

吉林省东北师范大学附属中学 2022-2023 学年高三下学期第

二次模拟考试数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题

1. 设集合 $P = \{x | y = \lg x\}$, 集合 $Q = \{x | y = \sqrt{2+x}\}$, 则 $P \cap (\complement_{\mathbb{R}} Q) =$

- A. $[-2, 0]$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, -2)$

2. i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{2+i}{1-2i}$, 复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 $\bar{z}$ 的虚部为 ()

- A. -1 B. -2 C. $-2i$ D. $-i$

3. 已知向量 $\vec{a} = (m, 3)$, $\vec{b} = (1, m)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 则 $|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}| =$ ()

- A. 54 B. 48 C. $3\sqrt{6}$ D. $4\sqrt{3}$

4. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 最早可见于我国南北朝时期的数学著作《孙子算经》. 1852 年, 英国传教士伟烈亚力将该解法传至欧洲, 1874 年, 英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得到的关于同余式解法的一般性定理, 因而西方称之为“中国剩余定理”. 此定理讲的是关于整除的问题, 现将 1 到 2023 这 2023 个数中, 能被 7 除余 1 且被 9 除余 1 的数按从小到大的顺序排成一列, 构成数列 $\{a_n\}$, 则该数列的和为 ()

- A. 30014 B. 30016 C. 33297 D. 33299

5. 一个圆锥的侧面展开图是半径为 1 的半圆, 则此圆锥的内切球的表面积为 ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

6. 已知 $a = \cos 1$, $b = e^{\sin 1 - 1}$, $c = \frac{3}{4}$, 则下列不等关系正确的是 ()

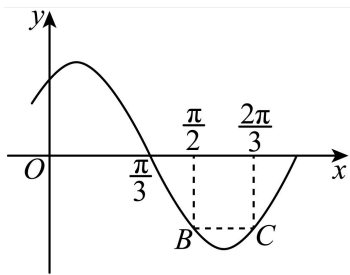
- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

7. 直线 l 的方程为 $(\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y - 3\lambda = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$, 当原点 O 到直线 l 的距离最大时, λ 的值为 ()

- A. -1 B. -5 C. 1 D. 5

8. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图, $BC \parallel x$ 轴, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

时, 不等式 $f(x) \geq m - \sin 2x$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 ()



- A. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \sqrt{3}\right]$ D. $\left(-\infty, 1\right]$

二、多选题

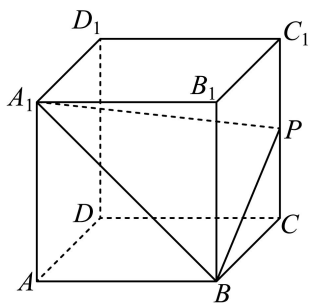
9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$, 当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x)=x^2-3x$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x+6)=f(x)$ B. $x \in [-6, -3]$ 时, $f(x)=x^2-3x-6$
C. $f(2021)+f(2023)=f(2022)$ D. $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=2$

10. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1=1$, $a_n a_{n+1}=2^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^+)$, $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 前 n 项的积为 T_n , 则下列结论正确的是 ()

- A. $a_3=2$ B. $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$ C. $S_n=2^n-1$ D. $T_{2n}=2^{n(2n-1)}$

11. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD=60^\circ$, $AB=AD=AA_1=2$, P 为 CC_1 中点, 点 Q 在四边形 CC_1D_1D 内 (包括边界) 运动, 下列结论正确的是 ()



- A. 若 $\overrightarrow{DQ}=\lambda \overrightarrow{DC}+\mu \overrightarrow{DD_1}$, 且 $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$, 则四面体 A_1BPQ 的体积为定值
B. 若 $AQ \parallel$ 平面 A_1BP , 则 AQ 的最小值为 $\sqrt{5}$
C. 若 $\triangle A_1BQ$ 的外心为 O , 则 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1O}$ 为定值 2
D. 若 $AQ=\sqrt{7}$, 则点 Q 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{3}$

