

二次函数压轴题

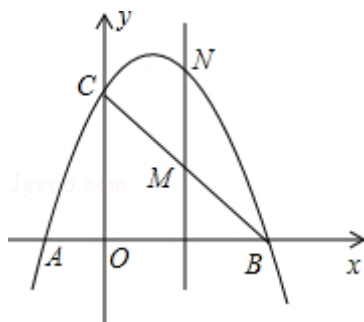
面积类

1. 如图，抛物线经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 点 M 是线段 BC 上的点 (不与 B, C 重合), 过 M 作 $MN \parallel y$ 轴交抛物线于 N , 假设点 M 的横坐标为 m , 请用 m 的代数式表示 MN 的长.

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 NB, NC , 是否存在 m , 使 $\triangle BNC$ 的面积最大? 假设存在, 求 m 的值; 假设不存在, 说明理由.

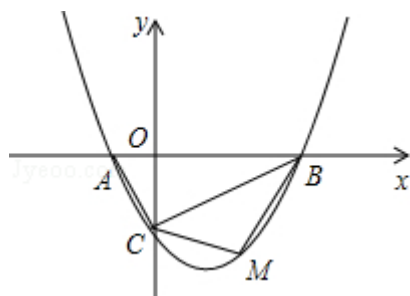


2. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - \frac{3}{2}x - 2$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C 点, B 点坐标为 $(4, 0)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 试探究 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心位置, 并求出圆心坐标;

(3) 假设点 M 是线段 BC 下方的抛物线上一点, 求 $\triangle MBC$ 的面积的最大值, 并求出此时 M 点的坐标.



1.分析:

(1) 了抛物线上的三个点的坐标, 直接利用待定系数法即可求出抛物线的解析式.

(2) 先利用待定系数法求出直线 BC 的解析式, 点 M 的横坐标, 代入直线 BC 、抛物线的解析式中, 可得到 M 、 N 点的坐标, N 、 M 纵坐标的差的绝对值即为 MN 的长.

(3) 设 MN 交 x 轴于 D , 那么 $\triangle BNC$ 的面积可表示为: $S_{\triangle BNC} = S_{\triangle MNC} + S_{\triangle MNB} = MN (OD + DB) = MN \cdot OB$, MN 的表达式在 (2) 中已求得, OB 的长易知, 由此列出关于 $S_{\triangle BNC}$ 、 m 的函数关系式, 根据函数的性质即可判断出 $\triangle BNC$ 是否具有最大值.

解答:

解: (1) 设抛物线的解析式为: $y = a(x+1)(x-3)$, 那么:

$$a(0+1)(0-3) = 3, a = -1;$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式: } y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3.$$

(2) 设直线 BC 的解析式为: $y = kx + b$, 那么有:

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases};$

故直线 BC 的解析式: $y = -x + 3$.

点 M 的横坐标为 m , $MN \parallel y$, 那么 $M(m, -m+3)$ 、 $N(m, -m^2+2m+3)$;

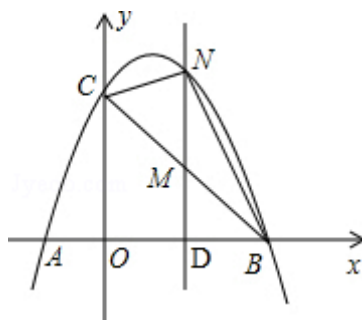
$$\therefore \text{故 } MN = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3) = -m^2 + 3m \quad (0 < m < 3).$$

(3) 如图;

$$\because S_{\triangle BNC} = S_{\triangle MNC} + S_{\triangle MNB} = MN (OD + DB) = MN \cdot OB,$$

$$\therefore S_{\triangle BNC} = (-m^2 + 3m) \cdot 3 = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \quad (0 < m < 3);$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle BNC \text{ 的面积最大, 最大值为 } \frac{27}{4}.$$



2. 考点：二次函数综合题. .

