第 18 讲 一次函数的应用

模块导航

模块一 思维导图串知识
模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
模块三 核心考点举一反三
模块四 小试牛刀过关测

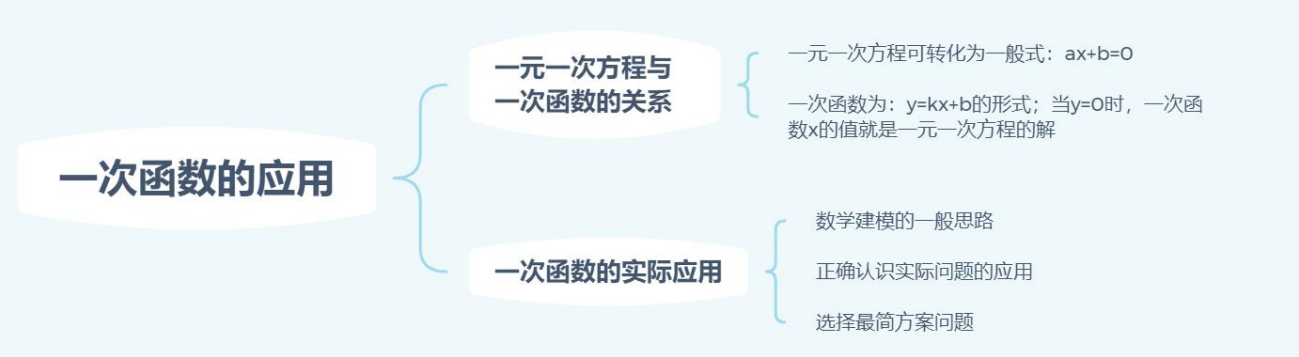
素养目标

1．掌握一次函数与一元一次方程之间的关系；

2．掌握单个一次函数图象的应用及两个一次函数图象的应用；

3．能利用一次函数的图象和性质解决实际数学问题。

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点一 一元一次方程与一次函数的关系

1）一元一次方程可转化为一般式：$ax+b=0$

2）一次函数为：$y=kx+b$ 的形式；当 $y=0$ 时，一次函数 x 的值就是一元一次方程的解。

$y=0$ 时 x 的值，即一次函数与 x 轴的交点横坐标，就是对应一元一次方程的解

3）每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也对应两条直线.从“数”的角度看，解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等，以及这时的函数为何值；从“形”的角度看，解方程组相当于确定两条直线交点的坐标.

知识点二 一次函数的实际应用

1）数学建模的一般思路

数学建模的关键是将实际问题数学化，从而得到解决问题的最佳方案、最佳策略.在建模的过程中，为了既合乎实际问题又能求解，这就要求在诸多因素中抓住主要因素进行抽象化简，而这一过程恰是我们的分析、抽象、综合、表达能力的体现.函数建模最困难的环节是将实际情景通过数学转化为什么样的函数模型.

2）正确认识实际问题的应用

在实际生活问题中，如何应用函数知识解题，关键是建立函数模型，即列出符合题意的函数解析式，然后根据函数的性质综合方程（组）、不等式（组）及图象求解.

注：要注意结合实际，确定自变量的取值范围，这是应用中的难点，也是中考的热门考点.

3）选择最简方案问题

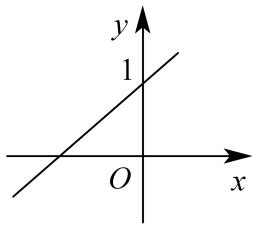
分析问题的实际背景中包含的变量及对应关系，结合一次函数的解析式及图象，通过比较函数值的大小等，寻求解决问题的最佳方案，体会函数作为一种数学模型在分析解决实际问题中的重要作用.

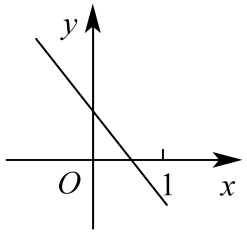
模块三 核心考点举一反三

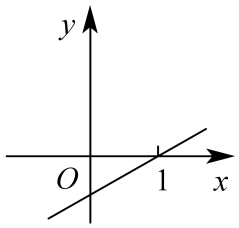
考点一：已知直线与坐标轴交点求一元一次方程的解

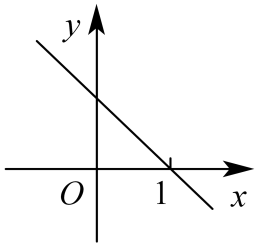
例 1.（2023 春·八年级课时练习）直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 过点 $A(0,1)$，$B(2,0)$，则关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为_____.

