

2023—2024 学年第一学期第二次阶段考试

高一数学试题卷

一、单选题（每题 5 分，共 40 分）

1. 集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【解析】

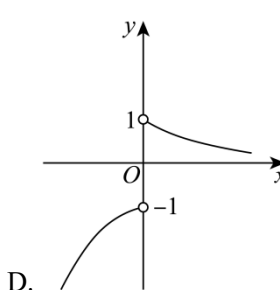
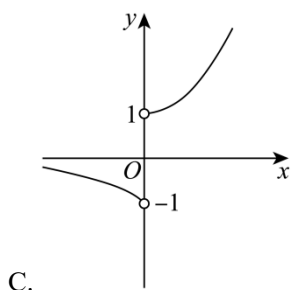
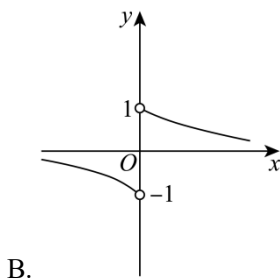
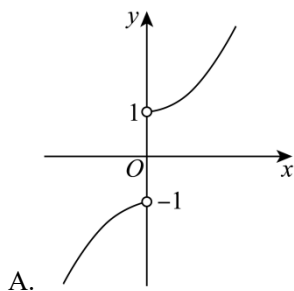
【分析】解不等式 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$, 求出集合 A, 再根据交集的运算性质, 即可解题.

【详解】解不等式 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ 可得 $-1 \leq x \leq 4$, 所以 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 4\}$,

又 $B = \{0, 2, 4, 6\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$, 所以 $A \cap B$ 中元素的个数为 3 个.

故选: B

2. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$ 的图象的大致形状是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】分类讨论 $x > 0$ 与 $x < 0$, 结合指数函数的单调性即可得解.

【详解】因为 $y = f(x) = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{xa^x}{x} = a^x$, 由于 $a > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 排除 BD;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{xa^x}{-x} = -a^x$, 由于 $a > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 排除 A;

而 C 选项满足上述性质, 故 C 正确.

故选: C.

$$a = 2^{-\frac{1}{3}}, b = \log_2 \frac{1}{3}, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$$

3. 已知

A. $a > b > c$

B. $c > a > b$

C. $c > b > a$

D. $a > c > b$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数与对数函数的性质结合中间值 0 和 1 比较后可得.

【详解】由 $0 < a = 2^{-\frac{1}{3}} < 2^0 = 1$,

$$b = \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 1 = 0,$$

$$c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1,$$

所以 $c > a > b$.

故选: B.

4. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+2)+1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像恒过点 P , 若点 P 是角 θ 终边上的一点, 则 $\sin \theta =$ ()

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对数型函数过定点求得 P , 利用三角函数的定义求解即可.

【详解】解: $\because f(-1) = \log_a(-1+2)+1 = 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_a(x+2)+1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像恒过点 $P(-1, 1)$,

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
∴由三角函数定义得

故选：D

5. 若函数 $f(x) = \ln(x^2 - ax + 1)$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 6]$ B. $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{10}{3}, 6\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复合函数单调性之间的关系进行求解即可.

【详解】设 $g(x) = x^2 - ax + 1$,

则要使 $f(x) = \ln(x^2 - ax + 1)$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

由复合函数单调性可得:

$$\text{满足 } \begin{cases} -\frac{-a}{2} = \frac{a}{2} \leq 3 \\ g(3) = 10 - 3a > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a \leq 6 \\ a < \frac{10}{3} \end{cases},$$

$$\text{得 } a < \frac{10}{3},$$

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$.

故选：D

6. 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(2, 3)$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
C. $(-3, -2)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次不等式与对应方程的关系，利用根与系数的关系，求出 b 、 c 与 a 的关系，代入所求不等式，求出解集即可.

【详解】一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(2, 3)$,

$\therefore a < 0$, 且 2, 3 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore \begin{cases} 2+3 = -\frac{b}{a} \\ 2 \times 3 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{解得 } b = -5a, c = 6a, \text{ 其中 } a < 0;$$

$\therefore$ 不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 化为 $6ax^2 - 5ax + a < 0$, 即 $6x^2 - 5x + 1 > 0$,

解得 $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > \frac{1}{2}$, 因此所求不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

故选: D.

7. 中国的 5G 技术领先世界, 5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式 $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$, 它表示在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递速率 C 取决于信通带宽 W 、信道内信号的平均功率 S 、信道内部的高斯

噪声功率 N 的大小, 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 当信噪比较大时, 公式中真数中的 1 可以忽略不计, 按照香农

公式, 由于技术提升, 带宽 W 在原来的基础上增加 20%, 信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 1000 提升至 4000, 则 C 大约增加了 () (附: $\lg 5 \approx 0.6990$)

A. 22%

B. 33%

C. 44%

D. 55%

【答案】C

【解析】

【分析】根据题中所给公式, 利用代入法, 结合对数的运算公式和换底公式进行即可.