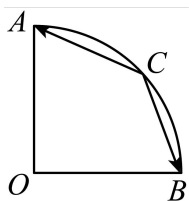
12. 已知函数 $f(x)=a^x \ln a$, $g(x)=a \ln(x-1)$, 其中 $a>0$ 且 $a \neq 1$. 若函数

$h(x)=f(x)-g(x)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 当 $0 < a < 1$ 时, $h(x)$ 有且只有一个零点
- B. 当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 时, $h(x)$ 有两个零点
- C. 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且只有两条公切线
- D. 若 $h(x)$ 为单调函数, 则 $e^{-e} \leq a < 1$

三、填空题

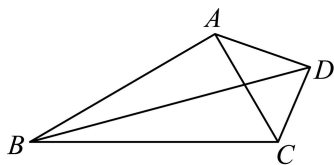
13. 若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$ _____.
14. 如图, 单位向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 点 C 在以 O 为圆心, 1 为半径的弧 AB 上运动, 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的最小值为_____.



15. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2^x - 2^{-x}$, 若实数 a, b 满足 $f(2a^2) + f(b^2 - 1) = 0$, 则 $a\sqrt{1+2b}$ 的最大值为_____.
16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知动圆 M 的方程为 $(x+a+1)^2 + (y-2a+1)^2 = 1 (a \in \mathbb{R})$, 则圆心 M 的轨迹方程为_____. 若对于圆 M 上的任意点 P , 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上均存在点 Q , 使得 $\angle OPQ = 30^\circ$, 则满足条件的圆心 M 的轨迹长度为_____.

四、解答题

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 中 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AD \perp CD$, 设 $\angle ACD = \theta$.



- (1) 若 $\triangle ABC$ 面积是 $\triangle ACD$ 面积的 4 倍, 求 $\sin 2\theta$;
- (2) 若 $\angle ADB = \frac{\pi}{6}$, 求 $\tan \theta$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=4$, $\frac{a_n}{S_n}=\frac{n+1}{2n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=\frac{a_n}{2^n}-1$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}$ 的值.

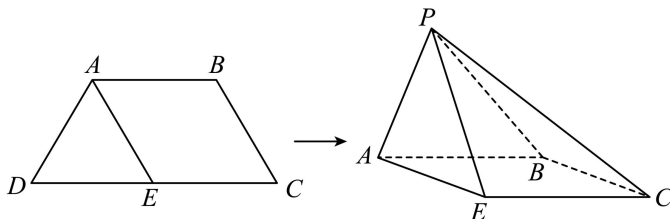
19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+(1-a)x+(a-2)\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

20. 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, $AD=AB=BC=1$, $CD=2$, E 为 CD 中点,

以 AE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置 ($P\notin$ 平面 $ABCE$).



(1) 证明: $AE\perp PB$;

(2) 若直线 PB 与平面 $ABCE$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 求平面 APE 与平面 CPE 夹角的余弦值.

21. 已知圆 $M:x^2+(y-4)^2=4$, P 是直线 $l:x-2y=0$ 上的动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA , 切点为 A .

(1) 当切线 PA 的长度为 $2\sqrt{3}$ 时, 求点 P 的坐标.

(2) 若 $\triangle PAM$ 的外接圆为圆 N , 试问: 当点 P 运动时, 圆 N 是否过定点? 若过定点, 求出所有的定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x)=e^{ax}\cdot\cos x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a=2$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上存在唯一的极小值点.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 记 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的极小值为 $g(a)$, 讨论函数 $g(a)$ 的单调性.

参考答案:

1. D

【详解】分析:先化简集合 P 和 Q,再求 $\partial_R Q$ 和 $P \cap (\partial_R Q)$.

详解: 由题得 $P = R, Q = \{x | x \geq -2\}$, 所以 $\partial_R Q = \{x | x < -2\}$,

所以 $P \cap (\partial_R Q) = (-\infty, -2)$, 故答案为 D

点睛: (1) 本题主要考查集合的化简和集合的运算, 意在考查学生对这些基础知识的掌握能力. (2) 本题是易错题, 解答集合的题目时, 首先要看集合“ $\{$ ”前集合元素的一般形式, 本题

$P = \{y | y = \lg x\}$, 表示的是函数的值域. 集合 $Q = \{x | y = \sqrt{2+x}\}$ 表示的是函数的定义域.

