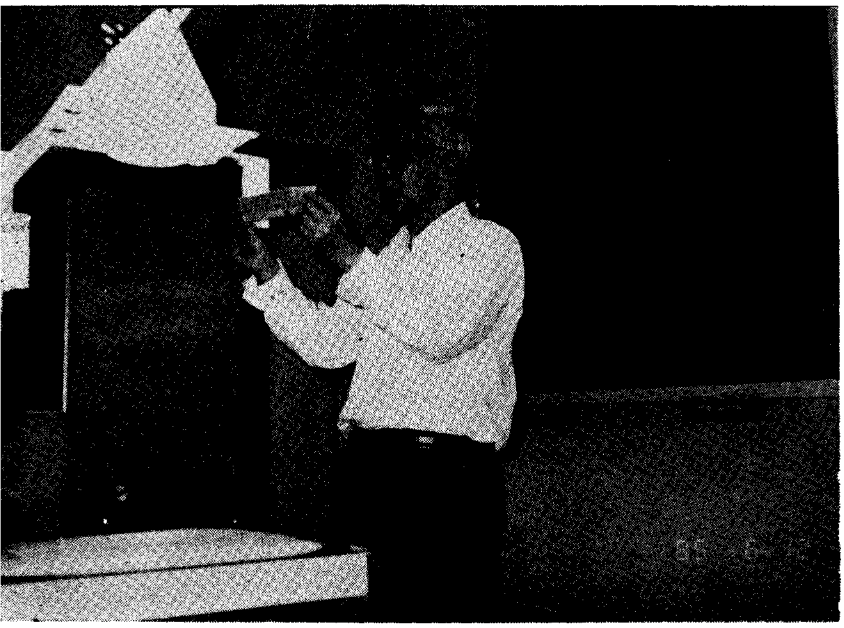
华罗庚教授(右二)与老一辈无产阶级革命家在一起



华罗庚教授在日本讲学

华罗庚教授在美国撰写本书

介　　绍

王　元

华罗庚教授遗著《计划经济大范围最优化数学理论》的出版，是很值得庆贺的事情。

作者在书中研究了制定协调发展的国民经济计划的数学模型。提出"产综"这一概念，所谓产综，就是各经济部门的产量构成的矢量。而当产综为消耗系数方阵的正特征矢量时，产量可以成倍增长，增长率为其对应正特征根的倒数。如果按正特征矢量来安排生产，则会得到最高的增长率。否则，若不按正特征矢量来投入生产，则当生产进行到一定时候，例如若干

年后，一定会出现不平衡现象。这就需要对计划作出调整，使投入各部门生产的产量之比尽量与正特征矢量一致。因此，这一模型对于如何安排国民经济计划，如何调整计划，包括如何进行投资、设备更新等，有重要参考价值。当然，按正特征矢量安排计划是要受设备能力的制约的，这时可以结合使用线性规划方法来处理。

本书阐述的方法是建立在严格的数学理论基础之上的。作者首先将上述模型数学化，然后用严格的逻辑推导，得到一系列结论，再阐明它们在经济学上的含义。本书第二章是专门介绍所需数学理论的。由于作者对所用到的数学理论作了很多深入浅出的研究工作，所以，学过线性代数与实数极限理论者，是可以看得懂的。不具备上述数学修养者，阅读并了解本书的

其他章节，是不会有困难的。

华罗庚教授早在1958年就在中国科学院数学研究所与中国科学技术大学数学系多次讲授过他的方法，并将这个方法的要点写在论文《有限与无穷，离散与连续》[1]之中，还将这个方法所需的非负方阵理论，写在他的基础数学讲义[2]之中。不幸的是，关于这个方法的大量手稿，都在十年浩劫中散失了。

从1982年开始，华罗庚教授在心肌梗塞发病、身体很虚弱的情况下，经过逐段回忆，逐段撰写，直至与我们永别前不久，才算最后完成了本书的撰写。值得提出的是，经过几年的努力，他不仅重新写出过去的全部发现，还增加了很重要的新内容，特别是本书的“基本定理”(见第二章§6)；即使对已有材料，也作了较大的简化。