【变式 1-1】（2024·陕西·一模）已知关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=\frac{1}{2}$，则一次函数 $y=kx+b$（k、b 为常数，且 $k\neq 0$）的图象可能是（　）

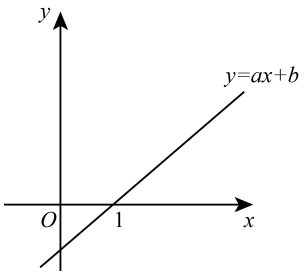
A. 

B. 

C. 

D. 

【变式 1-2】（2023 春·浙江台州·八年级统考期末）如图，直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $(1,0)$，则关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为 _____.



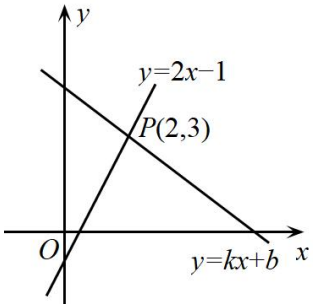
【变式 1-3】（2023 秋·广东惠州·九年级校考开学考试）一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中，x 与 y 的部分对应值，如下表：那么，一元一次方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=$_____.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-4	-2	0	2

考点二：利用图象法解一元一次方程

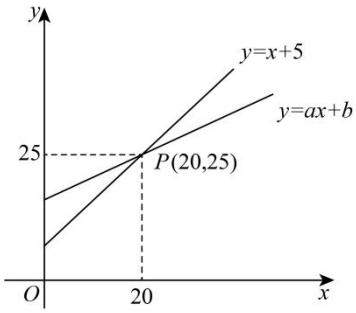
例 2.（2023 春·河北石家庄·八年级校考期中）数形结合是解决数学问题常用的思想方法．如图，直线 $y=2x-1$ 与直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 相交于点 $P(2,3)$．根据图像可知，关于 x 的方程 $2x-1=kx+b$ 的解是

（　　）



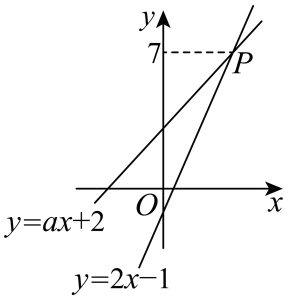
A．$x=1$　　B．$x=2$　　C．$x=3$　　D．$x=4$

【变式 2-1】（2023 春·山东烟台·七年级统考期末）如图，直线 $y=x+5$ 和直线 $y=ax+b$ 相交于点 $P(20,25)$，则方程 $x+5=ax+b$ 的解是（　　）



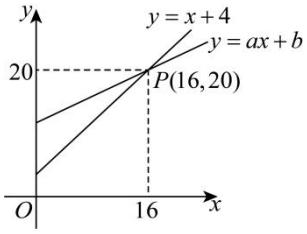
A．$x=25$　　B．$x=20$　　C．$x=15$　　D．$x=5$

【变式 2-2】（23-24 八年级下·陕西商洛·阶段练习）如图，一次函数 $y=ax+2$（$a\neq0$ 且 a 为常数）与 $y=2x-1$ 的图像相交于点 P，且点 P 的纵坐标为 7，则关于 x 的方程 $ax+2=2x-1$ 的解是（　　）



A．$x=1$　　B．$x=4$　　C．$x=3$　　D．$x=2$

【变式 2-3】（2023 春·河南商丘·八年级统考期末）如图，直线 $y=x+4$ 和直线 $y=ax+b$ 相交于点 P，根据图像可知，关于 x 的方程 $x+4=ax+b$ 的解是（　　）



A．$x=16$ 或 $x=20$　B．$x=20$　　C．$x=16$　　D．$x=-16$

考点三：一次函数的应用——分配方案问题

例 3.（2024·河南周口·三模）某家用电器厂生产一种电饭煲和一种电热水壶，电饭煲每个定价 200 元，电热水壶每个定价 60 元．厂方在开展促销活动期间，向客户提供以下两种优惠方案：