2. A

【分析】利用复数的除法化简复数 z , 利用共轭复数的定义以及复数的概念可得结果.

【详解】因为 $z = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i$, 故 $\bar{z} = -i$,

因此, $\bar{z}$ 的虚部为 -1.

故选: A.

3. D

【分析】首先根据题意得到 $m = -\sqrt{3}$, 再求 $|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}|$ 即可.

【详解】向量 $\vec{a} = (m, 3)$, $\vec{b} = (1, m)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反,

所以 $m^2 - 3 = 0$, 解得 $m = -\sqrt{3}$.

所以 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} = (-\sqrt{3}, 3) - (\sqrt{3}, -3) = (-2\sqrt{3}, 6)$,

$|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}| = \sqrt{12+36} = 4\sqrt{3}$.

故选: D

4. C

【分析】得到 $a_n = 63n - 62$, 从而得到 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项为 1, 公差为 63, 利用等差数列求和公式求出答案.

【详解】由已知可得 $a_n - 1$ 既能被 7 整除, 又能被 9 整除,

故 $a_n - 1$ 能被 63 整除, 所以 $a_n - 1 = 63(n-1)$, 即 $a_n = 63n - 62$,

所以 $a_{n+1} - a_n = 63(n+1) - 62 - (63n - 62) = 63$,

故 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项为 1, 公差为 63,

由 $1 \leq a_n \leq 2023$ 可得: $1 \leq 63n - 62 \leq 2023$,

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $1 \leq n \leq 33$, $n \in \mathbf{N}^*$,

故该数列的和为 $33 + \frac{33 \times 32}{2} \times 63 = 33297$.

故选: C

5. C

【分析】由侧面展开图的半圆弧长等于圆锥底面圆周长可构造方程求得圆锥底面半径, 由此可确定圆锥轴截面为正三角形, 求得正三角形内切圆半径即为所求内切球半径, 代入球的表面积公式即可得到结果.

【详解】设圆锥底面半径为 r , 则 $2\pi r = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 = \pi$, 解得: $r = \frac{1}{2}$;

$\therefore$ 圆锥的轴截面是边长为 1 的正三角形,

$\therefore$ 此正三角形内切圆的半径为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{1 - r^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 即圆锥内切球半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

$\therefore$ 圆锥内切球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{3}$.

故选: C.

6. A

【分析】构造 $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 得到 $e^{\sin 1 - 1} > \sin 1$, 构造 $t(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x > 0$,

多次求导得到 $\sin 1 > \frac{5}{6}$, 从而得到 $b = e^{\sin 1 - 1} > \frac{5}{6}$, 再构造 $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)$, $x > 0$,

多次求导后得到 $\cos 1 < \frac{13}{24}$, 从而比较出大小.

【详解】设 $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$,

故 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x) = e^x - x - 1$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

因为 $\sin 1 - 1 \neq 0$, 故 $b = e^{\sin 1 - 1} > \sin 1 - 1 + 1 = \sin 1$,

$$\text{设 } t(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3, \quad x > 0,$$

$$\text{则 } t'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad x > 0,$$

$$\text{设 } r(x) = t'(x), \text{ 则 } r'(x) = -\sin x + x, \quad x > 0,$$

$$\text{设 } e(x) = r'(x), \text{ 则 } e'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \text{ 在 } x > 0 \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{故 } r'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 则 } r'(x) > r'(0) = 0,$$

$$\text{故 } t'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 则 } t'(x) > t'(0) = 0,$$

$$\text{故 } t(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{则 } t(x) > t(0) = 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } t(1) = \sin 1 - 1 + \frac{1}{6} > 0, \text{ 则 } \sin 1 > \frac{5}{6},$$

$$\text{故 } b = e^{\sin 1 - 1} > \frac{5}{6},$$

$$\text{设 } g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right), \quad x > 0,$$

