20180117

199 概念篇——整数

1. 0 是自然数，最小的自然数是 0；1 既不是质数，也不是合数；

2. 偶数：2n；奇数 2n+1 或 2n-1，其中 n 属于整数；

3. 奇数与偶数：相邻两整数必有一奇一偶，在一个加（减）算式中，判断其结果的奇偶性，只取决于奇数的个数（奇数个奇数为奇，其余均为偶）

4.奇数的正整数次幂是奇数，偶数的正整数次幂是偶数；

5. 最小的质数是 2，（20 以内的质数有：2、3、5、7、11、13、17、19）；

6. 最小的合数是 4，（20 以内的合数有：4、6、8、9、10、12、14、15、16、18、20）；

7.公倍数和公约数：对于两个整数，两数之积等于最小公倍数乘以最大公约数

8. 因式定理：如果多项式 f(a)=0，那么多项式 f(x)必定含有因式 x-a。反过来，多项式 f(x)含有因式 x-a，则立即推 f(a)=0；可以进一步理解，当因式为 0 时，原表达式也为 0。

乘法公式与因式分解：

1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

2）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

3）$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

4）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

5）$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

能被 2 整除的数：个位为 0、2、4、6、8

能被 3 整除的数：各数位数字之和必能被 3 整除；

能被 5 整除的数：个位为 0 或 5

能被 9 整除的数：各数位数字之和必能被 9 整除

199 习题篇 20180117 答案

1. 已知 $3a^2+2a+5$ 是一个偶数，那么整数 a 一定是（ ）

A. 奇数 B.偶数 C.任意数 D.0 E.质数

【解析】因为 2a 是偶数，所以 $3a^2+5$ 也是偶数，所以 $3a^2$ 是奇数，a 一定是奇数。

【考点】奇数和偶数的概念和计算

2. 2，5，7，11 都是质数，如果把其中的三个数相乘，再减去第四个数，这样得到的数中，是质数的个数为（ ）

A.1　B.2　C.3　D.4　E.0

【解析】列举法进行依次计算即可。

$2\times5\times7-11=59$

$2\times7\times11-5=149$

$2\times5\times11-7=103$

$5\times7\times11-2=383$

所得结果均为质数

【考点】质数的概念

3. 已知两个自然数的和是 50，它们的最大公约数是 5，这两个自然数的乘积一定是（ ）

A.9 的倍数　B.7 的倍数　C.45 的倍数　D.75 的倍数　E.18 的倍数

【解析】设两个自然数分别为 a,b 且 a<b，又因为二者的最大公约数是 5，故可以令

$a=5a_1$　$b=5b_1$，由题干可得 $5a_1+5b_1=50$. 故 $a_1+b_1=10$，结合 a,b 的最大公约数为 5，可知，$a_1$ 和 $b_1$ 二者是互质的，所以取值有两组，1 和 9, 3 和 7。经计算，可得，ab 的乘积一定是 75 的倍数。

【考点】已知最大公约数，以及两数之和，反求两个数字。

20180118

199 概念篇——分数、小数、百分数、比例

1. 实数是与数轴上的点一一对应的；

2. 实数加、减、乘、除四则运算符合加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律；

3. 形如 x=[x]+{x}，即称[x]为实数 x 的整数部分，{x}为实数 x 的小数部分。如：2.5 的整数部分为 2，小数部分为 0.5；

4. 整数和分数统称为有理数；有理数和无理数的本质区别：任何一个有理数都可以写成分数的形式；有理数又被称为有限小数和无限循环小数；

5.算术平均值：就是 n 个数相加的和除以 n 所得的值；

6.几何平均值：n 个数相乘开 n 次方所得的值；

7.当算术平均值与几何平均值相等的时候，且这 n 个数为正数时，则这 n 个正数相等；

8. 平均值定理：乘积为定值，和有最小值；和为定值，成绩有最大值；当这几个数相等时，取到最值；

9.比例的性质

等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f\neq0)$

合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}\overset{m=1}{=\!=\!=}\frac{a\pm c}{b\pm d}$