方案一：每买一个电饭煲就赠送一个电热水壶；

方案二：电饭煲和电热水壶都按定价的80%付款．

某厨具店计划购进80个电饭煲和x个电热水壶$(x>80)$．设选择方案一需付款y_1元，选择方案二需付款y_2元．

(1)分别写出y_1，y_2关于x的函数表达式．

(2)当$x=200$时．

①请通过计算说明该厨具店选择上面哪种方案更省钱．

②若两种优惠方案可以同时使用（使用方案一优惠过的商品不能再使用方案二优惠，使用方案二优惠过的商品不能再使用方案一优惠），请你设计出更省钱的购买方案，并计算出该方案所需费用．

【变式 3-1】（2024·陕西宝鸡·三模）“生活即教育，行为即课程”．某校将劳动教育融入立德树人全过程．学校给每个班划分一块地供学生“种菜”，某班现要购买肥料对该地施肥，该班班长与农资店店主商量后，店主给出了两种购买方案（如表），且都送货上门．

方案	运费	肥料价格
方案一	12 元	3 元/kg
方案二	0 元	3.6 元/kg

若该班购买x千克肥料，按方案一购买的付款总金额为y_1元，按方案二购买的付款总金额为y_2元．

(1)请分别写出y_1,y_2与x之间的函数关系式；

(2)若该班计划用 180 元钱购买肥料，请问该班选择哪种购买方案购买的肥料较多？

【变式 3-2】（2024·安徽淮北·三模）某企业计划购进一批智能机器人，总价在 20 万元以上，商家推出两种分期付款购买机器人的活动：①首付款满 20 万元，减 2 万元；②首付款满 15 万元，分期交付的余款可享受八折优惠．

(1)该企业选中的智能机器人的总价为x万元，采取哪种付款方式比较省钱？请说明理由；

(2)已知购买智能机器人的总价低于 50 万元，除首付款之外，该企业分期付款的能力是每月 2 万元．若不考虑其他因素，为早日结清余款，该企业该怎样选择？请说明理由．

【变式 3-3】（2024·陕西渭南·一模）古人常说：“读书可以启智，读书可以明理，读书可以医愚”，读书不但可以让人增长智慧，开拓视野，而且还能让人明事理，知荣辱．某校为营造书香校园，计划购进 x 个某品牌书架，已知该品牌书架的单价为 200 元 / 个，经过与厂家协商，厂家给出两种优惠方案：

方案一：所有书架均按原价的八折销售；

方案二：若一次购买不超过 10 个，则每个书架按原价的九折销售；若一次购买超过 10 个，则前 10 个打九折，超过的部分每个书架的价格在九折的基础上再降低 30 元．

(1)分别求方案一实际付款金额 y_1（元）和方案二实际付款金额 y_2（元）与 x 之间的函数关系式；

(2)当 $x=20$ 时，请分别求出两种方案的实际付款金额，并判断选择哪种方案对学校来说更省钱．

考点四：一次函数的应用——最大利润问题

例 4.（23-24 九年级下·宁夏银川·期中）为满足顾客的购物需求，某水果店计划购进甲、乙两种水果进行销售．通过市场调研发现：购进 6 千克甲种水果和 10 千克乙种水果共需 110 元；乙种水果每千克的进价比甲种水果多 3 元．

(1)求甲、乙两种水果的进价分别是多少？

(2)已知甲、乙两种水果的售价分别为 7 元/千克和 11 元/千克，若水果店购进这两种水果共 200 千克，其中甲种水果的重量不低于乙种水果的 3 倍．则水果店应如何进货才能获得最大利润，最大利润是多少？

【变式 4-1】（2024·陕西咸阳·模拟预测）“读万卷书，行万里路”，最美的风景在路上．为了让同学们在实践中增长见识、提高学习兴趣、陶冶情操，某中学组织八年级师生共 600 人开展研学活动，现有甲、乙两种客车，它们的载客量和租金如表所示：

	甲型客车	乙型客车

载客量（人辆）	45	60
租金（元/辆）	800	1200

倘若甲、乙两种客车都需要租用，每位师生都有座位且座位没有剩余，设租 x 辆甲型客车，租车总费用为 y 元.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)请你设计一种租车方案，要求费用最省.

