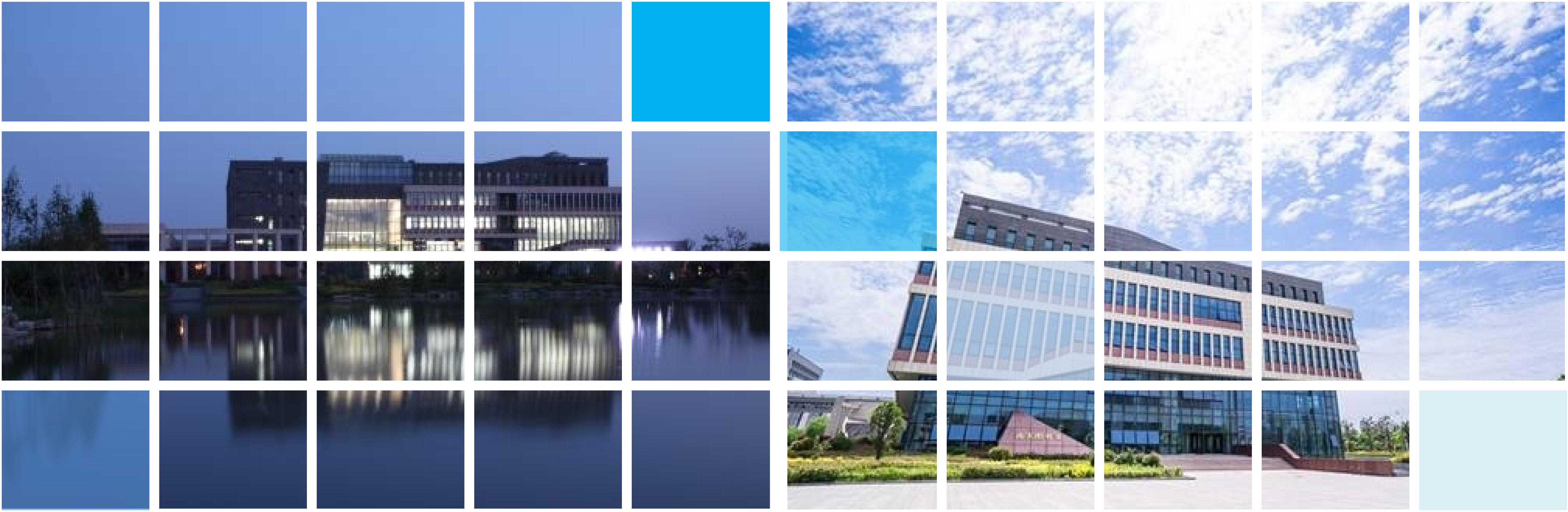
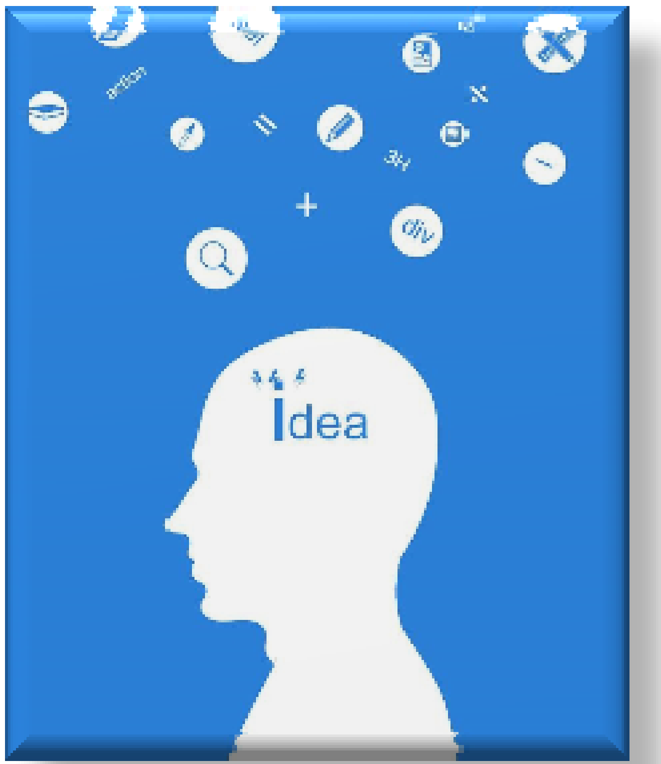


