高一数学（沪教版2020必修第二册）

第 7章　三角函数

7.1正弦函数的图像（第1课时）

学习目标

1.了解由单位圆和正弦函数定义画正弦函数图象的步骤，掌握“五点法”画出正弦函数、余弦函数的图象的方法．(重点)

2．正弦函数图象的简单应用．(难点)

情景引入

前一章学习了三角，无论是在锐角三角形中，还是在平面直角坐标系中，我们都是从几何的角度，把正弦、余弦和正切看成一个比值． 本章我们将从函数的角度看待正弦、余弦和正切，研究这些三角函数的图像与性质．

与幂函数、指数函数及对数函数不同，三角函数具有周期性．在现实生活中存在大量的周期现象，如四季的交替，钟表指针的转动， 弹簧的振动，等等．三角函数是刻画周期现象最典型的数学模型．根据１９世纪法国数学家傅里叶（Ｊ． Ｂ． Ｊ． Ｆｏｕｒｉｅｒ）建立的傅里叶级数理论，一般的周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数表示，它确认了正弦函数和余弦函数在周期现象研究中重要而本质的作用， 使三角函数成为分析和解决周期问题的基本工具，在物理学、工程技术和其他许多领域都有广泛的应用

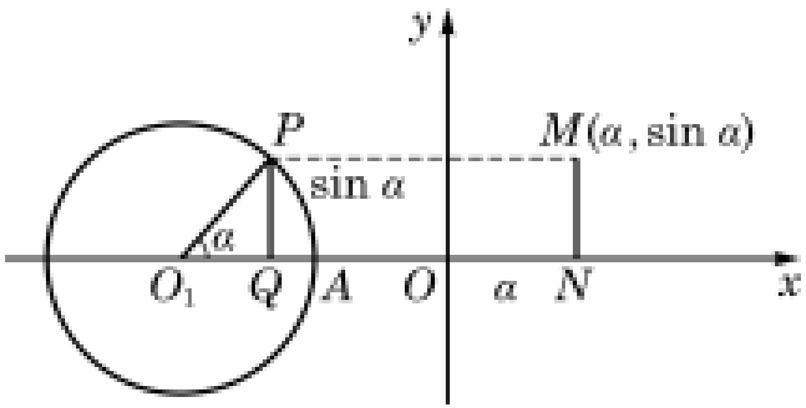
新课讲解

我们已经知道，任意一个给定的实数x都对应着唯一确定的角（其弧度数等于实数x），而这个角又对应着唯一确定的正弦值ｓｉｎx．这样，对于任意一个给定的实数x，都有唯一确定的正弦值ｓｉｎx与之对应．按照这个对应关系所建立的函数叫做正弦函数，记作y＝ｓｉｎx．正弦函数的定义域是实数集R．

对任意给定的实数x，都有$\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$k\in Z$. 这说明当x的值增加或减少2π的整数倍时，$\sin x$的值会重复出现. 因此，只要作出正弦函数$y=\sin x$在区间$[0, 2\pi]$上的图像， 就可以得到正弦函数在R上的图像.