解：（1）将 $B(4, 0)$ 代入抛物线的解析式中，得：

$$0 = 16a - \times 4 - 2, \text{ 即: } a =;$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = x^2 - x - 2.$$

（2）由（1）的函数解析式可求得： $A(-1, 0)$ 、 $C(0, -2)$ ；

$$\therefore OA=1, OC=2, OB=4,$$

$$\text{即: } OC^2 = OA \cdot OB, \text{ 又: } OC \perp AB,$$

$$\therefore \triangle OAC \sim \triangle OCB, \text{ 得: } \angle OCA = \angle OBC;$$

$$\therefore \angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = \angle OBC + \angle OCB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形， AB 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径；

所以该外接圆的圆心为 AB 的中点，且坐标为： $(, 0)$.

（3）已求得： $B(4, 0)$ 、 $C(0, -2)$ ，可得直线 BC 的解析式为： $y = x - 2$ ；

设直线 $l \parallel BC$ ，那么该直线的解析式可表示为： $y = x + b$ ，当直线 l 与抛物线只有一个交点时，可列方程：

$$x + b = x^2 - x - 2, \text{ 即: } x^2 - 2x - 2 - b = 0, \text{ 且 } \Delta = 0;$$

$$\therefore 4 - 4 \times (-2 - b) = 0, \text{ 即 } b = -4;$$

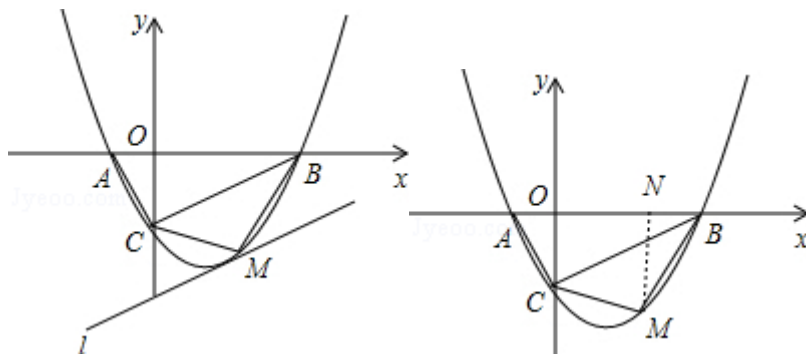
$$\therefore \text{直线 } l: y = x - 4.$$

所以点 M 即直线 l 和抛物线的唯一交点，有：

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 即 } M(2, -3).$$

过 M 点作 $MN \perp x$ 轴于 N ,

$$S_{\triangle BMC} = S_{\text{梯形 } OCMN} + S_{\triangle MNB} - S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \times (2+3) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4.$$



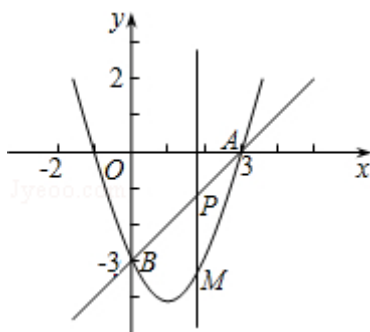
平行四边形类

3. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+mx+n$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -3)$ ，点 P 是直线 AB 上的动点，过点 P 作 x 轴的垂线交抛物线于点 M ，设点 P 的横坐标为 t 。