学科基础课之

高等数学

目录页 CONTENTS PAGE

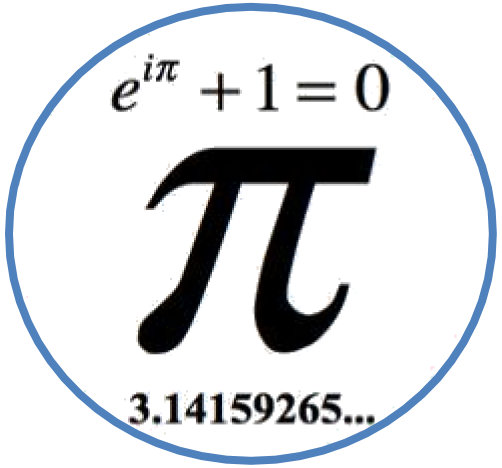


第1章　函数与极限

第2章　导数与微分

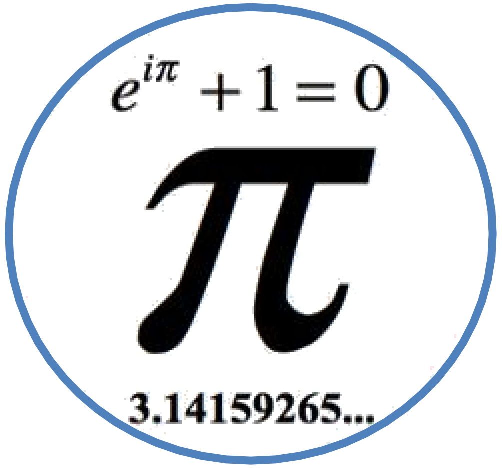
第3章　中值定理与导数应用

第4章　不定积分



第1章　函数与极限

- 函数
- 数列的极限
- 函数的极限
- 无穷小与无穷大
- 极限运算法则
- 两个重要极限
- 函数的连续性



❷ 数列的极限

- 概念的引入
- 数列的基本概念
- 数列极限的定义
- 极限存在的两个准则

一、概念的引入

1. 割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

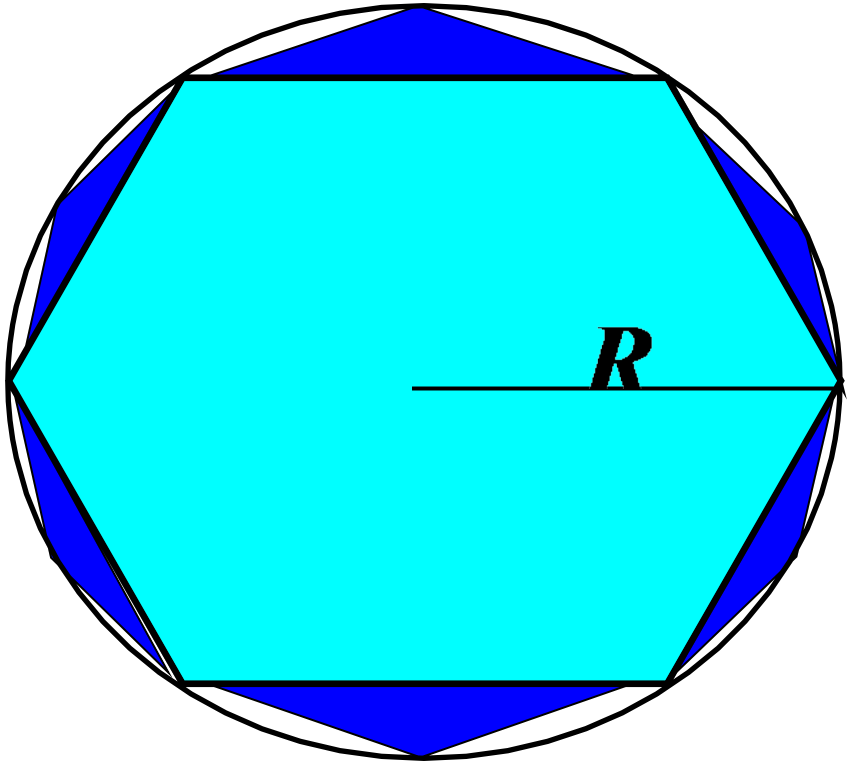
——(魏晋)刘徽

正六边形的面积A_1

正十二边形的面积A_2

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

正$6 \times 2^{n-1}$形的面积A_n



$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S$$

刘徽从圆内接正六边形开始，逐次边数加倍到正3072边形得到圆周率π的近似值为3.1416

2. 截杖问题

“一尺之棰，日截其半，万世不竭

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$

$\vdots \qquad \vdots$

第n天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

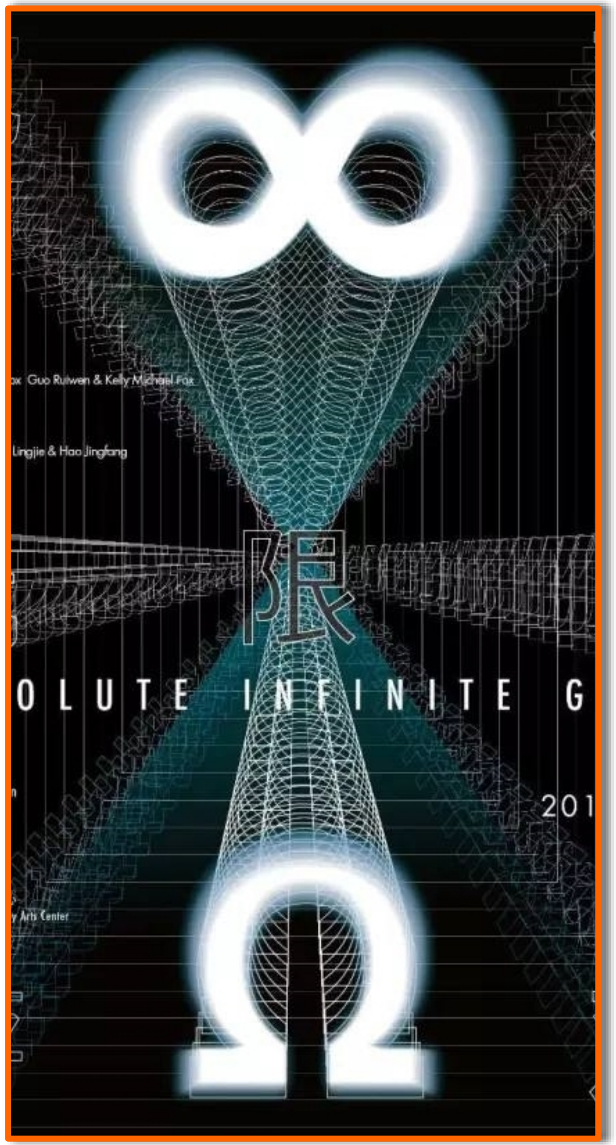
$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

前面两个古代事例都有一个共同点就是出现了“无限接近”这个思想，这正是极限概念的原始面貌。极限概念是由于求某些问题的精确答案而产生的。

割圆术和杖棰问题使用的都是极限论的方法。

第一个是把一个固定不变的量看作是一系列变化着的多边形面积的趋向，从而确定出面积的大小。而第二个则是杖棰剩余问题，看作一系列变化着的剩余趋向于一个确定量的问题。

无论是杖棰的剩余长度，还是正多边形的面积，都可以看作是关于 n 的一个数列$\{x_n\}$，而这个数列中的项随着 n 增加产生一个什么样的变化过程则是大家最关心的，极限就是讨论这一类问题的数学模型。



二、数列的基本概念