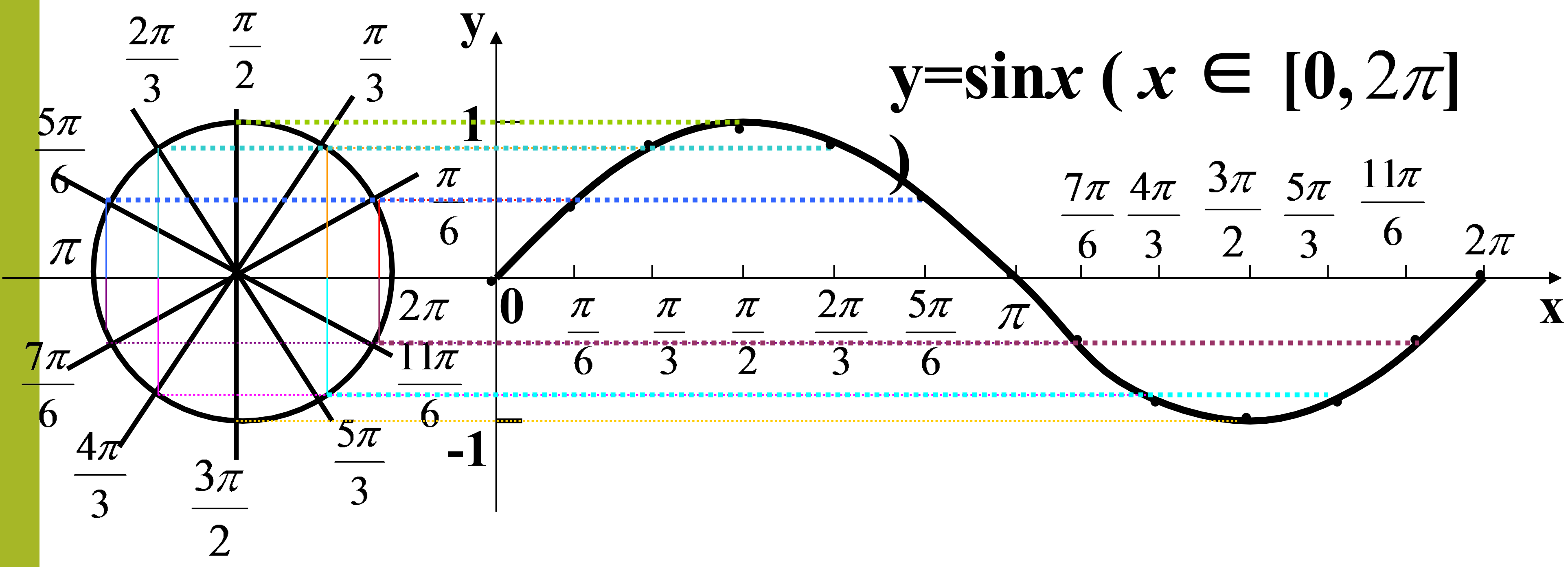
下面，我们结合单位圆，利用描点法作$y=\sin x$的大致图像.

为了描出$y=\sin x$图像上的某个点$M(\alpha,\sin\alpha)$，先在平面直角坐标系的x轴上任取一点O_1，以点O_1为圆心的单位圆与x轴有两个交点，其中右边的一个交点记作A（图7-1-1）．设P是此单位圆上一点，$\angle AO_1P=\alpha$，作PQ垂直于x轴，其垂足为Q．对比以坐标原点O为圆心的单位圆中角α的终边与单位圆的交点，可知点P的纵坐标为$\sin\alpha$，而QP的长是$|\sin\alpha|$．在x轴上取点$N(\alpha,0)$，将线段QP平移至NM的位置使点Q与点N重合，从而点M的坐标为$(\alpha,\sin\alpha)$，这样就得到了函数$y=\sin x$图像上的一点M．



随着α的变化，可以得到函数y＝ｓｉｎx图像上的其他点．方便起见，我们先将单位圆O_1分为１２等份（等份数越多，作出的图像越精确），使得角α的弧度数依次取０、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$…、２π，再借助圆O_1得到对应的纵坐标，依次作出函数y＝ｓｉｎx图像上的点（０，ｓｉｎ０）、$\left(\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$、$\left(\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$…、（２π，ｓｉｎ２π），用光滑的曲线将这些点连接起来，就得到正弦函数y＝ｓｉｎx，x∈［０，２π］的大致图像（图７-１-２）

$y=\sin x\ (\ x \in [0, 2\pi]\ )$



因为$\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$k\in Z$，所以函数$y=\sin x$当$x\in[2\pi,4\pi]$，$x\in[4\pi,6\pi]$，…时的图像与$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图像形状完全一样，只需将后者向右平移2π、4π、…就可得到．同样，函数$y=\sin x$当$x\in[-2\pi,0]$，$x\in[-4\pi,-2\pi]$，…时的图像与$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图像形状也完全一样，只需将后者向左平移2π、4π、…就可得到．这样，就可以得到函数$y=\sin x$的图像（图7-1-3）．正弦函数$y=\sin x$的图像通常称为正弦曲线