(1) 分别求出直线 AB 和这条抛物线的解析式。

(2) 假设点 P 在第四象限，连接 AM 、 BM ，当线段 PM 最长时，求 $\triangle ABM$ 的面积。

(3) 是否存在这样的点 P ，使得以点 P 、 M 、 B 、 O 为顶点的四边形为平行四边形？假设存在，请直接写出点 P 的横坐标；假设不存在，请说明理由。

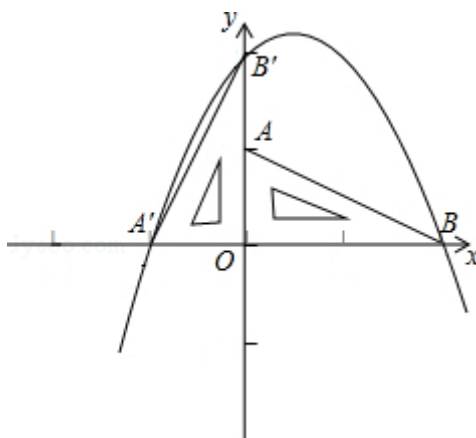


4. 如图，在平面直角坐标系中放置一直角三角板，其顶点为 $A(0, 1)$ ， $B(2, 0)$ ， $O(0, 0)$ ，将此三角板绕原点 O 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle A'B'O$ 。

(1) 一抛物线经过点 A' 、 B' 、 B ，求该抛物线的解析式；

(2) 设点 P 是在第一象限内抛物线上的一动点，是否存在点 P ，使四边形 $PB'A'B$ 的面积是 $\triangle A'B'O$ 面积 4 倍？假设存在，请求出 P 的坐标；假设不存在，请说明理由。

(3) 在 (2) 的条件下，试指出四边形 $PB'A'B$ 是哪种形状的四边形？并写出四边形 $PB'A'B$ 的两条性质。



3.考点：二次函数综合题；解一元二次方程—因式分解法；待定系数法求一次函数解析式；待定系数法求二次函数解析式；三角形的面积；平行四边形的判定．

专题：压轴题；存在型．

分析：

(1) 分别利用待定系数法求两函数的解析式 把 $A(3, 0)$ $B(0, -3)$ 分别代入 $y=x^2+mx+n$ 与 $y=kx+b$ ，得到关于 m 、 n 的两个方程组，解方程组即可；

(2) 设点 P 的坐标是 $(t, t-3)$ ，那么 $M(t, t^2-2t-3)$ ，用 P 点的纵坐标减去 M 的纵坐标得到 PM 的长，即 $PM=(t-3)-(t^2-2t-3)=-t^2+3t$ ，然后根据二次函数的最值得到

当 $t=-\frac{3}{2 \times (-1)}$ 时， PM 最长为 $\frac{0-9}{4 \times (-1)}$ ，再利用三角形的面积公式利用

$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BPM}+S_{\triangle APM}$ 计算即可；

(3) 由 $PM \parallel OB$ ，根据平行四边形的判定得到当 $PM=OB$ 时，点 P 、 M 、 B 、 O 为顶点的四边形为平行四边形，然后讨论：当 P 在第四象限： $PM=OB=3$ ， PM 最长时只有，所以不可能；当 P 在第一象限： $PM=OB=3$ ， $(t^2-2t-3)-(t-3)=3$ ；当 P 在第三象限：

$PM=OB=3$ ， $t^2-3t=3$ ，分别解一元二次方程即可得到满足条件的 t 的值．

解答：

解：(1) 把 $A(3, 0)$ $B(0, -3)$ 代入 $y=x^2+mx+n$ ，得

$$\begin{cases} 0=9+3m+n \\ -3=n \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \end{cases}, \text{ 所以抛物线的解析式是 } y=x^2-2x-3.$$

设直线 AB 的解析式是 $y=kx+b$ ，

$$\text{把 } A(3, 0) \text{ } B(0, -3) \text{ 代入 } y=kx+b, \text{ 得 } \begin{cases} 0=3k+b \\ -3=b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=1 \\ b=-3 \end{cases},$$

所以直线 AB 的解析式是 $y=x-3$ ；

(2) 设点 P 的坐标是 $(t, t-3)$ ，那么 $M(t, t^2-2t-3)$ ，

因为 P 在第四象限，

所以 $PM=(t-3)-(t^2-2t-3)=-t^2+3t$ ，

当 $t=-\frac{3}{2 \times (-1)}$ 时，二次函数的最大值，即 PM 最长值为 $\frac{0-9}{4 \times (-1)}$ ，

$$\text{那么 } S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BPM}+S_{\triangle APM}=\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 3=\frac{27}{8}.$$

(3) 存在，理由如下：

$\because PM \parallel OB$,

$\therefore$ 当 $PM=OB$ 时, 点 P 、 M 、 B 、 O 为顶点的四边形为平行四边形,

①当 P 在第四象限: $PM=OB=3$, PM 最长时只有, 所以不可能有 $PM=3$.