$$\text{故 } g'(x) = -\sin x - \left(-x + \frac{1}{6}x^3\right), \quad x > 0,$$

$$\text{设 } h(x) = g'(x), \text{ 则 } h'(x) = -\cos x + 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad x > 0,$$

$$\text{设 } j(x) = h'(x), \text{ 则 } j'(x) = \sin x - x, \quad x > 0,$$

$$\text{设 } k(x) = j'(x), \text{ 则 } k'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{故 } j'(x) = \sin x - x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减, 故 } j'(x) < j'(0) = 0,$$

$$\text{故 } h'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减, 故 } h'(x) < h'(0) = 0,$$

$$\text{故 } g'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减, 故 } g'(x) < g'(0) = 0,$$

$$\text{故 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减, 故 } g(x) < g(0) = 0,$$

$$\text{所以 } g(1) = \cos 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) < 0, \text{ 即 } \cos 1 < \frac{13}{24},$$

$$\text{又 } \cos 1 < \frac{13}{24} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < e^{\sin 1 - 1}, \text{ 即 } a < c < b.$$

故选: A

【点睛】方法点睛: 麦克劳林展开式常常用于放缩法进行比较大小, 常用的麦克劳林展开式

如下:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n), \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

7. B

【分析】求出直线 $(\lambda+2)x + (\lambda-1)y - 3\lambda = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 所过定点 A 的坐标, 分析可知当 $OA \perp l$ 时, 原点 O 到直线 l 的距离最大, 利用两直线垂直斜率的关系可求得实数 λ 的值.

【详解】直线方程 $(\lambda+2)x + (\lambda-1)y - 3\lambda = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 可化为 $\lambda(x+y-3) + (2x-y) = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases},$$

所以, 直线 $(\lambda+2)x + (\lambda-1)y - 3\lambda = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 过定点 $A(1,2)$,

当 $OA \perp l$ 时, 原点 O 到直线 l 的距离最大, 且 $k_{OA} = 2$,

又因为直线 l 的斜率为 $k = -\frac{\lambda+2}{\lambda-1} = -\frac{1}{2}$, 解得 $\lambda = -5$.

故选: B.

8. A

【分析】利用三角函数的图象性质和三角恒等变换求解.

【详解】因为 $BC \parallel x$ 轴, 所以图象最低点的横坐标为 $\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12}$,

所以 $\frac{1}{4}T = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ 解得 $\omega = 2$,

又因为 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1$,

所以 $\frac{7\pi}{6} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{由 } f(x) \geq m - \sin 2x \text{ 可得 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq m - \sin 2x,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \geq m - \sin 2x \text{ 也即 } \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \geq m,$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \text{ 所以 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right], \text{ 所以 } g(x) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right],$$

$$\text{因为 } g(x) \geq m \text{ 恒成立, 所以 } m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选:A.

9. AC

【分析】根据函数的满足 $f(x-3) = -f(x)$, 可确定函数的周期性, 从而可判断 A; 结合周期性由 $x \in [0, 3]$ 时的解析式即可得 $x \in [-6, -3]$ 时的解析式, 从而可判断 B; 根据函数周期性与对称性即可判断 C, D.

【详解】因为函数 $f(x)$ 的 $f(x-3) = -f(x)$, 所以 $f(x) = -f(x+3)$, 则 $f(x-3) = f(x+3)$,

故函数 $f(x)$ 的周期为 6, 所以 $f(x+6) = f(x)$, 故 A 正确;

又当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = x^2 - 3x$, 则当 $x \in [-6, -3]$ 时, $x+6 \in [0, 3]$,

$f(x) = f(x+6) = (x+6)^2 - 3(x+6) = x^2 + 9x + 18$, 故 B 不正确;

由周期可得 $f(2021) = f(-1)$, $f(2023) = f(1)$, $f(2022) = f(0)$, 又函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x) = -f(-x)$,

所以 $f(0) = 0$, $f(1) = -f(-1)$, 即 $f(1) + f(-1) = f(0)$, 所以 $f(2021) + f(2023) = f(2022)$,

故 C 正确;

当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = x^2 - 3x$, 所以 $f(1) = -2$, $f(2) = -2$, $f(3) = 0$, 又因为 $f(x) = -f(-x)$,

所以 $f(4) = -f(-4) = -f(2) = 2$, $f(5) = -f(-5) = -f(1) = 2$, $f(6) = f(0) = 0$,

则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0$, 所以

$$\sum_{k=1}^{2023} f(k) = 337 \sum_{k=1}^6 f(k) + f(1) = 337 \times 0 - 2 = -2, \text{ 故 D 不正确.}$$

故选：AC.