当然，目前本书还仅是一个理论著作，还未经过实践。我们相信，在广泛实践的基础上，必将对这个理论作出很多必要的补充、修正与发展，这是需要以后的学者与实际工作者来共同努力完成的事情。

本书是华罗庚教授的学术遗著。这不仅是留给我们一部很好的学术著作，他为四化建设，为学术研究忘我的工作精神，尤其值得我们学习。

在华罗庚教授从事这一研究工作的过程中，曾得到他的助手与学生的帮助。他将所得到的结果，写成摘要陆续发表[3][4]。在本书的定稿与实例的搜集与计算中，裴定一与徐新红同志，参予了工作。

参考文献

〔1〕 华罗庚、王元：《有限与无穷，离散与连续》，《华罗庚科普著作选集》，上海教育出

版社1984年版。

〔2〕 华罗庚：《高等数学引论余篇》，第九章，科学出版社1984年版。

〔3〕 华罗庚：《计划经济大范围最优化的数学理论》，（Ⅰ）—（Ⅹ），《科学通报》1984年第12、13、16、18、21期，1985年第1、9期。

〔4〕 Loo-Keng Hua: On the mathematical theory of glofally optimal planned economic systems. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, V.81, No.20, Oct.(1984)

目　　录

他(马克思)还认为，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

——拉法格

序　言

序言是在书成之后写的，但总是放在书的前面。探索也往往如此，由简单开始，在实践中，在思考中不断深化，不断发展。新的概念和方法出现，旧的不断被扬弃或遗忘，因而思索与实践的宝贵过程反而淹没不见了，而书上、文章上所见到的是成熟的或作者自以为成熟的结论。

当然，我不是说体系完备、证明严正的书不必要，而是说读后往往要花很多的

时间和精力，才能领会这些结果是怎样得来的，作者为什么如此表达的，等等。

这里写出来的早已不是六十年代开始写的散失已久的原稿，这二十年来搞理论研究的同时，又添上用数学方法为国民经济服务的工作，其繁乱可想见也。就是八十年代重写的草稿也已五、六遍了，虽然规模粗具，但觉得有不少不足处。

在两次大病之后，更深深感到，学识不足，精力不济，还有时不等我之感。因此迫不及待地写出这本书来，只要将来可能用得上，对人民有好处，或给后之来者作垫脚石，作为扶栏，因此更上一层楼，于愿足矣。

这可能是最后一次跨出专业的尝试，也可能是最大的失败。且不管这些，努力跑完人生应该跑的最后一段路，吾之愿

也。

我的感谢是说不尽的，二十七省市及成千工厂、农场上所见到的数至万计的管理者、工程师、技术员、工人和农民，不是他们我是不会想到经济领域中的问题的。

其次，我在1982年10月，因为心肌梗塞住了医院，他们一方面向有关方面发了病危的信号，另一方面急心医治，并在我脱险后，立刻对我说，你是一个大脑停不住活动的人，如果叫你不要想，你会想得更多更杂，还不如在专人及监护仪的观察下，继续专心考虑你认为对人民有益的问题。但你要知道你的病是不轻的，和医护人员合作，不要过分用脑。三个月谢绝探视，出院时居然已想出一个轮廓来了。

中央号召对“文化大革命”的否定要彻底，这本书就是一个明显的例子。对我来

说，使这一工作耽误了二十年。如果手稿不被盗走抄走，我重新一一想出本书内容的两年，也就可以为国家多做些其他的工作了。往者不可谏，来者可追，愿和年轻同志团结一致，共同为四化而献身。

作　者

一九八五年

第一章 经济系统

§1 引 言

在《回忆马克思恩格斯》第一册中，拉法格[1]写道："他（马克思）还认为，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。"