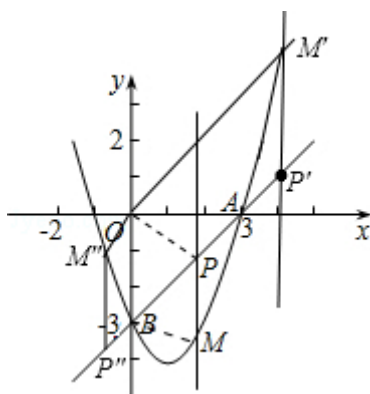
②当 P 在第一象限: $PM=OB=3$, $(t^2 - 2t - 3) - (t - 3) = 3$, 解得 $t_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $t_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

(舍去), 所以 P 点的横坐标是 $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$;

③当 P 在第三象限: $PM=OB=3$, $t^2 - 3t = 3$, 解得 $t_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ (舍去), $t_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$, 所以 P

点的横坐标是 $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$.

所以 P 点的横坐标是 $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ 或 $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$.



4. 考点: 二次函数综合题. .

专题: 压轴题.

分析:

(1) 利用旋转的性质得出 $A'(-1, 0)$, $B'(0, 2)$, 再利用待定系数法求二次函数解析式即可;

(2) 利用 $S_{\text{四边形} PB'A'B} = S_{\triangle B'OA'} + S_{\triangle PB'O} + S_{\triangle POB}$, 再假设四边形 $PB'A'B$ 的面积是 $\triangle A'B'O$ 面积的 4 倍, 得出一元二次方程, 得出 P 点坐标即可;

(3) 利用 P 点坐标以及 B 点坐标即可得出四边形 $PB'A'B$ 为等腰梯形, 利用等腰梯形性质得出答案即可.

解答:

解: (1) $\triangle A'B'O$ 是由 $\triangle ABO$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 得到的,

又 $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $O(0, 0)$,

$\therefore A'(-1, 0)$, $B'(0, 2)$.

方法一：

设抛物线的解析式为： $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)， $\because$ 抛物线经过点 A' 、 B' 、 B ，

$$\therefore \begin{cases} 0=a-b+c \\ 2=c \\ 0=4a+2b+c \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}, \therefore \text{满足条件的抛物线的解析式为 } y=-x^2+x+2.$$

方法二： $\because A'(-1, 0)$ ， $B'(0, 2)$ ， $B(2, 0)$ ，

设抛物线的解析式为： $y=a(x+1)(x-2)$

将 $B'(0, 2)$ 代入得出： $2=a(0+1)(0-2)$ ，解得： $a=-1$ ，

故满足条件的抛物线的解析式为 $y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$ ；

(2) $\because P$ 为第一象限内抛物线上的一动点，

设 $P(x, y)$ ，那么 $x > 0$ ， $y > 0$ ， P 点坐标满足 $y=-x^2+x+2$ 。连接 PB ， PO ， PB' ，

$$\therefore S_{\text{四边形 } PB'A'B} = S_{\triangle B'O A'} + S_{\triangle P B' O} + S_{\triangle P O B}, = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times x + \frac{1}{2} \times 2 \times y, = x + (-x^2 + x + 2) + 1, \\ = -x^2 + 2x + 3.$$

$\because A'O=1$ ， $B'O=2$ ， $\therefore \triangle A'B'O$ 面积为： $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ ，