10. BCD

【分析】令 $n=1$ 可求得 a_2 的值，推导出 $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$ ，分析可知数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项和偶数项分别成以 4 为公比的等比数列，求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，逐项判断可得出合适的选项.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_n a_{n+1}=2^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

当 $n=1$ 时，则有 $a_1 a_2=2$ ，可得 $a_2=2$ ，

当 $n \geq 2$ 时，由 $a_n a_{n+1}=2^{2n-1}$ 可得 $a_{n-1} a_n=2^{2n-3}$ ，

上述两个等式相除可得 $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$ ，B 对；

所以，数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项和偶数项分别成以 4 为公比的等比数列，

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $a_n=a_{2k-1}=a_1 \cdot 4^{k-1}=2^{2k-2}=2^{n-1}$ ，

当 n 为偶数时，设 $n=2k (k \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $a_n=a_{2k}=a_2 \cdot 4^{k-1}=2^{2k-1}=2^{n-1}$ ，

故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_n=2^{n-1}$ ，所以， $a_3=2^2=4$ ，A 错；

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且该数列的首项为 1，公比为 2，

则 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$ ，C 对；

$T_{2n}=a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n}=2^{0+1+2+\cdots+(2n-1)}=2^{\frac{(2n-1)2n}{2}}=2^{n(2n-1)}$ ，D 对.

故选：BCD.

11. AB

【分析】对于 A，取 DD_1, DC 的中点分别为 M, N ，由条件确定 Q 的轨迹，结合锥体体积公式判断 A；对于 B，由面面平行的判定定理可得平面 $A_1BP \parallel$ 平面 AMN ，从而可得 $AQ \parallel$ 平面 A_1BP ，进而可求得 AQ 的最小值；对于 C，由三角形外心的性质和向量数量积的性质可判断，对于 D，由条件确定点 Q 的轨迹为圆弧 A_2A_3 ，利用弧长公式求轨迹长度即可判断.

【详解】对于 A，取 DD_1, DC 的中点分别为 M, N ，连接 AM, AN, MN, DQ ，则 $\overline{DD_1}=2\overline{DM}$ ， $\overline{DC}=2\overline{DN}$ ， $MN \parallel D_1C$ ，

因为 $\overrightarrow{DQ} = \lambda \overrightarrow{DC} + \mu \overrightarrow{DD_1}$, $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$, 所以 $\overrightarrow{DQ} = 2\lambda \overrightarrow{DN} + 2\mu \overrightarrow{DM}$, $2\lambda + 2\mu = 1$,

所以 Q, M, N 三点共线, 所以点 Q 在 MN , 因为 $D_1C \parallel A_1B$, $MN \parallel D_1C$,

所以 $MN \parallel A_1B$, $MN \not\subset$ 平面 A_1BP , $A_1B \subset$ 平面 A_1BP , 所以 $MN \parallel$ 平面 A_1BP ,

所以点 Q 到平面 A_1BP 的距离为定值, 因为 $\triangle A_1BP$ 的面积为定值,

所以四面体 A_1BPQ 的体积为定值, 所以 A 正确;

对于 B, 因为 $AM \parallel BP$, 因为 $AM \not\subset$ 平面 A_1BP , $BP \subset$ 平面 A_1BP ,

所以 $AM \parallel$ 平面 A_1BP , 又 $AQ \parallel$ 平面 A_1BP , $AQ \cap AM = M$, $AQ, AM \subset$ 平面 AMQ ,