11. 正比关系：

$y=kx(k\neq 0,k\text{为常数})$，即$y$与$x$成正比，$k$为比例系数

12. 反比关系：

$y=k/x(k\neq 0,k\text{为常数})$，即$y$与$x$成反比，$k$为比例系数

199 习题篇：

1. $x,y$ 的算术平均数是 4，几何平均数也是 4，则 $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$ 的值是（ ）

$A.2\ B.\sqrt{2}\ C.\frac{\sqrt{2}}{3}\ D.1\ E.4$

【解析】根据平均值的性质，只有当两个数相等的情况下，几何平均数和算术平均数的值才是相等的，所以 $x=y=4$，得到答案为 1，选 D。

【考点】平均值的性质

2. $a,b,c,d$ 都是有理数，且 $d$ 不为零，$x$ 是无理数，则 $s=\frac{ax+b}{cx+d}$ 为有理数。

（1） $a=0$

（2） $c=0$

【解析】条件（1）和（2）单独均不充分，联合，得到两个有理数相除还是有理数。答案选 C，即单独均不充分，联合充分。

【考点】有理数

3. 若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则 $k$ 的值为（ ）

A.1　　B.1 或-2　　C.-1 或 2　　D.-2　　E.以上选项都不对

【解析】利用等比定理，第一步，判断分母之和是否为 0，可进行分类讨论

(1) 当 $a+b+c=0$ 时，$a+b=-c$，代入原式，可知 $k=-2$；

(2) 当 $a+b+c\neq 0$ 时，由等比定理：

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{a+b+c}=k$$

整理，可得到-1.

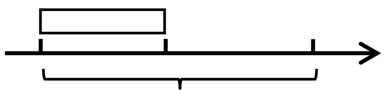
答案选 B

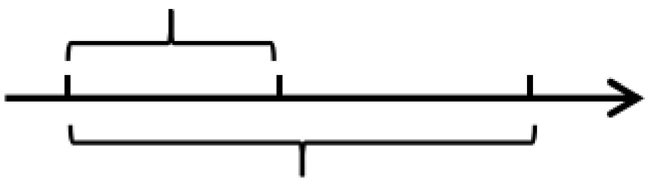
【考点】等比定理的运用

20180119

199 概念篇——数轴与绝对值

1. 绝对值：绝对值通常用零点分段去绝对值，其几何意义是，一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离；





2.绝对值的三角不等式

（1）$\left||a|-|b|\right| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$

当且仅当 $ab \ge 0$时，$|a+b|=|a|+|b|$ ；

当且仅当 $ab \le 0$时，$\left||a|-|b|\right|=|a+b|$ ；

当且仅当 $ab \le 0$时，$|a-b|=|a|+|b|$ ；

当且仅当 $ab \ge 0$时，$\left||a|-|b|\right|=|a-b|$。

（2）$\left||a|-|b|\right| \le |a+b| \le |a|+|b|$

左边等号成立的条件：$ab \le 0$且$|a| \ge |b|$ ；

右边等号成立的条件：$ab \ge 0$

（3）$\left||a|-|b|\right| \le |a-b| \le |a|+|b|$

左边等号成立的条件：$ab \ge 0$且$|a| \ge |b|$；

右边等号成立的条件：$ab \le 0$

199 习题篇

1.已知$m$和$n$为实数，且$\sqrt{2m+1}+|3n-2|=0$，实数$m+n^2$的相反数的倒数值是(　).

A.59/12　　B.59/14　　C.9/2　　D.16　　E.18

【解析】因为等式为 0，由非负性得到：$\begin{cases}3n-2=0\\2m+1=0\end{cases}, \Rightarrow \begin{cases}n=\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以，实数$m+n^2$的值为$-\dfrac{1}{18}$可以得到其相反数的倒数值为 18.答案选 E

【考点】绝对值的性质

2.已知 a，b，c 为有理数，且$\sqrt{13-2\sqrt{42}}=a\sqrt{7}+b\sqrt{6}+c$，则 2 012a+2 013b+2 014c=(　).