【变式 4-2】（2024·河南南阳·二模）为扎实推进“百县千镇万村高质量发展工程”，某镇已将区域内特色农产品：水晶梨和鹰嘴桃发展成品牌农业，形成“专业合作+基地+农户”产销一条龙服务的产业经营模式，促进农民增收．甲商场从该镇购买 500 斤水晶梨和 300 斤鹰嘴桃共用了 4300 元，已知水晶梨的单价比鹰嘴桃的单价少 1 元.

(1)水晶梨和鹰嘴桃的单价分别是多少元？

(2)若该商场一次性购买这两种水果 1200 斤，并且在一天内分别以水晶梨每斤 8 元，鹰嘴桃每斤 10 元的价格全部售出，经市场调查发现商场每天最多能售出鹰嘴桃 600 斤，若商场购买鹰嘴桃的数量为 n 斤，总利润为 w 元，求 w 关于 n 的函数关系式，并求出购买的鹰嘴桃为多少斤时，商场的利润最大，最大利润为多少元.

【变式 4-3】（23-24 八年级下·黑龙江绥化·期中）动画片《喜羊羊与灰太狼》正在热播中．某企业获得了生产羊公仔和狼公仔的专利．为了满足市场需求，该企业现在开始生产羊和狼两种类别的公仔，每天共生产 450 只；两种公仔成本和售价如下表所示，设每天生产羊公仔 x 只，共获利 y 元.

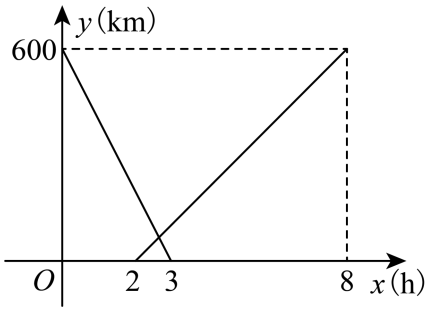
(1)求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)如果该企业每天投入成本不超过 10000 元，那么每天要获利最多，应生产羊公仔和狼公仔各多少只？

类别	成本（元/只）	售价（元/只）
羊公仔	20	23
狼公仔	30	35

考点五：一次函数的应用——行程问题

例 5.（23-24 八年级下·吉林长春·期中）一列城际快车从甲地出发匀速开往乙地，一列货运慢车从乙地出发匀速开往甲地．如图是快、慢两车离乙地的路程$y(\mathrm{km})$与快车行驶时间$x(\mathrm{h})$之间的函数图象．根据图象回答下列问题：

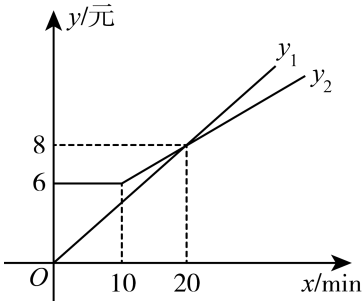


(1)甲、乙两地之间的距离为_____km．

(2)当$2 \le x \le 8$时，求慢车离乙地的路程y与x之间的函数关系式．

(3)直接写出在慢车行驶过程中，两车相距50km时x的值．

【变式 5-1】（2024·河南信阳·三模）共享电动车是一种新理念下的交通工具，给我们的出行提供了方便．现有A，B两种品牌的共享电动车，收费与骑行时间之间的函数关系如图所示，其中A品牌的收费方式对应y_1，B品牌的收费方式对应y_2．



(1)B品牌共享电动车骑行10分钟后，每分钟收费_____元；

(2)当$x>10$时，写出y_2的函数关系式为_____；

(3)如果小明每天早上需要骑行A品牌或B品牌的共享电动车去工厂上班，已知两种品牌共享电动车的平均

行驶速度均为$20km/h$，小明家到工厂的距离为$9km$，那么小明选择哪个品牌的共享电动车更省钱？可以省多少？

【变式 5-2】（2024·浙江金华·三模）随着“体育进公园”提档改造的不断推进，金华沿江绿道成为这座城市的一个超大型“体育场”．在笔直的绿道上，平平和安安分别从相距 a 千米的甲、乙两地同时出发，匀速相向而行，已知平平的速度大于安安的速度，两人相遇后，一起聊天停留 b 分钟后，各自按原速度原方向继续前行，分别到达乙地、甲地后原地休息．两人之间的距离 s（千米）与时间 t（分钟）之间的函数关系如图 2 所示．