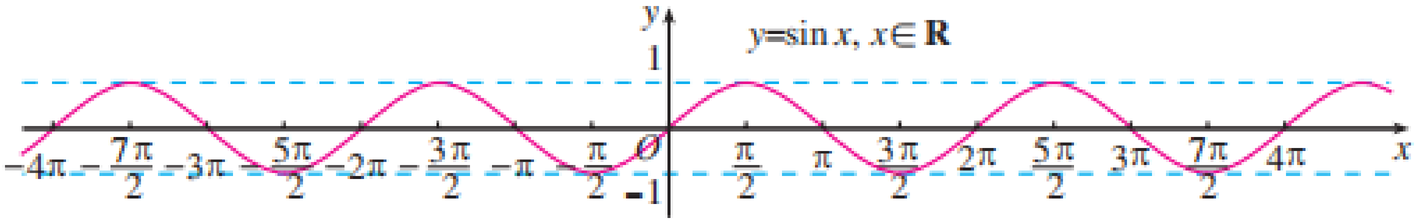
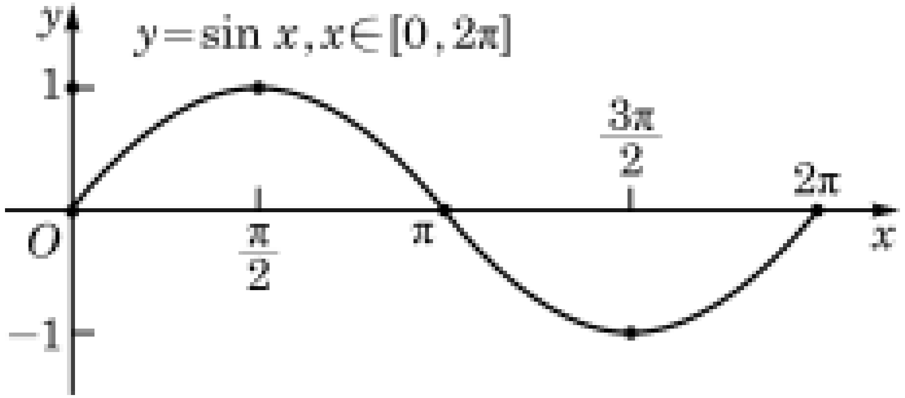


图 5. 4-4

从图 7 - 1 - 2 可知，（0，0）、（$\frac{\pi}{2}$，1）、（π，0）、（$\frac{3\pi}{2}$，－1）和（2π，0）是函数y＝sinx，x∈［0，2π］图像的五个关键点．我们描出这五个点，并用光滑的曲线将它们连接起来，就得到函数y＝sinx，x∈［0，2π］的大致图像（图 7 - 1 - 4）．



这种通过五个关键点作出正弦函数大致图像的方法，通常称为“五点（作图）法”．

[拓展]　(1)作正弦函数图像时，函数自变量要用弧度制，以保证自变量与函数值都为实数.

(2)在精确度要求不高的情况下，“五点法”是一种实用、高效的作图方法，需要注意这五个点要用平滑的曲线连接，而不能用线段连接.

(3)五个关键点是利用五点法作图的关键，要熟记并区分正弦函数图像中的五个关键点.