A.0　　B.-2　　C.2　　D.-1　　E.1

【解析】$\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}=a\sqrt{7}+b\sqrt{6}+c \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=-1\\c=0\end{cases}$

故 2 012a+2 013b+2 014c=2012-2013=-1.选 D

【考点】化简求值，掌握变形的技巧。

3.等式$|2m-7|=|m-2|+|m-5|$成立，则实数$m$的取值范围是（ ）

A.$2 \le m \le 5$　　B.$m \le -2$或$m \ge 5$　　C.$-2 < m < 5$

D.$m \le 2$或$m \ge 5$　　E.$m \le -5$或$m \ge -2$

【解析】$|2m-7|=|m-2+m-5| \le |m-2|+|m-5|$，当且仅当$m-2$与$m-5$同号时等号成立，即$(m-2)(m-5) \ge 0$，所以$m \le 2$或$m \ge 5$，选D

【考点】绝对值三角不等式

20180120 习题

1.设 a,b∈R，则下列命题中正确的是()

A.若 a,b 均是无理数，则 a+b 也是无理数

B.若 a,b 均是无理数，则 ab 也是无理数

C.若 a 是有理数，b 是无理数，则 a+b 是无理数

D.若 a 是有理数，b 是无理数，则 ab 是无理数

E.若 a 是无理数，b 是无理数，则 ab 是无理数

【解析】A,B 项若 a=$\sqrt{2}$ ,b=-$\sqrt{2}$ ,则 a+b=0,ab=-2，均为有理数，不正确;D 项若 a=0,b=$\sqrt{2}$ ,则 ab=0，为有理数，不正确；E 项若 a=$\sqrt{2}$ ,b=$\sqrt{2}$ ,则 a/b=1，为有理数，不正确.选 C

【考点】实数的概念和性质

2.已知$a,b,c$是三个连续的奇数，并且$10<a<b<c<20$，$b$、$c$都是质数，那么$a+b=()$

A.20　　B.28　　C.30　　D.32　　E.38

【解析】根据题意，可知$a$、$b$、$c$分别为 15,17,19。所以可得$a+b=32$，答案选 D。

【考点】20 以内的质数

3.有一个四位数，它被 131 除余 13，被 132 除余 130，则此数字的各位数字之和为（ ）

A.23　　B.24　　C.25　　D.26　　E.27

【解析】设所求的 4 位数为$x$,则有$\begin{cases}x=131k_1+13\\x=132k_2+130\end{cases}$，对第二个式子进行变形，得到

$x=(131+1)k_2+131-1=131(k_2+1)+k_2-1$，可得$\begin{cases}k_2-1=13\\k_2+1=k_1\end{cases}$，故$\begin{cases}k_2=14\\k_1=15\end{cases}$，则可的

$x=131\times15+13=1978$，各位数字之和为 25.选 C。

【考点】带余除法问题

4.在 20 以内的质数当中，两个质数的和还是质数的共有（ ）种

A.3　　B.4　　C.5　　D.6　　E.7

【解析】20 以内的质数为 2,3,5,7,11,13,17,19 其中大于 2 的质数全为奇数，偶数+奇数=奇数，故这两个质数一定有一个是 2，与 2 相加还是质数的有 3,5,11,17，故共有四种。选 B