图1

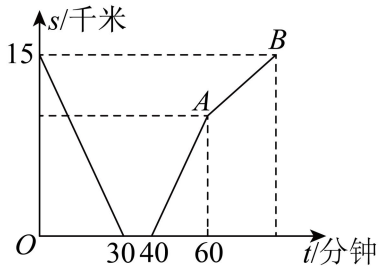


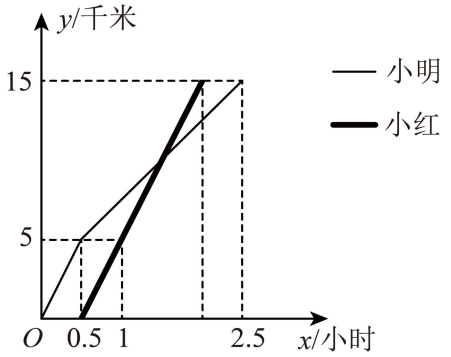
图2

(1)根据图象信息，$a=$_____，$b=$_____．

(2)求平平和安安的速度．

(3)求线段 AB 所在直线的函数表达式．

【变式 5-3】（2024·吉林长春·一模）小明和小红两同学分别从甲地出发，沿同一条道路骑自行车到乙地参加社会实践活动，小明同学先从甲地出发，0.5 小时后小红出发．小明和小红距甲地的距离 y（千米）与小明出发的时间 x（小时）之间的函数图象如图所示．



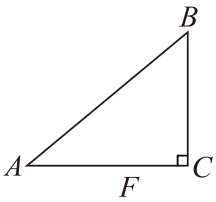
(1)小红同学骑自行车的速度为_千米/小时；

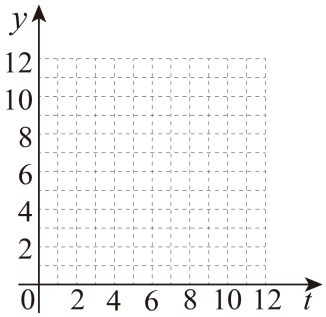
(2)当 $0.5\le x\le 2.5$ 时，求小明距甲地的距离 y 与 x 之间的函数关系式；

(3)当小红到达乙地时，求小明距乙地的距离.

考点六：一次函数的应用——几何问题

例 6.（23-24 八年级下·重庆·期中）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=12$，$BC=10$，动点 F 从点 A 出发沿着折线 $A\to C\to B$ 运动（含端点），运动速度为每秒 2 个单位，设运动时间是 t 秒，FC 的长度是 y，请解答下列问题：





(1)请直接写出 y 与 t 的函数关系式及 t 的取值范围；

(2)在平面直角坐标系中画出函数图象，并结合函数的图象，写出该函数的一条性质；

(3)根据图象直接写出当 $y>6$ 时，自变量 t 的取值范围.

【变式 6-1】（23-24 八年级下·江西南昌·阶段练习）如图 1 所示，正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 P 从点 A 出发，沿折线 $A\to B\to C\to D$ 运动，当它到达点 D 时停止运动，连接 AP，DP，记点 P 运动的路程为 $x(0<x<12)$，△APD 的面积为 y.

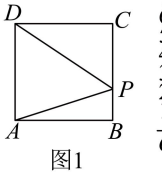


图1

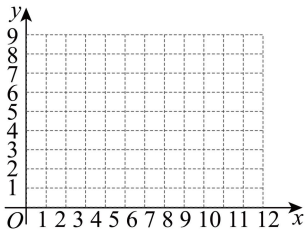


图2

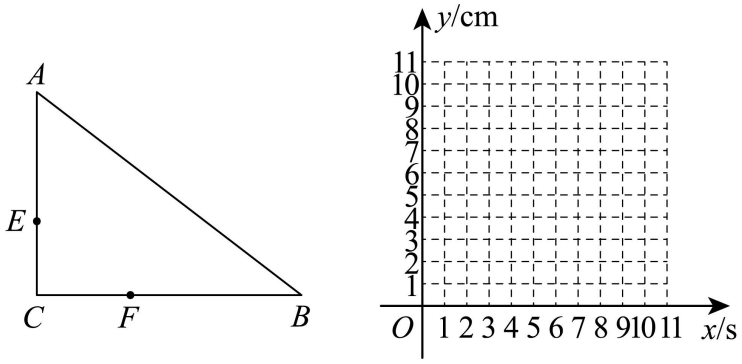
(1)当 $0<x<4$ 时，写出 y 与 x 之间的函数解析式_____. 当 $8<x<12$ 时，写出 y 与 x 之间的函数解析式_____.

