = f(-x) = -f(-x+2)$ ，从而得 $f(x) = f(x+4)$ ，所以函数 $f(x)$ 为周期为 4 的函数，

因为 $f(1)=0$ ，所以 $f(1)+f(3)=4$ ，则 $f(3)=4$ ，

因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(3)=f(-1)=4$ ，

又因为 $f(x)$ 关于点 $(2,2)$ 对称，所以 $f(2)=2$ ，

又因为 $f(4)=f(-2)=-f(0)$ ，又因为 $f(-2)=f(-2+4)=f(2)=2$ ，所以

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8,$$

所以 $\sum_{k=1}^{2024} f(k) = \frac{2024}{4} \times [f(1)+f(2)+f(3)+f(4)] = 4048$ ，故 D 正确。

故选：D.

8. 已知直线 $l: Ax+By+C=0 (A^2+B^2 \neq 0)$ 与曲线 $W: y=x^3-x$ 有三个交点 D, E, F ，且

$|DE|=|EF|=2$ ，则以下能作为直线 l 的方向向量的坐标是 ().

A. $(0,1)$

B. $(1,-1)$

C. $(1,1)$

D. $(1,0)$

【答案】C

【解析】

【分析】由函数 $y=x^3-x$ 的性质可得曲线 W 的对称中心 $(0,0)$ ，即得 $E(0,0)$ ，再根据给定长度求出点 D 的坐标即得.

【详解】显然函数 $f(x)=x^3-x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 是奇函数，因此曲线 W 的对称中心为 $(0,0)$ ，由直线 l 与曲线 W 的三个交点 D, E, F 满足 $|DE|=|EF|=2$ ，得 $E(0,0)$ ，

设 $D(x, x^3-x)$ ，则 $x^2+(x^3-x)^2=4$ ，令 $x^2=t$ ，则有 $t^3-2t^2+2t-4=0$ ，即 $(t^2+2)(t-2)=0$ ，

解得 $t=2$ ，即 $x=\pm\sqrt{2}$ ，因此点 $D(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{ED}=(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $\overrightarrow{ED}=(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ，

选项中只有坐标为 $(1,1)$ 的向量与 $\overrightarrow{ED}$ 共线，能作为直线 l 的方向向量的坐标是 $(1,1)$ 。

故选：C

【点睛】关键点点睛：本题的关键首先是得到曲线对称中心为 $(0,0)$ ，从而得到 $E(0,0)$ ，然后再去设点 D 坐标，根据 $|DE|=2$ ，得到高次方程，利用换元法结合因式分解解出 D 的坐标即可。

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知由样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 10$) 组成的一个样本，得到回归直线方程为 $\hat{y} = -x + 3$ ，且 $\bar{x} = 4$ ．剔除一个偏离直线较大的异常点 $(-5, -1)$ 后，得到新的回归直线经过点 $(6, -4)$ ．则下列说法正确的是

- A. 相关变量 x, y 具有正相关关系
- B. 剔除该异常点后，样本相关系数的绝对值变大
- C. 剔除该异常点后的回归直线方程经过点 $(5, -1)$
- D. 剔除该异常点后，随 x 值增加相关变量 y 值减小速度变小

【答案】BC

【解析】

【分析】根据给定条件，求出新样本的中心点，进而求出新回归直线的斜率，再逐项判断即得．

【详解】依题意，原样本中， $\bar{y} = -4 + 3 = -1$ ，

剔除一个偏离直线较大的异常点 $(-5, -1)$ 后，新样本中， $\bar{x}' = \frac{4 \times 10 - (-5)}{9} = 5, \bar{y}' = \frac{-1 \times 10 - (-1)}{9} = -1$ ，

因此剔除该异常点后的回归直线方程经过点 $(5, -1)$ ，C 正确；

由新的回归直线经过点 $(6, -4)$ ，得新的回归直线斜率为 $\frac{-4 - (-1)}{6 - 5} = -3$ ，因此相关变量 x, y 具有负相关关系，A 错误；

又 $|-3| > 1$ ，则剔除该异常点后，随 x 值增加相关变量 y 值减小速度变大，D 错误；

由剔除的是偏离直线较大的异常点，得剔除该点后，新样本数据的线性相关程度变强，即样本相关系数的绝对值变大，B 正确．

故选：BC

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以坐标原点 O 为顶点，以 x 轴的非负半轴为始边，其终边经过点

$M(a, b)$ ， $|OM| = m (m \neq 0)$ ，定义 $f(\theta) = \frac{b+a}{m}$ ， $g(\theta) = \frac{b-a}{m}$ ，则 ()

- A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$
- B. $f(\theta) + f^2(\theta) \geq 0$
- C. 若 $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = 2$ ，则 $\sin 2\theta = \frac{3}{5}$
- D. $f(\theta)g(\theta)$ 是周期函数

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意分别求出 $\cos \theta = \frac{a}{m}$, $\sin \theta = \frac{b}{m}$, 则 $f(\theta) = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$,

$g(\theta) = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$, 从而可对 A 判断求解, 利用换元法令

$t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 可对 B 判断求解, 由 $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = 2$ 求出

$\tan \theta = 3$, 并结合 $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$ 从而可对 C 判断求解, 由 $f(\theta)g(\theta) = -\cos 2\theta$ 可对 D 判断求解.

【详解】由题意得 $M(a, b)$ 在角 θ 的终边上, 且 $|OM| = m$, 所以 $\cos \theta = \frac{a}{m}$, $\sin \theta = \frac{b}{m}$,

则 $f(\theta) = \frac{b+a}{m} = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, $g(\theta) = \frac{b-a}{m} = \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$,

对 A: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} = 1$, 故 A 正确;

对 B: $f(\theta) + f^2(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + (\sin \theta + \cos \theta)^2$, 令

$t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

所以 $f(\theta) + f^2(\theta) = t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, 故 B 错误;

对 C: $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = 2$, 解得 $\tan \theta = 3$,

又由 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5}$, 故 C 正确;

对 D: $f(\theta)g(\theta) = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$, 因为 $y = \cos 2\theta$ 为周期函数, 故 D 正确.

故选: ACD.

11. 如图, 多面体 $PS-ABCD$ 由正四棱锥 $P-ABCD$ 和正四面体 $S-PBC$ 组合而成, 其中 $PS=1$, 则下列关于该几何体叙述正确的是 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/197156135130006101>