【考点】20 以内的质数

5.甲数是 36，甲乙两数的最大公约数是 4，最小公倍数是 288，乙数的各个数位和为（ ）

A.9　　B.8　　C.7　　D.6　　E.5

【解析】甲数×乙数=甲、乙两数的最大公约数×两数的最小公倍数，可得到 36×乙数=4×288,

解得乙数=32。各个数位之和为 5.选 E

【考点】最大公约数与最小公倍数与两数的关系

6.已知实数 $x,y$ 满足 $\sqrt{2x-3y-1}+|x-2y+2|=0$，则 $2x-\frac{4}{5}y$ 的平方根是（ ）

A.12　　B. $\pm 12$　　C. $\pm 2\sqrt{2}$　　D. $\pm 2\sqrt{3}$　　E. $2\sqrt{3}$

【解析】根据非负性得到 $\begin{cases}2x-3y-1=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=5\\x=8\end{cases}$，得到 $2x-\frac{4}{5}y$ =12，得平方根是 $\pm 2\sqrt{3}$

答案选 D

【考点】非负性

7.　$a=8.8+9.98+8.998+8.9998+8.99998$，则$[a]=()$

A.42　　B.43　　C.44　　D.45　　E.46

【解析】$\begin{aligned}a&=8.8+8.98+8.998+8.9998+8.99998\\&=(9\text{-}0.2)+(9\text{-}0.02)+(9\text{-}0.002)+(9\text{-}0.0002)+(9\text{-}0.00002)\\&=45\text{-}0.22222\end{aligned}$

所以，$[a]=44$

【考点】小数的整数部分和小数部分

8.存在实数 m，使|m+2|+|6-3m|≤a 成立.()

（1）a=4.（2）a>4.

【解析】条件（1）：把 a=4 代入，有|m+2|+|6-3m|≤4，即|m+2|+|3m-6|≤4.有

$\begin{cases}m\geq 2\\m+2+3m-6\leq 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leq m<2\\m+2-3m+6\leq 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<-2\\-m-2-3m+6\leq 4\end{cases}$

解之得 m=2，故条件（1）、（2）都充分.

【考点】绝对值不等式

9.m 增大 2 倍.()

（1）m/2 的分母增大 2，要保持分数值不变.

（2）m/2 的分母变为原来的 2 倍，要保持分数值不变.

【解析】条件（1）、（2）其实分母都变成了 4，即分母变为原来的 2 倍了，所以要保持值不变，则分子也应变为 2m，即增大 1 倍，均不充分.

【考点】分数的性质

10.$|a-b|=12$

(1)$|a|=5,|b|=7$

(2)$ab<0$

【解析】条件（1）和（2）单独都不充分，联合起来，有$a=5,b=-7$或$a=-5,b=7$，则$|a-b|=12$，所以条件（1）和条件（2）联合起来充分。

【考点】绝对值的三角不等式及其性质。

20180122

199 概念篇——整式与分式

1. 乘法公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

2. 单项式是有限个数字与字母的乘积；多项式是有限个单项式组成的；二者统一称为整式；
3. 若单项式所含字母相同，并且相同字母的次数也相同，则称为同类项；
4. 两个多项式相等，则其对应次数项的系数相等，两个多项式任意取值时，多项式的值都相等；
5. 因式分解方法：

（1）提公因式法

（2）公式法（利用上述公式）

（3）求根法：若某一元二次方程的根是$x_1$，则$(x-x_1)$就是这个一元二次方程的一个因式。

（4）十字相乘法

6. 余式定理

若$F(x)$除以$f(x)$得到商式$g(x)$，余式是$R(x)$，则$F(x)=f(x)\ g(x)+R(x)$，其中$R(x)$的次数小于$f(x)$的次数，则

（1）若有$x=a$使$f(a)=0$，则$F(a)=R(a)$

（2）$F(x)$除以$\left(x-a\right)$的余式为$F(a)$，$F(x)$除以$\left(ax-b\right)$的余式为$F(\frac{b}{a})$

（3）对于$F(x)$，若$x=a$时，$F(a)$=0，则$\left(x-a\right)$是$F(x)$的一个因式；若$\left(x-a\right)$是$F(x)$的一个因式，则$f(a)=0$，也将此结论称为是因式定理。

7.分式中分母不为 0，则分式有意义；

8.最简分式（既约分式）：分子和分母没有正次数的公因式的分式叫作最简分式（或既约分式）

习题：

1. 老师在黑板上写一道数学题：已知两多项式 A，B，若 B 为 $2x^2-3x-3$，求 A+B，其中 A 的多项式被擦掉了，而甲误将 A+B 看成 A－B，结果求得答案为 $4x^2-x+5$，则此题正确的答案为().