假设四边形 $PB'A'B$ 的面积是 $\triangle A'B'O$ 面积的 4 倍，那么

$$4 = -x^2 + 2x + 3, \text{ 即 } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ 解得: } x_1 = x_2 = 1,$$

此时 $y = -1^2 + 1 + 2 = 2$ ，即 $P(1, 2)$ 。

$\therefore$ 存在点 $P(1, 2)$ ，使四边形 $PB'A'B$ 的面积是 $\triangle A'B'O$ 面积的 4 倍。

(3) 四边形 $PB'A'B$ 为等腰梯形，答案不唯一，下面性质中的任意 2 个均可。

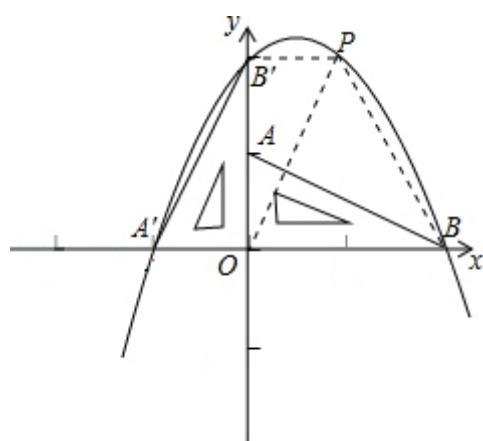
①等腰梯形同一底上的两个内角相等；②等腰梯形对角线相等；

③等腰梯形上底与下底平行；④等腰梯形两腰相等。 - - - - - (10 分)

或用符号表示：

① $\angle B'A'B = \angle PBA'$ 或 $\angle A'B'P = \angle BPB'$ ；② $PA' = B'B$ ；③ $B'P \parallel A'B$ ；

④ $B'A' = PB$ 。 - - - - - (10 分)

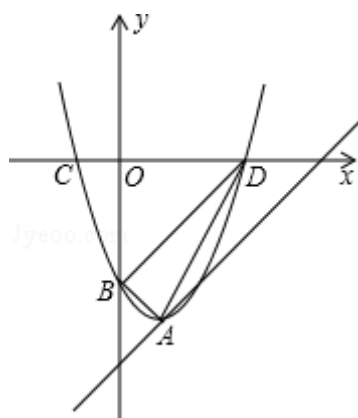


5. 如图, 抛物线 $y=x^2-2x+c$ 的顶点 A 在直线 $l: y=x-5$ 上.

(1) 求抛物线顶点 A 的坐标;

(2) 设抛物线与 y 轴交于点 B , 与 x 轴交于点 C 、 D (C 点在 D 点的左侧), 试判断 $\triangle ABD$ 的形状;

(3) 在直线 l 上是否存在一点 P , 使以点 P 、 A 、 B 、 D 为顶点的四边形是平行四边形? 假设存在, 求点 P 的坐标; 假设不存在, 请说明理由.



5.考点：二次函数综合题.

解：（1） $\because$ 顶点 A 的横坐标为 $x = -\frac{-2}{2} = 1$ ，且顶点 A 在 $y = x - 5$ 上，

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时， $y = 1 - 5 = -4$ ， $\therefore A(1, -4)$.

（2） $\triangle ABD$ 是直角三角形.

将 $A(1, -4)$ 代入 $y = x^2 - 2x + c$ ，可得， $1 - 2 + c = -4$ ， $\therefore c = -3$ ，

$\therefore y = x^2 - 2x - 3$ ， $\therefore B(0, -3)$

当 $y = 0$ 时， $x^2 - 2x - 3 = 0$ ， $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ， $\therefore C(-1, 0)$ ， $D(3, 0)$ ，

$BD^2 = OB^2 + OD^2 = 18$ ， $AB^2 = (4 - 3)^2 + 1^2 = 2$ ， $AD^2 = (3 - 1)^2 + 4^2 = 20$ ，

$BD^2 + AB^2 = AD^2$ ， $\therefore \angle ABD = 90^\circ$ ，即 $\triangle ABD$ 是直角三角形.