(2)根据自变量 x 的取值范围，在如图 2 所示的平面直角坐标系中画出点 P 整个运动过程中的函数图象；

(3)请根据函数的图象，写出该函数的一条性质；

(4)请根据函数的图象，直接写出当 $y>4$ 时 x 的取值范围.

【变式 6-2】（23-24 八年级下·安徽芜湖·阶段练习）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6\text{cm}$，$BC=8\text{cm}$，动点 E 以每秒 1cm 的速度从点 C 出发，沿折线 $C\to A\to B$ 方向运动．动点 F 以每秒 $\frac{4}{3}\text{cm}$ 的速度从点 C 同时出发，沿折线 $C\to B\to A$ 方向运动．当两者相遇时停止运动．设运动时间为 $x\text{s}$，点 E，F 的距离为 $y\text{cm}$．

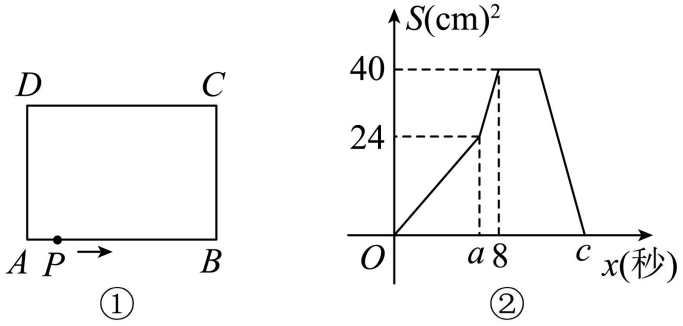


(1)请直接写出 y 关于 x 的函数解析式，并注明自变量 x 的取值范围.

(2)在平面直角坐标系中画出这个函数的图象，并写出该函数的一条性质.

(3)当点 E，F 相距 5cm 时，求出 x 的值.

【变式 6-3】（23-24 八年级下·海南·期中）如图①，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=10\text{cm}$，$BC=8\text{cm}$、点 P 从 A 出发，沿 $A\to B\to C\to D$ 路线运动，到 D 停止；点 P 的速度为每秒 1cm，a 秒时点 P 改变速度，变为每秒 $b\text{cm}$，图② 是点 P 出发 x 秒后，△APD 的面积 $S\left(\text{cm}^2\right)$ 与 x（秒）的关系图象；



(1)当点 P 在 AB 上运动时，△APD 的面积会_____，点 P 在 BC 上运动时，△APD 的面积会_____，点 P 在 CD 上运动时，△APD 的面积会_____；（填“增大”或“减小”或“不变”）

(2)根据图② 提供的信息，求出 a 、 b 及图② 中 c 的值；

(3)设点 P 离开点 A 的路程为 $y(\mathrm{cm})$，请写出动点 P 改变速度后 y 与出发后的运动时间 x(秒)的关系式.

(4)当点 P 出发后几秒时， $\triangle APD$ 的面积 S 是长方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$？

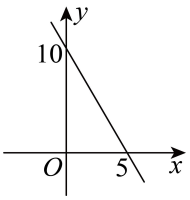
模块四 小试牛刀过关测

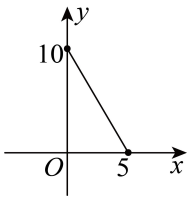
一、单选题

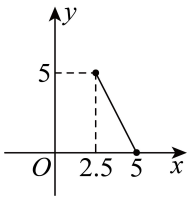
1．（23-24 八年级下·河南南阳·阶段练习）若关于 x 的方程 $ax+m=0$ 的解为 $x=-2$，则直线 $y=ax+m$ 一定经过点（　）

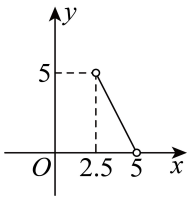
A．$(-2,0)$　　B．$(-2,-2)$　　C．$(0,-2)$　　D．$(-2,2)$

2．（23-24 八年级下·全国·假期作业）已知等腰三角形的周长是 10，底边长 y 是腰长 x 的函数，则下列图象中，能正确反映 y 与 x 之间函数关系的图象是（　）