A.$8x^2-7x-1$　　B.$10x^2-5x+7$　　C.$4x^2+x-5$

D.$10x^2+x-7$　　E.$8x^2+x-7$

【解析】$A-B=4x^2-x+5$,

$A=4x^2-x+5+2x^2-3x-3=6x^2-4x+2$,

$A+B=6x^2-4x+2+2x^2-3x-3=8x^2-7x-1$.选 A

【考点】多项式的计算

2. 若$\Delta ABC$的三边长为$a$、$b$、$c$满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$\Delta ABC$为（ ）

A.等腰三角形　　B.直角三角形　　C.等边三角形

D.等腰直角三角形　　E.以上结论均不正确

【解析】$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$变形$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，则$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$得到$\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2=0\Rightarrow a=b=c$，$\Delta ABC$为等边三角形，选 C

【考点】完全平方公式的运用及常用的结论$\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2=0\Rightarrow a=b=c$

3. 若多项式$f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$能被$x-1$整除，则实数$a$=(　　)

A.0　　B.1　　C.0 或 1　　D.2 或-1　　E.2 或 1

【解析】整除，则直接令$x=1$即可，计算得$a=2或1$，选 E

【考点】余式定理

4. 将$x^3+6x-7$因式分解为（ ）

A. $(x-1)(x^2+x+7)$　　B. $(x+1)(x^2+x+7)$　　C. $(x-1)(x^2+x-7)$

D. $(x-1)(x^2-x+7)$　　E. $(x-1)(x^2-x-7)$

【解析】
$$\begin{aligned}&x^3+6x-7=x^3-1+6x-6\\&=(x-1)(x^2+x+1)+6(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x+7)\end{aligned}$$

选 A

【考点】因式分解和乘法公式

20180123

199 概念篇——函数

（一）一元二次函数的定义

一元二次函数是指只有一个未知数，且未知数的最高次数为二次的多项式函数。

一元二次函数可以表示为：

一般式：$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$；

顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\quad(a\neq 0)$；

两点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)\quad(a\neq 0)$

（二）一元二次函数的图像和性质

①一元二次函数的图像是一条抛物线，图像的顶点坐标为$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

②当 $a>0$，函数图像开口向上，$y$ 有最小值 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 但无最大值；当 $a<0$，函数图像开口向下，$y$ 有最大值 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 但无最小值.

③当 $a>0$，函数在区间$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$上是减函数，在$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty,\right)$上是增函数；

当 $a<0$，函数在区间 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 上是增函数，在 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty,\right)$ 上是减函数.

（三）一元二次函数的图像与 x 轴的交点

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，函数图像与 x 轴有两个交点；

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，函数图像与 x 轴有一个交点；

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，函数图像与 x 轴没有交点.

习题：

1. 设实数 x ,y 满足 $x+2y=3$，则 $x^2+y^2+2y$ 的最小值为______.

【解析】

由 $x=3-2y$ 代入得 $x^2+y^2+2y=5y^2-10y+9$，可以看成关于 y 的二次函数，利用一元二次函数的图像和性质，得到最小值为 4.

【总结】

本题首先将已知等式代入所求的表达式中，化为只含有一个未知数的函数，从而借助于抛物线来求解最值。

2. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$，且过点（-1，1），那么

$b=$______, $c=$______.