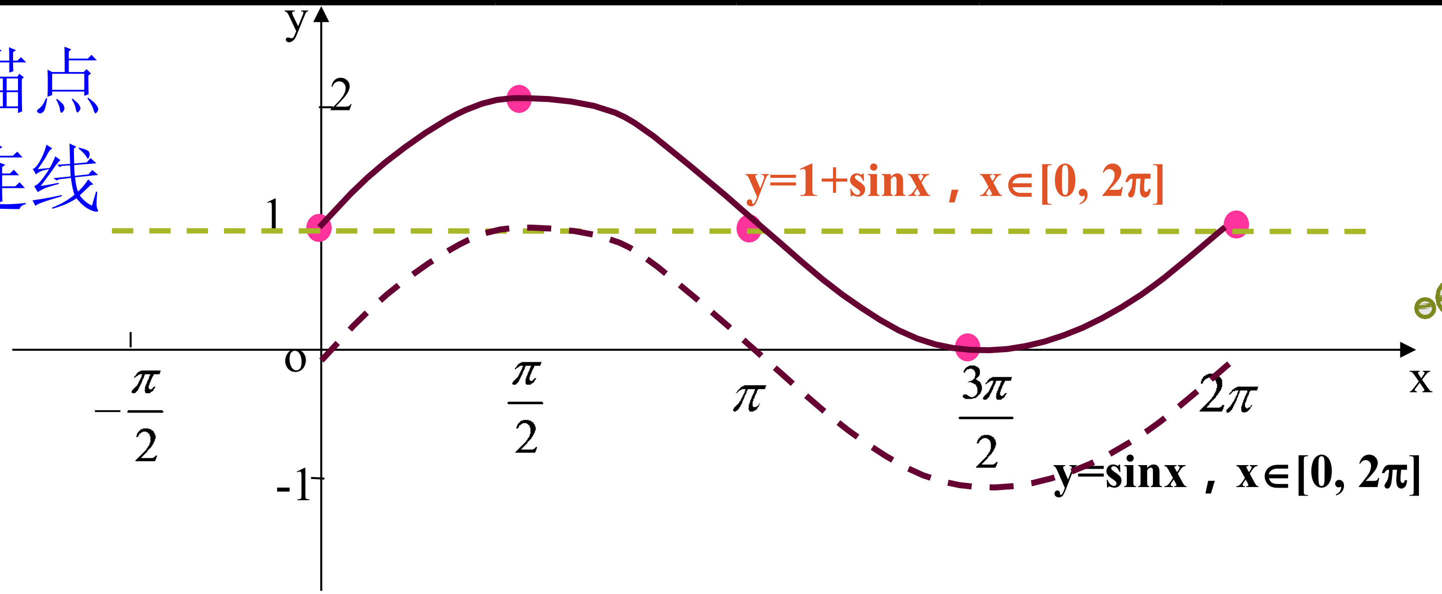
【练一练1】画出函数$y = sinx + 1, x \in [0, 2\pi]$的图象.

【解析】利用五点法作图. 列表如下

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y=sinx	0	1	0	-1	0
y=sinx+1	1	2	1	0	1

步骤：
1.列表
2.描点
3.连线

描点
连线



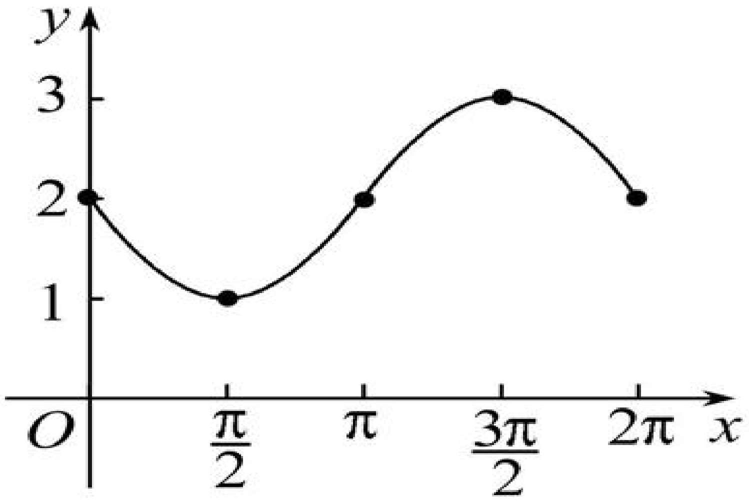
与正弦函数$y = sinx$的图象有什么关系？

【练一练2】用“五点法”作出函数$y=2-\sin x$, $x\in[0,2\pi]$的图像.