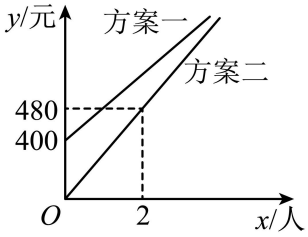
A．

B．

C．

D．

3．（23-24 八年级下·河北衡水·阶段练习）“这么近那么美，周末到河北”，河北某文化旅游公司推出野外宿营活动，有两种优惠方案：方案一：以团队为单位办理会员卡（会员卡花费 a 元），所有人都按半价优惠；方案二：所有人都按六折优惠．某团队有 x 人参加该活动，购票总花费为 y 元，这两种方案中 y 关于 x 的函数图象如图所示，则下列说法不正确的是（　）

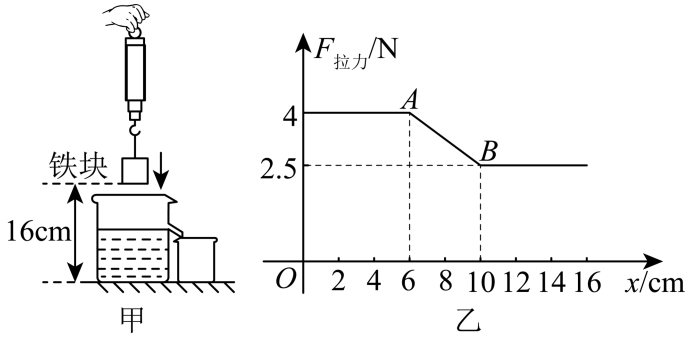


A．$a=400$　　B．原票价为 400 元/人

C．方案二中 y 关于 x 的函数解析式为 $y=240x$　　D．若方案一比方案二更优惠，则 $x>6$

4．（2024·湖北宜昌·模拟预测）为了探究浮力的大小与哪些因素有关，物理实验小组进行了测浮力的实验．如图甲，先将一个长方体铁块放在玻璃烧杯上方，再向下缓缓移动，移动过程中记录弹簧测力计的示数 $F_{拉力}$（单

位：N）与铁块下降的高度x（单位：cm）之间的关系如图乙所示．下列说法不正确的是（　）



A．铁块的高度为4cm

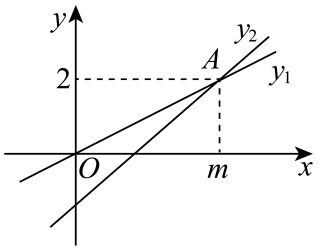
B．铁块入水之前，烧杯内水的高度为10cm

C．当铁块下降的高度为8cm时，该铁块所受到的浮力为3.25N

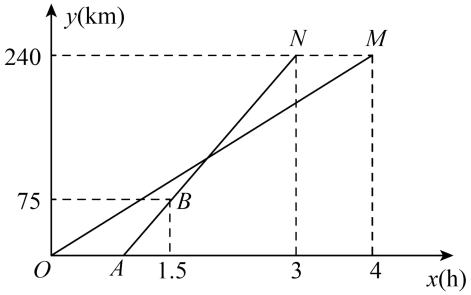
D．当弹簧测力计的示数为3N时，此时铁块距离烧杯底$\frac{22}{3}$cm

二、填空题

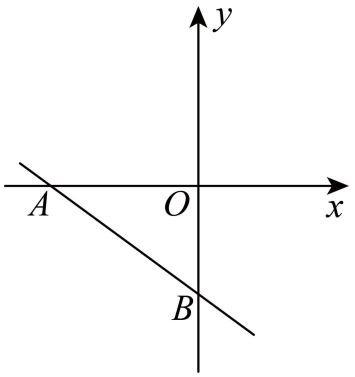
5．（23-24八年级下·山东滨州·期中）如图，直线$y_1=\frac{1}{2}x$与直线$y_2=kx+b$相交于点$A(m,2)$，则关于x的方程$kx+b=2$的解为_____．