【解析】

根据一元二次函数的图像和性质及点的坐标，得到

$$\begin{cases}-\frac{b}{2}=1\\1-b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\c=-2\end{cases}$$

【总结】

根据抛物线的特征来列方程，从而得到系数。

3. 设 1，a，b 成等差数列且 a，b 是两个不相等的实数，则函数 $f(x)=x^2+2ax+b$ 的最小值与 0 的关系。

【解析】

根据等差数列的性质可得 $2a=b+1\Rightarrow b=2a-1$，根据一元二次函数的图像可知

$$f(x)_{\min}=\frac{4b-4a^2}{4}=b-a^2=(2a-1)-a^2=-(a-1)^2,$$

同时 a，b 是两个不相等的实数可知 $a \neq 1$，综上所述 $f(x)_{\min} < 0$.

【总结】

本题考查了等差中项的性质应用，以及二次函数最值的基本问题。

20180124

199 概念篇——方程

1. 含有未知数的等式叫做方程，使得方程（组）成立的未知数叫做方程（组）的解。

2. 一元一次方程：方程中，只含一个未知数且未知数的次数为 1；二元一次方程：方程中，只含有两个未知数且未知数的次数都为 1.

3. 一元一次方程的解：$ax=b$

（1）当$a \neq 0$时，$x$有唯一解$\frac{b}{a}$；

（2）当$a=0$，$b=0$时，$x$有无穷多解；

（3）当$a=0$，$b \neq 0$时，$x$无解。

4. 二元一次方程组及其解：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases},$$

（1）若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ 方程组有唯一解；

（2）若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,方程组有无穷多解；

（3）若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,方程组无解。

5. 一元二次方程：$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$

求根 $x_1,x_2$ 的方式

（1）配方法

（2）求根公式：方程的根 $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac \geq 0)$，其中 $(b^2-4ac)$ 称为一元二次方程的根的判别式 $\Delta$

；

当$\Delta < 0$时，方程无实根；

当$\Delta = 0$时，方程有两个相等的实根；

当$\Delta > 0$时，方程有两个不等的实根；

（3）韦达定理：描述一元二次方程根与系数的关系：

两根分别为$x_1, x_2$，则有$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

习题篇

1、若方程$x^2 + px + 37 = 0$恰好有两个正整数的解$x_1$，$x_2$则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$的值是______.

| 解： | 总结： |
| --- | --- |
| 根据韦达定理，可知$x_1x_2 = 37$，$x_1 + x_2 = -p$。<br>又$x_1, x_2$为正整数解，且两根的积37为质数，所以得<br>$x_1 = 1$，$x_2 = 37$，$p = -38$，带入$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$，得-2. | 灵活地应用韦达定理。 |

2、已知关于$x$的一元二次方程$k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$有两个相异实根，则求$k$的取值范围。

| 解： | 总结： |
| --- | --- |
| 由题意知，$\begin{cases} k^2 \neq 0, \\ \Delta = (2k+1)^2 - 4k^2 > 0 \end{cases}$解得$k > -\frac{1}{4}$且$k \neq 0$. | 考查点为判别式与一元二次方程的实根个数的关系。 |

1、$x_1, x_2$是方程$x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$的两实根，则$x_1^2 + x_2^2$的最大值______.

| | |
|---|---|
| 解：<br>$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$<br>$=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$<br>因为方程有两个实数根则 $\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geq 0$<br>解得 $-4\leq k\leq -\frac{4}{3}$。<br>根据抛物线的图像可知，<br>当 $k=-4$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 取到最大值 18． | 总结：<br>灵活应用韦达定理和判别式与一元二次方程的实根个数的关系。 |

20180125

199 概念篇——不等式

1. 不等式的解集

对于含有未知数的不等式，能使其成立的未知数的值的集合，叫做这个不等式的解集。

2 一元二次不等式

（1）方法一：可通过一元二次函数图象进行求解。根据二次项系数的正负，开口方向，顶点坐标，对称轴等，采用数形结合的思想，进行初步判定解集情况；再利用求根公式求出方程的两个实数根，写出解集。