苏联涅姆钦诺夫院士[2]指出："在这方面，经济科学不能有任何例外。"这句话无疑是正确的。他还将经济学与天文学进行比较来论述他的看法。他说："天文学是最精密的科学，尽管在开始宇宙航行之前它还没有一点可能性来检验自己假设的正确性和直接在星际空间进行试验。天文学之所以成为精密科学，是由于数学方

法在加工天体运行的观察时的应用。经济学成为精密科学的可能性更大些，因为它的对象处于日常的业务观察和统计观察之下。”〔2〕

对这一比较，虽然会有不同的看法，例如，时至今日，天文学毕竟比经济学更早地成为精密的科学了。事实上，早在星际航行之前，天文学家早就先算出了海王星的存在及其轨道和位置，然后才发现海王星——因此人们羡称之为“铅笔尖上的行星”。而星际航行的试验，是在发现海王星、冥王星之后的又一个验证。经济学能否有这样的预见？

虽然如此，我们且撇开不谈究竟哪个“可能性”更大些的无谓争论。我们也认为阐明马克思的论断的正确性是我们的职责。我们尝试着把数学方法更有效地用到

经济领域中去。从1960年前后开始，在实际中，从理论上看到了数学方法真正用在经济领域中的可能性，写了不少手稿，但在十年浩劫中荡然无存。

在党的十二大的号召下，深知这方面研究的重要性。因此，竭尽精力地回忆，忘年奋勇地创造，写出了这个小册子，作为阐明马克思论点的一个开端。抛砖引玉，如此而已。至于马克思著作的其他指导思想的作用，将在书文中逐步指出。

§2 产 综

社会中的经济结构是复杂的。有各种各样的产品，各种各样的劳务，其间有错综复杂的关系，怎样处理之？人类文明很早就发明了货币制度，而且一直延续到今天。把以吨计的钢铁，以千瓦小时计的电

力，以立方米计的天然气，以吨公里计的运输量，以台数计的机器设备（例如多少标准台的拖拉机），甚至各种劳务、教育、科学研究、文化费用，分别用同一的货币数量来表示，各种产品以同一的货币单位（如人民币元）来进行等价交换。

也正因为有了币制，生产、消费等一切社会经济活动便都可以用同一个单位来计算。甚至于整个社会的总财富、每年的生产总值都可以用统一的单位——货币来表示，来衡量社会生产的消长和变化。

在历史上，货币起过很大的作用，并且在相当长的时间内还将起着作用。但货币毕竟是货币，而不是实物与劳务，不能正确反映不同物品的价格订得是否得当，是否合理，各种劳务所产生的经济效果怎样计算，等等。加之通货的膨胀和紧缩，

还有因为各种原因不得不有人为的补贴、税率等等，使得同一种物品可能有几种不同的价格，如不变价格、调拨价格、自由市场价格、国际市场价格，资本主义制度还有竞争价格或垄断价格等等。所以，一方面要承认货币的重要性，另一方面也要看到货币制度所产生的缺点和不可依赖的一面。

数学方法在于从若干简单的基本概念或几个基本假设入手，运用逻辑推理，得出结论，然后在实际中验证它的正确性。如果结论不正确，又可以反过来检查出基本假设或概念的不足处，把原定的假设和概念进行局部修改，甚至全部推倒重来。

现在，我们引进一个简单的概念——产综。

人们通常遇到的是一种产品的变化，

而实际上，在社会上各种产品是互相关联、互相制约地发生变化的，而不是各不相关变化的。由此引起如下的概念：

把组成社会生产的多种重要产品或劳务按号码排列起来，如1，2，…，i，…，n，其中第i种产品的计量单位以p_i表示之，例如，第i种产品是钢，则p_i就是吨；若第i种产品是电，p_i就是千瓦小时；如果第i种产品是布，则p_i就是尺、码或米。