【详解】由题意可知: C 大约增加了

$$\frac{120\%W \log_2 4000 - W \log_2 1000}{W \log_2 1000} = \frac{1.2 \log_2 4000}{\log_2 1000} - 1 = 1.2 \log_{1000} 4000 - 1 = 0.4 \lg 4000 - 1$$

$$= 0.4(3 + 2 \lg 2) - 1 = 0.2 + 0.8(1 - \lg 5) \approx 0.4408,$$

故选: C

8. 设函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a < 0$) 的定义域为 D , 若所在点 $(s, f(t))$ ($s, t \in D$) 构成一个正方形区域, 则 $a =$ ()

A. -4

B. -5

C. -6

D. -8

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，求出 $f(x)$ 的定义域和值域，根据构成一个正方形区域，列出等式关系，求出 a 的值.

【详解】因为 $ax^2 + bx + c$ 的值域为 $\left[-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$,

所以 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的值域为 $\left[0, \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}}\right]$.

设 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根是 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则定义域 $D = [x_1, x_2]$.

而点 $(s, f(t))$ ， $(s, t \in D)$ 构成一个正方形区域，

于是 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a}$, $a^2 + 4a = 0$, $a = -4$.

故选：A.

二、多选题（每题 5 分，全选对 5 分部分选对得 2 分，有选错不得分，共 20 分）

9. 下列命题为真命题的是（ ）

A. 若 $a > b > 0$ ，则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $a < b < 0$ ，则 $a^2 > ab > b^2$

C. 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$ ，则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$

D. 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，则 $ab < 0$

【答案】BCD

【解析】

【分析】取 $c = 0$ 可判断 A 选项；利用不等式的基本性质可判断 BC 选项；利用作差法可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，当 $c = 0$ 时， $ac^2 = bc^2$ ，A 错；

对于 B 选项，若 $a < b < 0$ ，由不等式的性质可得 $a^2 > ab$ ， $ab > b^2$ ，则 $a^2 > ab > b^2$ ，B 对；

对于 C 选项，若 $a > b > 0$ ，则 $a^2 > b^2 > 0$ ，则 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ ，

又因为 $c < 0$ ，由不等式的性质可得 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$ ，C 对；

对于 D 选项, 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} < 0$, 所以, $ab < 0$, D 对.

故选: BCD.

10. 下列命题中为真命题的是 ()

A. 函数 $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$ 与 $g(x) = x^2-1$ 为同一个函数

B. 若函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4$ 有两零点, 一个大于 2, 另一个小于 -1, 则 a 的取值范围是 $(0, 3)$

C. 不等式 $\frac{x+1}{(x-1)^2} > 1$ 的解集为 $[0, 3]$

D. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 则 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

【答案】ABD

【解析】

【分析】由函数的三要素判断 A; 由二次函数根的分布判断 B; 由一元二次不等式的解法判断 C; 由抽象函数的定义域判断 D.

【详解】解: 对于 A, 由题意可知 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$,

且 $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2-1 = g(x)$, 所以 $f(x)$, $g(x)$ 为同一函数, 故正确;

对于 B, 由题意可得 $\begin{cases} f(-1) = 3-a > 0 \\ f(2) = 2a > 0 \\ \Delta = a^2 + 16 > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < 3$, 故正确;

对于 C, 由题意可知 $x \neq 1$, 所以 $\frac{x+1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow x+1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x < 0$, 解得 $0 < x < 3$ 且 $x \neq 1$,

所以不等式 $\frac{x+1}{(x-1)^2} > 1$ 的解集为 $(0, 1) \cup (1, 3)$, 故错误;

对于 D, 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 由 $-2 \leq 2x-1 \leq 2$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$,

所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 故正确.

故选: ABD.

11. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x \in \mathbf{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则

$y = [x]$ 称为高斯函数，例如： $[-3.5] = -4$ ， $[2.1] = 2$ ．已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$ ，则关于函数

$g(x) = [f(x)]$ 的叙述中正确的是 ()

A. $g(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

D. $g(x)$ 的值域是 $\{-1, 0, 1\}$

【答案】BC

【解析】

【分析】计算出 $g(1)$ 和 $g(-1)$ 的值后结合奇偶性定义可判断 A，由奇偶性定义判断 B，由复合函数的单调性判断 C，确定出 $f(x)$ 的取值范围后得出 $g(x)$ 的值域判断 D.

【详解】根据题意知， $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x}$ ．

$$\therefore g(1) = [f(1)] = \left[\frac{e}{1+e} - \frac{1}{2} \right] = 0,$$

$$g(-1) = [f(-1)] = \left[\frac{1}{e+1} - \frac{1}{2} \right] = -1,$$

$$\therefore g(1) \neq g(-1), g(1) \neq -g(-1),$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，A 错误；

$$\therefore f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数，B 正确；

$\therefore y = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，由复合函数的单调性知 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，C 正确；

$$\therefore e^x > 0, \therefore 1+e^x > 1, 0 < \frac{1}{1+e^x} < 1, -1 < -\frac{1}{1+e^x} < 0,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2},$$

$\therefore g(x) = [f(x)] = \{-1, 0\}$, D 错误.