（3）存在.

由题意知：直线 $y = x - 5$ 交 y 轴于点 $E(0, -5)$ ，交 x 轴于点 $F(5, 0)$

$\therefore OE = OF = 5$ ，

又 $\because OB = OD = 3$

$\therefore \triangle OEF$ 与 $\triangle OBD$ 都是等腰直角三角形

$\therefore BD \parallel l$ ，即 $PA \parallel BD$

那么构成平行四边形只能是 $PADB$ 或 $PABD$ ，如图，

过点 P 作 y 轴的垂线，过点 A 作 x 轴的垂线交过 P 且平行于 x 轴的直线于点 G .

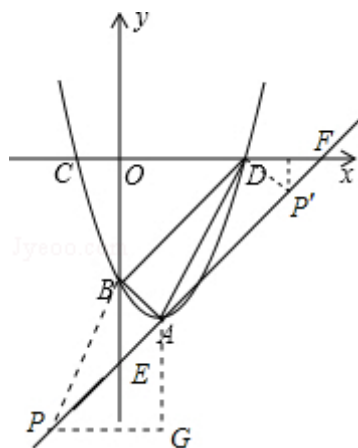
设 $P(x_1, x_1 - 5)$ ，那么 $G(1, x_1 - 5)$

那么 $PG = |1 - x_1|$ ， $AG = |5 - x_1 - 4| = |1 - x_1|$

$PA = BD = 3\sqrt{2}$ 由勾股定理得： $(1 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 = 18$ ， $x_1^2 - 2x_1 - 8 = 0$ ， $x_1 = -2$ 或 4

$\therefore P(-2, -7)$ 或 $P(4, -1)$ ，

存在点 $P(-2, -7)$ 或 $P(4, -1)$ 使以点 A 、 B 、 D 、 P 为顶点的四边形是平行四边形.



周长类

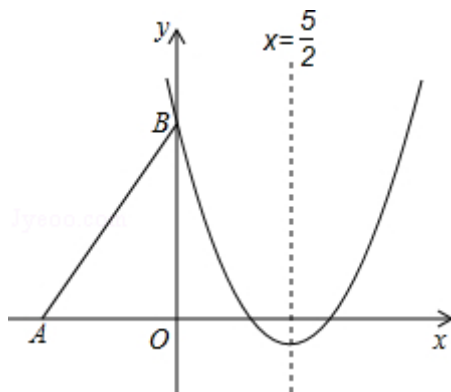
6. 如图, $Rt\triangle ABO$ 的两直角边 OA 、 OB 分别在 x 轴的负半轴和 y 轴的正半轴上, O 为坐标原点, A 、 B 两点的坐标分别为 $(-3, 0)$ 、 $(0, 4)$, 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 B , 且顶点在直线 $x=1$ 上.

(1) 求抛物线对应的函数关系式;

(2) 假设把 $\triangle ABO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DCE$, 点 A 、 B 、 O 的对应点分别是 D 、 C 、 E , 当四边形 $ABCD$ 是菱形时, 试判断点 C 和点 D 是否在该抛物线上, 并说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 BD , 对称轴上存在一点 P 使得 $\triangle PBD$ 的周长最小, 求出 P 点的坐标;

(4) 在 (2)、(3) 的条件下, 假设点 M 是线段 OB 上的一个动点 (点 M 与点 O 、 B 不重合), 过点 M 作 BD 的平行线交 x 轴于点 N , 连接 PM 、 PN , 设 OM 的长为 t , $\triangle PMN$ 的面积为 S , 求 S 和 t 的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围, S 是否存在最大值? 假设存在, 求出最大值和此时 M 点的坐标; 假设不存在, 说明理由.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/198047137001006130>