如果第i种产品的数量是x_i个p_i单位，则整体可以用矢量

$$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$$

表示之。这个矢量便称为产综。整个国民经济的变化便是产综的变化——整体的变化，而不是各种产品产量互相独立的变化。

例如，开始生产时的产综是

$$\mathbf{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$$

第 j 年的产综是 $\mathbf{x}^{(j)}$，于是整个经济的发展变化是

$$\mathbf{x}^{(0)}\to\mathbf{x}^{(1)}\to\cdots\to\mathbf{x}^{(j)}\to\cdots$$

研究经济的变化发展就该研究产综的变化情况。各产品按同一比例增加，用数学式子表示就是

$$\mathbf{x}^{(j)}=\rho_j\mathbf{x}^{(0)}$$

即

$$x_k^{(j)}=\rho_j x_k^{(0)}\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

成倍增长则可以表成为

$$\rho_j=\sigma^j$$

σ 是逐年的增长倍数。

§3 消耗系数方阵（或称结构方阵）

设初始产综是 $\mathbf{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，第一年度将 j 类产品分配给 i 类的数量（用于再生产或其他目的）设为 $x_{ij}^{(0)}$，于是整

个分配情况可以通过下面的表格来表示（见表1-1）。

表1-1

$i \backslash j$	1	2	…	j	…	n
1	$x_{11}^{(0)}$	$x_{12}^{(0)}$	…	$x_{1j}^{(0)}$	…	$x_{1n}^{(0)}$
2	$x_{21}^{(0)}$	$x_{22}^{(0)}$	…	$x_{2j}^{(0)}$	…	$x_{2n}^{(0)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$x_{i1}^{(0)}$	$x_{i2}^{(0)}$	…	$x_{ij}^{(0)}$	…	$x_{in}^{(0)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$x_{n1}^{(0)}$	$x_{n2}^{(0)}$	…	$x_{nj}^{(0)}$	…	$x_{nn}^{(0)}$
总产量	$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	…	$x_j^{(0)}$	…	$x_n^{(0)}$

因此得到

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{(0)} \qquad (1.3.1)$$

用产综的矢量形式来表示，就是

$$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}^{(0)}(i)$$

这里，$\mathbf{x}^{(0)}(i)$ 表示分配给第 i 类的产综。

一年（或其他单位时间）后所生产出的产综是

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})$$

命

$$a_{ij}^{(0)}=x_{ij}^{(0)}/x_i^{(1)} \qquad (1.3.2)$$

它的意思是，每生产一个 p_i 单位的 i 类产品要消耗掉 $a_{ij}^{(0)}$ 个单位的第 j 类产品，其计量单位为 p_j/p_i。

以（1.3.2）代入（1.3.1）得到

$$x_j^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(0)}x_i^{(1)}$$

或写成矩阵形式就是

$$X^{(0)}=X^{(1)}A$$

或

$$X^{(1)}=X^{(0)}A^{-1}$$

这里

$$A=(a_{ij}^{(0)}) \qquad (1\leqslant i,j\leqslant n)$$

即为第一年度的消耗系数方阵或结构方

阵。

如果消耗系数方阵A不因年份而变，那末连续施行l次，便得到第l年的产综

$$x^{(l)} = x^{(0)} A^{-l}$$

§4　两大部类

也许有人认为，“你所讨论的数学模型是片面的，既没有考虑到外界投入的产量，又没有考虑到消费，而把所生产出来的全部都投入了再生产。”这个批评是对的，但这正是关键所在。

马克思在他的不朽名著《资本论》中，早就指出了社会的总生产分为两大部类。第一部类是生产资料的生产，第二部类是消费资料的生产。后来，凯恩斯也在全部生产支出中把用于消费的支出和用于生产的投资分开。

列昂惕夫创造性地提出了投入产出法是一个重要贡献，但他把性质不同的两类型产品合在一个表上，算出消耗系数表，因而导致混淆。因此，涅姆钦诺夫认为："整个生产过程的最优化，是很复杂的问题，为了解决这种最优任务暂时还没有创立相应的数学方法，……对大范围的经济行为进行数学描述，大概只有在不远的将来才有可能。"