故选: BC.

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(1+x) = -f(1-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

$f(x) = x^2 + x - 2$, 则下列结论错误的是 ()

A. $f(x) = f(x+2)$

B. $f(2021) + f(2022) = -2$

C. 函数 $y = f(x) - \log_2(x+1)$ 有 3 个零点

D. 当 $x \in [3, 4]$ 时, $f(x) = x^2 - 9x + 18$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据函数对称性和奇偶性, 可得 $f(x)$ 的周期, 即可判断 A 的正误, 根据 $f(x)$ 解析式及周期, 代入数据, 可判断 B 的正误; 分别作出 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = f(x)$ 的图像, 即可判断 C 的正误; 根据函数周期及奇偶性, 化简整理, 可判断 D 的正误, 即可得答案.

【详解】因为当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 + x - 2$, 则 $f(0) = -2$,

因为 $f(1+x) = -f(1-x)$, 所以 $f(2) = -f(0) = 2$,

则 $f(2) \neq f(0)$, 所以 $f(x) = f(x+2)$ 不成立, 故 A 错误;

又函数 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{所以 } f(x+4) = f(1+x+3) = -f(1-(x+3)) = -f(-2-x) = -f(-(2+x))$$

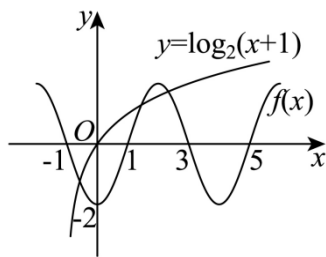
$$= -f(2+x) = -f(1+1+x) = f(1-(1+x)) = f(-x) = f(x),$$

故 $f(x)$ 的周期为 4, 由函数 $f(x)$ 的周期为 4, 则 $f(2021) = f(1) = 0$, $f(2022) = f(2) = 2$,

所以 $f(2021) + f(2022) = 2$, 故选项 B 错误;

令 $y = f(x) - \log_2(x+1) = 0$ 可得 $f(x) = \log_2(x+1)$,

作出函数 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = f(x)$ 的图像如下图所示,



由图可知，两个函数图像有 3 个交点，故选项 C 正确；

当 $x \in [3, 4]$ 时， $4-x \in [0, 1]$ ，则 $f(x) = f(-x) = f(4-x) = (4-x)^2 + (4-x) - 2 = x^2 - 9x + 18$ ，

故选项 D 正确，

故选：AB.

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. 已知扇形的弧长为 6，圆心角弧度数为 3，则其面积为_____；

【答案】6

【解析】

【分析】

根据扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\alpha r^2$ 求解即可.

【详解】扇形的弧长为 6，圆心角弧度数为 3，

则扇形的半径 $r = \frac{6}{3} = 2$ ，

所以该扇形的面积 $S = \frac{1}{2}lr = 6$.

故答案为：6

【点睛】此题考查求扇形的面积，根据圆心角、半径、弧长的关系求解.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + \frac{4}{x}$ ，则 $f(x)$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先利用方程组法求出函数的解析式，再根据基本不等式即可得出.

【详解】因为 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + \frac{4}{x}$ ，所以 $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 4x + \frac{5}{x}$

两式联立得 $f(x) = \frac{2}{x} + x$ 得 $f(x) = \frac{2}{x} + x \geq 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2}{x} = x (x > 0)$, 即 $x = \sqrt{2}$ 时取等号. 所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$

15. 方程 $9^x + (3+a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -7]$

【解析】

【分析】 根据题意, 令 $3^x = t (t > 0)$, 得 $a = \left(t + \frac{4}{t} + 3\right)$, 利用基本不等式即可求解.

【详解】 方程 $9^x + (3+a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解等价于方程 $a = \frac{-4-9^x}{3^x} - 3$ 有解.

令 $3^x = t (t > 0)$, 则 $a = \frac{-4-t^2}{t} - 3 = -\left(t + \frac{4}{t} + 3\right)$.

因为 $t + \frac{4}{t} \geq 4$, 所以 $a \leq -7$, 当且仅当 $t = 2$, 即 $x = \log_3 2$ 时等号成立.

故 $a \leq -7$ 时, 方程 $9^x + (3+a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解.

故答案为: $(-\infty, -7]$.

16. 已知实数 a, b 满足 $2^{a-2} + a = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}b^2 + \log_2 b = -\frac{3}{4}$, 则 $\frac{2^a}{b^2} =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 构造同源函数, 根据函数的单调性可得 $a-2 = \log_2 b^2$, 即可得解.

【详解】 由 $\frac{1}{2}b^2 + \log_2 b = -\frac{3}{4}$, 得 $b^2 + 2\log_2 b = -\frac{3}{2}$,

即 $b^2 + \log_2 b^2 + \frac{3}{2} = 0$, 即 $2^{\log_2 b^2} + \log_2 b^2 + \frac{3}{2} = 0$

又 $2^{a-2} + a = \frac{1}{2}$, 即 $2^{a-2} + (a-2) + \frac{3}{2} = 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/198016031014006142>