（2）方法二：可利用用配方法解一元二次不等式。

3. 含绝对值的不等式

解含绝对值不等式一般有两种思路：

（1）利用绝对值的性质去掉绝对值符号

（2）利用平方进行等价变换

4. 高次不等式

先不等式变形，使不等式两边，一边为 0，然后再解相对应的高次等式的根，最后利用穿根法求解：

（1）最高次项的系数一定为正，才可以从数轴右上角开始；

（2）穿线法则是奇穿偶不穿，即含 $x$ 的因式，偶数次幂和奇数次幂。

5. 分式不等式

先转化成整式不等式再进行求解，注意分母必须有意义。

习题篇

1、设$0<x<1,$则不等式$\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}>1$的解是______.

| | |
|---|---|
| 解：<br>$\because 0<x<1,$则$x^2-1<0$.<br>$\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}>1 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-2}{x^2-1}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-2-x^2+1}{x^2-1}>0$<br>即$2x^2-1<0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.<br>又$0<x<1,$<br>$\therefore$解集为$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. | 总结：<br>对于分式不等式通常先转化成整式不等式再进行求解，同时注意分母必须有意义。 |

2、关于$x$的方程$x^2+(a-1)x+1=0$有两个相异实根，且两根均在区间$[0,2]$上，则实数$a$的取值范围_______.

| | |
|---|---|
| 解：<br>区间根问题，根据题意，知<br>$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-4>0\\0<-\dfrac{a-1}{2}<2\\f(0)\geq 0\\f(2)\geq 0\end{cases}$ 解得:$-\dfrac{3}{2}\leq a<-1$. | 总结：<br>区间根问题使用"两点式"解题方法，即看顶点（横坐标相当于对称轴，纵坐标相当于$\Delta$），再看端点（根所分布区间的端点）。<br>对于一元二次方程的不等式问题，要有数形结合的思想，即先画出函数图象的草图再进行求解。 |

3、已知不等式$ax^2+2x+2>0$的解集是$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$，则$a=$______.

| 解：<br>根据题意知 $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$,<br>由韦达定理可知<br>$x_1x_2=\dfrac{2}{a}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$<br>即 $a=-12$ | 总结：<br>注意一元二次不等式、一元二次方程之间的关系。 |
| --- | --- |

20180126

199 概念篇——数列

(一)数列：

数列的定义：依一定次序排列的一组数。数列中的每一个数叫做这个数列的项。数列的一般表达式为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 或简记为 $\{a_n\}$。项数有限的数列称为有穷数列，项数无限的数列称为无穷数列。

数列通项: 其中 $a_n$ 叫做数列 $\{a_n\}$ 的通项，自然数 n 叫做 $a_n$ 的序号。如果通项 $a_n$ 与 n 之间的函数关系可以用一个关于 n 的解析式 $f(n)$ 表达，则称 $a_n=f(n)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

数列的前 n 项和（记作 $s_n$）对于数列 $\{a_n\}$ 显然有 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

(二)等差数列：

$\{a_n\}$ 是等差数列等价于 $a_{n+1}-a_n=d\,(d为常数)$。

等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$， $a_n=a_m+(n-m)d$。

等差中项：若 $a,b,c$ 成等差数列，则 b 是 $a,c$ 的等差中项，且 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

等差数列的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$， $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

（三）等比数列

$\{a_n\}$ 是等比数列等价于 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q\,(q为常数)$。

等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1},a_n=a_mq^{n-m}$。

等比中项：若 $a,b,c$ 成等比数列，则 b 是 $a,c$ 的等比中项，且 $b^2=ac$。

等比数列的前 n 项和 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(q\neq 1\right)$。

习题

1、数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=4n^2+n-2$，则它的通项 $a_n=$

| 解： | 总结： |
| --- | --- |
| 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3.$<br>当 $n\geq 2$ 时,<br>$a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+n-2-[4(n-1)^2+(n-1)-2]=8n-3.$<br>从而 $a_n=\begin{cases}3, & n=1\\ 8n-3, & n\geq 2\end{cases}$ | 要注意分情况讨论。 |