定义 按自然数1, 2, 3, □ 编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \square, x_n, \square$$

称为无穷数列，简称数列。其中的每个数称为数列的项，

x_n 称为通项(一般项)

$\{x_n\}$ 记为

例如

$2,\ 4,\ 8,\ L\ ,\ 2^n,\ L$ $\qquad\qquad \{2^n\}$

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ L\ ,\ \frac{1}{2^n},\ L$ $\qquad\qquad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

$1,\ -1,\ 1,\ L\ ,\ (-1)^{n+1},\ L$ $\qquad\qquad \{(-1)^{n-1}\}$

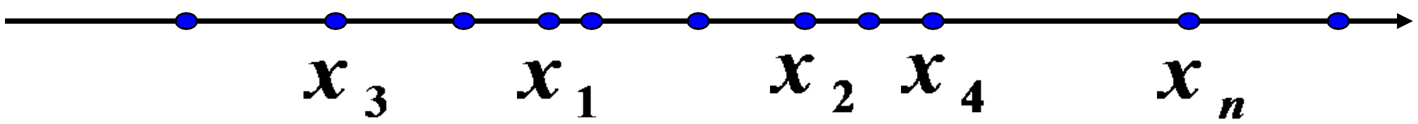
$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ L\ ,\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ L$ $\qquad\qquad \left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$

$\sqrt{3},\ \sqrt{3+\sqrt{3}},\ L\ ,$

递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$

注意

1. 数列对应着数轴上一个点列，可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2. 数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

3. 从一个数列中取出无穷多项组成的新的数列称为原数列的子数列

注意

4. 如果数列$\{x_n\}$满足$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$，就称之为单调增加数列；

如果满足$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$，就称之为单调减少数列.

5. 若$\exists M$，使得$x_n \le M$，就称数列$\{x_n\}$有上界；

若$\exists M$，使得$x_n \ge M$，就称数列$\{x_n\}$有下界；

假如$\exists M > 0$，使得$|x_n| \le M$，就称$\{x_n\}$有界.