【解析】列表如下

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2-\sin x$	2	1	2	3	2

描点、连线

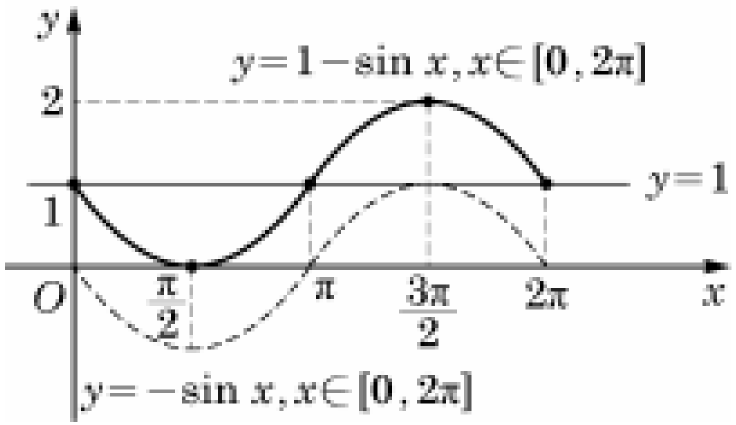


例 1 用“五点法”作出函数$y=1-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的大致图像，并写出使得$y<1$的x的取值范围． 解 将五个关键点列表（表7 1）如下：

表 7-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-\sin x$	0	-1	0	1	0
$1-\sin x$	1	0	1	2	1

描点并用光滑曲线把它们连接起来，就得到$y=1-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的大致图像（图7-1-5）．



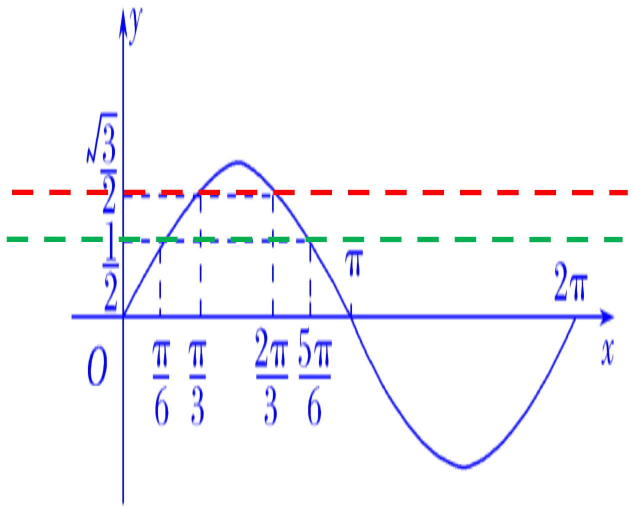
作出函数$y=1$的图像，如图7-1-5所示．由图可知，使得$y<1$的x的取值范围是$(0,\pi)$．

例2. 利用正弦曲线，求满足$\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{x}$的$x$的取值集合.

【解析】如图所示，作出$y = \sin x$在$[0,2\pi]$上的图象.

作直线$y = \frac{1}{2}$，根据特殊角的正弦值可知，该直线与$y = \sin x$在$[0,2\pi]$上的交点横坐标为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{5\pi}{6}$.

作直线$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$，该直线与$y = \sin x$在$[0,2\pi]$上的交点横坐标为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{2\pi}{3}$.



由图象可知，在$[0,2\pi]$上，当$\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{6}$时满足不等式.

因此，不等式的解集为$\{x|\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$或$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$，$k \in z\}$.

【总结】

用三角函数图象解三角不等式的方法:

1.作出相应正弦函数在[0,2π]上的图象(或者其它一个周期内图像）；

2.写出适合不等式在一个周期上的解集;

3.写出不等式的解集（端点$+2k\pi$）.