2、数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-3$，则它的通项 $a_n=$

| 解： | 总结： |
| --- | --- |
| 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\dfrac{3}{2}a_1-3,得a_1=6$<br>当 $n\geq 2$ 时,<br>$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3}{2}a_n-3-\dfrac{3}{2}a_{n-1}+3$ 整理得 $a_n=3a_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=3$<br>因此$\left\{a_n\right\}$是首项为 $a_1=6$，公比 $q=3$ 的等比数列，即 $a_n=2\times 3^n$。 | 要注意分情况讨论，本题先得到<br>$a_n$ 与 $a_{n-1}$ 的关系式, 再求出通项 $a_n$。 |

3、设 $a,b,c$ 三数成等差数列，若 $x,y$ 分别是 $a,b$ 和 $b,c$ 的等比中项，求 $x^2+y^2=$

| 解： | 总结： |
| --- | --- |
| 由题意得 $\begin{cases}2b=a+c\\ x^2=ab\\ y^2=bc\end{cases}$ 所以 $x^2+y^2=b(a+c)=2b^2$ | 考查了等差、等比数列的中项。 |

20180127

习题

1、一元二次函数 $y=x(1-x)$ 的最大值为________.

| | |
|---|---|
| 解：<br>方法一：用二次函数求最值<br>$y=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$， $y_{\max}=\frac{1}{4}$<br>方法二：用平均值定理求最值<br>$x(1-x)\leq\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ | 总结:<br>本题考点二次函数的最值、平均值不等式 |

2、已知 $a,b,c$ 三数成等差数列，又成等比数列，设 $\alpha,\beta$ 是方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$，则 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=$

| | |
|---|---|
| 解：<br>由于 $a,b,c$ 三数成等差数列，又成等比数列，故 $a=b=c\neq 0$，原方程可化为<br>$x^2+x-1=0$，<br>根据韦达定理得 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$<br>$=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{5}$ | 总结:<br>考查了数列与方程根 |

3、设方程 $3x^2+mx+5=0$ 的两个实数根 $x_1$ 和 $x_2$ 满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 则 $m$ 的值为____.

| 解： | 总结: |
|---|---|
| 根据韦达定理，有<br>$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{m}{3}}{\frac{5}{3}}=1\Rightarrow m=-5$ | 借助韦达定理求出两根的导数和。 |

4、设 $y=\lvert x-a\rvert+\lvert x-20\rvert+\lvert x-a-20\rvert$，其中 $0<\mathrm{a}<20,$ 则对于满足 $a\le x\le 20$ 的 $x$ 值， $y$ 的最小值是______

| 解： | 总结: |
|---|---|
| 由于 $a\le x\le 20$， $y=x-a+20-x+a+20-x=40-x$，<br>当 $x=20$ 时， $y$ 取得最小值是 $y=20$ | 根据取值范围进行绝对值的化简，然后根据 $x$ 的取值范围讨论 $y$ 的变换范围。 |

**充分条件判断题**

1、设 a，b 是两个不相等的实数，则函数 $f(x)=x^2+2ax+b$ 的最小值小于零。

（1）1，a，b 成等差数列。

（2）1，a，b 成等比数列。

| 解： | 总结: |
|---|---|
| 题干欲证最小值 $\frac{4b-4a^2}{4}<0\Rightarrow b-a^2<0$。<br>条件（1）根据等差数列性质可得<br>$2a=1+b\Rightarrow b=2a-1$,<br>$b-a^2=(2a-1)-a^2=-a^2+2a-1\le 0$。<br>当 $a=1$ 时，有 $-a^2+2a-1=0$。<br>又因 a，b 是两个不相等的实数是两个不相等的实数,<br>所以 $a\ne 1$，故 $-a^2+2a-1<0$，即 $b-a^2$ 充分。 | 抛物线的最小值 |