实质上，按照矛盾论的思想，"不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。"在出现了矛盾之后，首先要分主要的和次要的。当然在经济领域里，第一部类的产品是主要的，因为没有生产也就没有消费了。所以，我们首先研究只有第一部类的模型，于是引进了正特征矢量法。"抓住了这个主要矛盾，一切问题就迎刃而解了。"

这是我们先研究第一部类，而后再研究包括第二部类的思想方法的背景。

从数学角度来讲，非负方阵的核心是不可分拆的部分。如果笼统地研究非负方阵，不区别不可分拆与可分拆，则正特征矢量可能不存在，也可能有无穷个，这样混淆就难于处理了。而先弄清不可分拆的情况，可分拆的情况也就较易于处理了。在处理这个问题时，我们体会到哲学、经济学、数学间联系的重要性！当然，马克思主义的哲学思想是根本，数学仅是工具，是被利用到经济学上来的工具之一。从为数众多的投入产出法的资料也看到了生产资料部类所列出的消耗系数方阵一般是不可分拆的。而消费资料的生产、行政开支、国防费用、教育文化、输入输出往往都使结构方阵成为可分拆方阵。

§5 正特征矢量法

命 g 表示 A 的最大正特征根。在第二章定理 2.5 将证明对不可分拆的 A，对应于 g 有（除相差一比例正因子外）唯一的正元素矢量 **u**，使

$$\mathbf{u}A = g\mathbf{u}$$

同样，有唯一的正元素矢量 **v**（除一比例正因子外），使

$$A\mathbf{v}' = g\mathbf{v}'$$

这里，$\mathbf{v}'$ 表示 **v** 的转置列矢量。

如果 $\mathbf{x}^{(0)}$ 就是正元素特征矢量 **u**（可知对应于 g 的其他正元素特征矢量一定等于 $\alpha\mathbf{u}$，α 是一正数），那末由归纳法容易证明

$$\mathbf{x}^{(t)} = g^{-t}\mathbf{x}^{(0)}$$

这说明了，如果 $\mathbf{x}^{(0)}$ 是 A 的特征矢

量，也就是说，如果投入生产的产综各部分正好按正特征矢量各分量的比例安排，那末各部门的生产量都将以 $1/g$ 的倍数增长，并且可以证明，增长速度不可能超过 $1/g$，即在现阶段的生产情况下，如依 $\mathbf{u}$ 的比例组织安排生产，将会得到最高的增长速度。

在第二章定理2.9中，我们将证明，A 的任一元素 a_{ij} 的降低，只会使其对应的 g 降低，而不会使其增加。可见，如果采用正特征矢量为产综，任一消耗系数的降低，只会提高而不会降低生产的增长率。

不仅如此，数学上还有以下的定理。

基本定理　如果 A是一原方阵，且可逆；又如果 $\mathbf{x}$ 非 A的正特征矢量，则一定有一正整数 l_0 存在，当 $l \geqslant l_0$ 时

$$xA^{-1}=x^{(1)}$$

是一有不同号支量的矢量。

我们将在第二章§6中证明该定理（关于原方阵的定义见第二章§5)。该定理的经济意义是：如果 $x^{(0)}$ 与 u 不成比例，经过相当一段时间后，生产情况一定会失去平衡，最后出现危机。为使读者易懂，我们还是先用一个例子来说明一下。

§6 例

我们且不谈一般的 n，而取 n＝2。如果 $\bar{x}$ 与 u 不成比例，我们将说明一定会出现危机。假定农业的标号是1，制造业的标号是2。

我们以农业产量是45个单位，制造业产量是20个单位开始，即 $x^{(0)}=(45,20)$。

消耗系数方阵为

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{pmatrix}$$

容易算得它的逆方阵为

$$A^{-1}=\frac{5}{13}\begin{pmatrix}-12 & 14\\ 40 & -25\end{pmatrix}$$

A 的唯一（除相差一比例正因子外）正元素特征矢量为

$$u=\left(\frac{5}{7}(\sqrt{2,409}+13),20\right)=(44.34397483,20)$$

如果取初始产综为 $x^{(0)}=(45,20)$，由表1-2可见，$x^{(3)}=(-532.5,\ 1,102.1)$，

表1-2

	农产品	制造业产品	生产增长倍数	
			农　业	制造业
原　来	45	20	—	—
第1年	100	50	2.2	2.5
第2年	307.7	57.7	3.03	1.15
第3年	-532.5	1,102.1	出现负值，无法生产下去	