所以平面 $AMQ \parallel$ 平面 A_1BP , 取 D_1C_1 的中点 E , 连接 PE , 则 $PE \parallel D_1C$, $D_1C \parallel A_1B$,

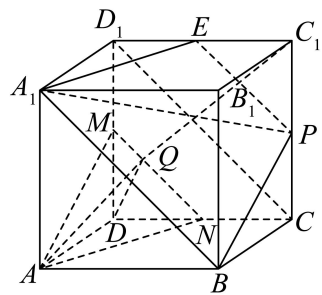
所以 $PE \parallel A_1B$, 所以 A_1, B, P, E 四点共面, 所以平面 $AMQ \parallel$ 平面 A_1BPE ,

即 Q 在 MN 上, 当 $AQ \perp MN$ 时, AQ 取最小值,

因为 $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AD = AA_1 = 2$, 所以 $AM = \sqrt{5}$, $MN = \sqrt{2}$,

$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2 - 2AD \cdot DN \cos 120^\circ} = \sqrt{4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{7}$, 所以

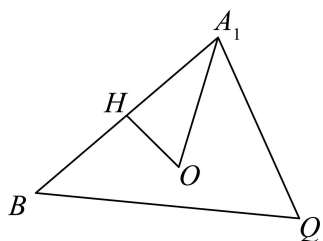
$AM^2 + MN^2 = AN^2$, 所以 Q, M 重合, 所以 AQ 的最小值为 $\sqrt{5}$, 所以 B 正确;



对于 C, 若 $\triangle A_1BQ$ 的外心为 O , 过 O 作 $OH \perp A_1B$ 于 H ,

因为 $|\overrightarrow{A_1B}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1O} = \overrightarrow{A_1B} \cdot (\overrightarrow{A_1H} + \overrightarrow{HO}) = \overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1H} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1B}^2 = 4$, 所以 C 错误;



对于 D, 过 A_1 作 $A_1K \perp C_1D_1$, 垂足为 K , 因为 $DD_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

$A_1K \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $DD_1 \perp A_1K$,

因为 $C_1D_1 \cap DD_1 = D_1$, $C_1D_1, DD_1 \subset$ 平面 DD_1C_1C , 所以 $A_1K \perp$ 平面 DD_1C_1C ,

因为 $KQ \subset$ 平面 DD_1C_1C , 所以 $A_1K \perp KQ$,

又在 $\triangle A_1KD_1$ 中, $A_1D_1 = 2, \angle A_1KD_1 = \frac{\pi}{2}, A_1D_1K = \frac{\pi}{3}$,

所以 $KD_1 = A_1D_1 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, $A_1K = A_1D_1 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

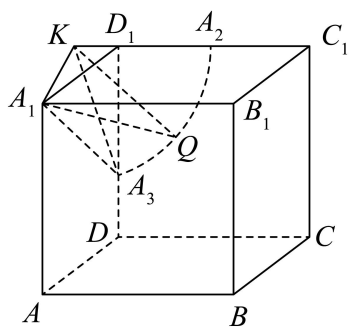
在 $\triangle A_1KQ$ 中, $A_1K = \sqrt{3}$, $A_1Q = \sqrt{7}$, $\angle A_1KQ = \frac{\pi}{2}$, 所以 $KQ = 2$,

则 Q 在以 K 为圆心, 2 为半径的圆上运动,

在 DD_1, D_1C_1 上取点 A_3, A_2 , 使得 $D_1A_3 = \sqrt{3}, D_1A_2 = 1$, 则 $KA_3 = KA_2 = 2$,

所以点 Q 的轨迹为圆弧 A_2A_3 , 因为 $D_1K = 1, D_1A_3 = \sqrt{3}$, 所以 $\angle A_3KA_2 = \frac{\pi}{3}$,

则圆弧 A_2A_3 等于 $\frac{2\pi}{3}$, 所以 D 错误;



故选: AB

【点睛】关键点睛: 本题解决的关键在于根据所给条件结合线面位置关系确定点的轨迹, 再结合锥体体积公式, 空间图形与平面图形的转化解决问题.

12. BCD

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/198050034022006033>