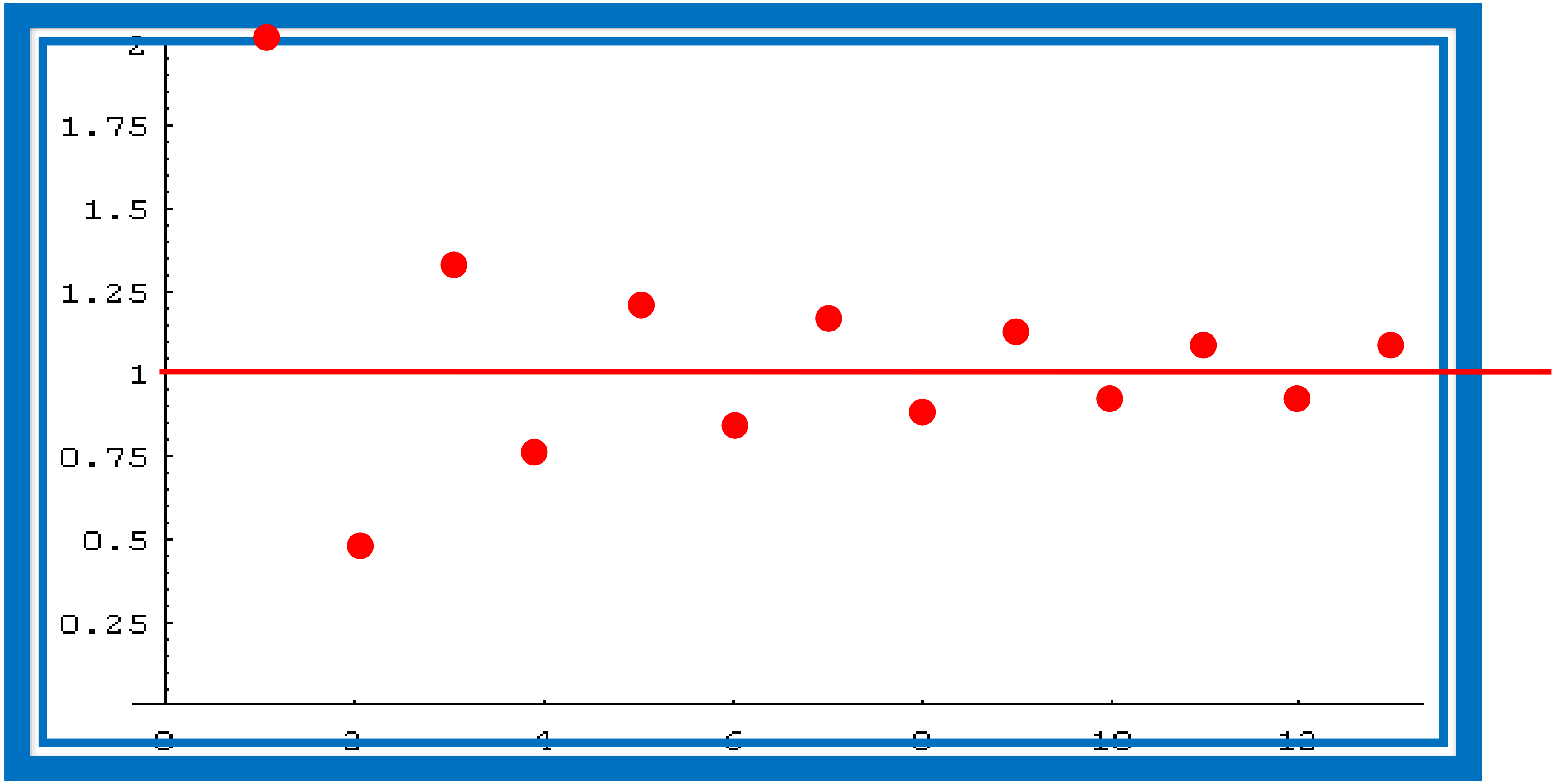
三、数列极限的定义

定义 已知数列$\{x_n\}$，A是一个常数. 如果当n无限增大时，x_n无限接近于A，则称当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限为A，也称数列$\{x_n\}$收敛于A.

记作
$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \to A \quad (n\to\infty)$$

说明 这是数列极限的描述性定义。按照定义，通过观察我们能够认知一些简单的结果。

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势



问题 当 n 无限增大时，x_n 是否无限接近于一确定数值？

通过上面演示实验的观察有

当 n 无限增大时，$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

"无限增大，无限接近"意味着什么？

我们该如何用数学语言定量地刻划它？

a 接近 b 的程度用绝对值：$|a-b|$ 表示