也就是说，到第3年就出现了负号。这是绝对不允许出现的现象。这个例子说明，第1年还好，第2年比例失调，第3年生产不下去了。农业出现负值时，表示在第3年某一时刻，农业原料消耗光了。现在，取 $x^{(0)}$ 为精确到三位小数的 u，也即

$$x^{(0)} = (44.344,\ 20)$$

由表1-3可见，到前四年都有稳定的生产增长率，即2.32倍，第5年开始失去平衡，第8年垮了。

表1-3

	农产品	制造业产品	农产品增长倍数	制造业产品增长倍数
原来	44.344	20	—	—
1 年	103.02	46.466	2.323	2.323
2 年	239.37	107.95	2.323	2.323
3 年	556.11	250.86	2.323	2.323
4 年	1,292.80	582.24	2.324	2.320

续表

	农产品	制造业产品	农产品增长倍数	制造业产品增长倍数
5 年	2,990.60	1,362.90	2.313	2.340
6 年	7,165.50	2,998.20	2.395	2.199
7 年	13,054	9,754.70	1.821	3.253
8 年	8,9821	-23,501	出现负值，无法生产下去	

为了更精确地表述，取 $x^{(0)}$ 为到八位小数的 u，即

$$x^{(0)}=(44.34397483,\ 20)$$

则由表1-4可见，前八年的生产有稳定的增长率2.323，而负号在第13年时出现。值得指出的是：命 $\alpha=44.34397483$，则负号在 $x^{(13)}$ 中出现，但如果用 $\alpha\pm10^{-8}$ 来代替，那末在 $x^{(12)}$ 中就出负号。

从上述我们看到，农产品从45单位改为44.344单位，即抛弃了0.656个单位，能使生产情况转好，这是一个处理方法。资

表1-4

	农业产品	制造业产品	农业产品增长倍数	制造业产品增长倍数
原来	44.34397483	20	—	—
1年	103.0278084	46.46755677	2.323377840	2.3233777838
2年	239.3725266	107.9616920	2.323377835	2.323377847
3年	556.1528311	250.8357971	2.323377870	2.3233779787
4年	1,292.153043	582.7864257	2.323377624	2.3233778211
5年	3,002.161733	1,354.031525	2.323379376	2.323375195
6年	6,975.123164	3,145.952354	2.323366888	2.323396682
7年	16,206.39085	7,308.813628	2.323455868	2.323243585
8年	37,644.55958	16,988.12738	2.322821899	2.324334461
9年	87,611.68481	39,354.09595	2.327330880	2.316564684
10年	201,086.0079	93,350.45708	2.295196221	2.372064579
11年	508,071.6108	185,170.2630	2.526638308	1.983603174
12年	503,827.3809	955,286.9140	0.9916463942	5.158965043
13年	12,371,364.61	-6,472,534.430	出现负值，无法生产下去	

本主义经常用这个办法来处理生产过剩或保证市场价格稳定。这是消极的。我们能否有其他办法来解决这一问题？有的！例如，我们可以利用对外贸易，出口α个单位农产品，进口β个单位制造业产品，使

$$(45-\alpha):(20+\beta)=2.2172:1$$

即

$$2.2172(20+\beta)=45-\alpha$$

假定每一单位农产品的国际市场价格是q_1，制造业品是q_2，为了保持收支平衡，则

$$\alpha q_1=\beta q_2$$

由此联立方程解出α，β，这样既可以使生产处于正元素特征矢量状态，又可以保证收支平衡。

当然，其他处理的方法一定还有。

§7 成 本

各类产品的价格如何决定？当然有人会立刻回答，取决于市场需要，特别是我们不能离开国际市场的正当和不正当的（指投机、倾销和垄断等）变化而独立。

其中包括人对人、智囊团对智囊团的勾心斗角，任凭你挖空心思寻得妙着，但诚恐还有高手在想到了你之所想，提出了更高明的对策。对此事，我们何能多说。

好在我们是社会主义国家，资源丰富，以自力更生为主的国家，外部影响可能小些（但决不能低估）。我们就事论事，就现在所提的系统中，论述这些知识。

首先说明运用正特征矢量的一个优点。不管你用什么价值，而生产发展的总产值都是$1/q$倍。其证明如次：

假定第 i 类产品每一p_i单位的价格是q_i，命

$$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

代表价值矢量，则产综$x^{(0)}$的总产值等于

$$x^{(0)}q'$$

由于

$$x^{(1)} = x^{(0)} A^{-1}$$

所以下年度的总产值等于

$$x^{(1)}q' = x^{(0)}A^{-1}q'$$

如果 $x^{(0)}$ 是正特征矢量，则

$$x^{(1)}q' = g^{-1}x^{(0)}q'$$

由此可知，只要 $x^{(0)}$ 是正特征矢量，不管价值矢量如何取，总产值总是增加$1/g$倍。

照这样说来，是否价格可以任意取了，当然不是的，依靠成本会有一个自然的价格。（注：这里所说的成本是在以上所讨论的数学模型的前提下所确定的成本，但在实际问题中，可能还有一些因素，例如企业的利税等，并没有全部考虑进去。）

现命第 i 类产品每一 p_i 单位的价格是 q_i，则由于每一 p_i 单位第 i 类产品需要消耗 a_{ij} 单位的 j 类产品，因此每一 p_i 单位产品的成本是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_j$$

假定产品价格是按比例变化的，则得

$$\lambda g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_j$$

因此

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \lambda = A \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

即 g 是 A 的右正特征矢量。由于 A 只有一个右正特征矢量，因此价格的比也就是唯一的 $g_1:g_2:\cdots:g_n$，而 λ 是 A 的最大特征根 g，即成本下降 g 倍，这也是我们直观所料到的事。

如此，不可分拆方阵的一些重要概念：最大特征根、左正特征矢量、右正特征矢量都有了经济学上的意义。

§8 每一部门按比例增长的情况

为了简便起见，我们在上面假定了每一部门的增长率都是同一倍数。在一个社会中，经常会有一些新的生产部门出现了，而一些旧的生产部门消失了，故一定要引进更广泛的模型。我们用符号 $y^{(l)}$ $(l=1,2,\cdots,n)$ 代替 $x^{(0)}$，假定

$$\frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(0)}}=\lambda_1\rho,\cdots,\ \frac{y_n^{(1)}}{y_n^{(0)}}=\lambda_n\rho \qquad (1.8.1)$$

这里，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\rho$ 都是正数，由于齐次性我们不妨假定

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n}=1$$

命 Λ 表示对角线方阵 $[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$，则 (1.8.1) 式可以写成为

$$y^{(1)}=\rho\, y^{(0)}\Lambda$$

另一方面 $y^{(1)}=y^{(0)}A^{-1}$，因此得

$$y^{(0)}=\rho y^{(0)}\Lambda A$$

这里，$y^{(0)}$是ΛA的正特征矢量，其对应特征值是$1/\rho$。因此，这一推广只不过把原来的A换为ΛA而已。

命g_1是ΛA的最大的正特征根，则每一部门的变化规律是(1.8.1)中的$\rho=1/g$。

参考文献

〔1〕《摩尔和将军——回忆马克思恩格斯》，人民出版社1982年版，第95页。

〔2〕〔苏〕涅姆钦诺夫：《经济数学方法和模型》，商务印书馆1980年版，第13页。

第二章　正特征矢量法的数学理论

在这一章，我们讲述在上一章所提到的正特征矢量法的数学理论。对数学证明不感兴趣的读者，可以跳过本章，直接阅读后面各章。

§1　相通性

在本书中，如果不作特殊申明，我们常用大写拉丁字母 A,B,…… 表实数矩阵，而且以 $A=A^{(m,n)}$ 表 m 行 n 列的矩阵 (a_{ij}),$(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$。一行 n 列的矩阵称为 n 维行矢量，用重体小写拉丁字母 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，……表之，具体地写成为 $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$，实数 a_i 称为矢量 $\mathbf{a}$ 的第 i 个支量。m 行一

列的矩阵称为 m 维列矢量。

又以 A' 表示由 A 行列转置的方阵 (a_{ji})，$(1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$；$a'$ 是列矢量。

以符号 $A\geqslant 0$ 表示 A 的所有元素都大于或等于 0，及 $A>0$ 表示 A 的所有元素都是正数。显然，有以下的一些性质

由 $A\geqslant B$，$B\geqslant C$，得 $A\geqslant C$。由 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，则 $A+B\geqslant 0$，$AB\geqslant 0$，$BA\geqslant 0$

（如果 AB 及 BA 是有意义的话。）

特别当 $m=n$ 时，所有的非负方阵成一半环，对"加"、"乘"自封。本章所说的方阵将都是非负的。

定义 2.1　如果一方阵每一行只有一非零正数，每一列也只有一非零正数，这方阵称为广义置换方阵。这些方阵成一群，以 GP_n 表之。

这群有二子群。(i) 对角线方阵群 D_n 是

由对角线方阵

$$[\lambda_1,\cdots,\lambda_n], \quad \lambda_i>0\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

组成的。它在对角线之外的元素全为零，对角线上的元素从左到右依次为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。

(ii) 置换群P_n: GP_n中的方阵，其元素非零即1。

显然，P_n与D_n都是GP_n的正规子群，而且GP_n中任一元素可以唯一地表成为

$$DP, \quad D\in D_n, \quad P\in P_n$$

定理2.1若一非负方阵的逆也是非负的，则它一定是广义置换方阵。

证 若$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，由$AB=I$得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}=\delta_{ik}$$

则对所有的$i\neq k$及所有的j，有

$$a_{ij}b_{jk}=0$$

若$a_{ij}\neq 0$，则对所有$k\neq i$，有$b_{jk}=0$，即在第g行上只有一个元素$b_{ji}\neq 0$。定理得证。

定义2.2　命A，B是二非负方阵，若有广义置换方阵Q使

$$QAQ^{-1}=B$$

则A，B称为在群GP_n下相通。视之为$A\overset{GP}{\sim}B$。

同法可定义$A\overset{D}{\sim}B$与$A\overset{P}{\sim}B$。

这三类关系都有以下的性质：(i) $A\sim A$，(ii) 由$A\sim B$得$B\sim A$，(iii) 由$A\sim B$，$B\sim C$得$A\sim C$。

显然，若$A\sim B$，则由$A>0$推得$B>0$。

定义2.3　如果A在GP_n下相通于

$$B=\begin{pmatrix} A^{(k)} & 0 \\ A^{(n-k,k)} & C^{(n-k)} \end{pmatrix}$$

则A称为可分拆，不然称为不可分拆（实质上，不一定需要$A\overset{GP}{\sim}B$，而用$A\overset{P}{\sim}B$就够

了）。

若A是可分拆，则

$$\overset{P}{\sim}\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ 0 & C_1\end{pmatrix}$$

其理由是

$$\begin{pmatrix}0 & I^{(k)}\\ I^{(n-k)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ 0 & C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I^{(n-k)}\\ I^{(k)} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ B_1 & A_1\end{pmatrix}$$

由此，一个不可分拆方阵的转置方阵也是不可分拆的。

又若 A>0，则 A 是不可分拆的。

§2 标准型

定义2.4 一个不可分拆方阵 $A=(a_{ij})$ 适合于

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=g \quad (1\leqslant j\leqslant n)$$