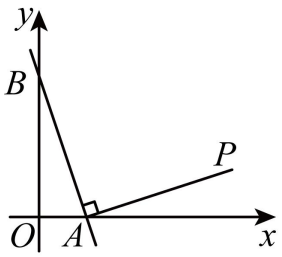
6．（2024·山东济南·一模）中国人逢山开路，遇水架桥，靠自己勤劳的双手创造了世世界奇迹．雅西高速是连接雅安和西昌的高速公路，被国内外专家学者公认为全世界自然环境最恶劣、工程难度最大、科技含量最高的山区高速公路之一，全长240km．一辆货车和一辆轿车先后从西昌出发驶向雅安，如图，线段OM表示货车离西昌距离$y(\text{km})$与时间$x(\text{h})$之间的函数关系，线段AN表示轿车离西昌距离$y_2(\text{km})$与时间$x(\text{h})$之间的函数关系，则货车出发_____小时后与轿车相遇．



7．（23-24八年级下·河南南阳·期中）如图，直线$y=-\frac{3}{4}x-3$与x轴、y轴分别交于点A、B，点C是x轴上的一个动点，将直线BA沿直线BC翻折，当点A的对应点D恰好落在y轴上时，点C的横坐标为_____．



8.（23-24 八年级下·河南周口·期中）如图，直线 $y=-3x+3$ 与 x 轴和 y 轴分别交于 A，B 两点，射线 $AP\perp AB$ 于点 A．若 C 是射线 AP 上的一个动点，D 是 x 轴上的一个动点，且以 C，D，A 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 全等，则 OD 的长为_____.



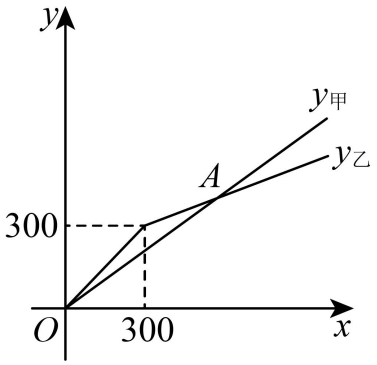
三、解答题

9.（23-24 八年级下·江西宜春·阶段练习）为落实“双减”政策，丰富课后服务的内容，某学校计划到甲、乙两个体育专卖店购买一批新的体育用品，两个商店的优惠活动如下：

甲：所有商品按原价 8.5 折出售；

乙：一次购买商品总额不超过 300 元的按原价付费，超过 300 元的部分打 7 折.

设需要购买体育用品的原价总额为 x 元，去甲商店购买实付 $y_{甲}$ 元去乙商店购买实付 $y_{乙}$ 元，其函数图象如图所示.



(1)分别求 $y_{甲}$，$y_{乙}$ 关于 x 的函数关系式；

(2)请根据函数图象，选择去哪个体育专卖店购买体育用品更合算.

10．（2024·河北邯郸·二模）用充电器给某手机充电时，其屏幕画面显示目前电量为20%（如图1）．经测试，在用快速充电器和普通充电器对该手机充电时，其电量y（单位：%）与充电时间x（单位：h）的函数图象分别如图2中的线段AB，AC．根据以上信息，回答下列问题：

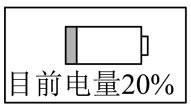


图1

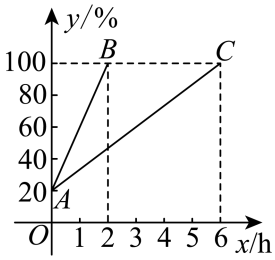


图2

(1)求线段AC对应的函数表达式；

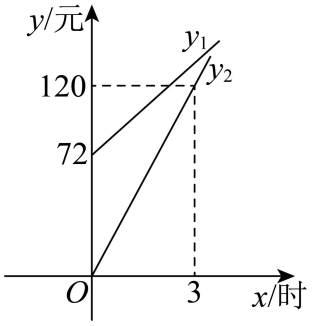
(2)先用普通充电器充电ah后，感觉充电较慢，再改为快速充电器充满电，一共用时4h，通过计算在图2中画出电量y（单位：%）与充电时间x（单位：h）的函数图象．

11．（23-24八年级下·河北沧州·期末）嘉淇一家计划租用一艘船游湖，有下面两种租赁方式：

甲方式：收取固定租金a元，另外再按每小时租费20元计费（不足一小时按一小时计费）；

乙方式：无固定租金，三小时以内每小时租费b元，超过三小时，超过部分按每小时租费32元计费（不足一小时按一小时计费）．

设租用时间为x小时（x为整数），按甲方式租船所需费用为y_1元，按乙方式租船所需费用为y_2元，其图象如图所示．



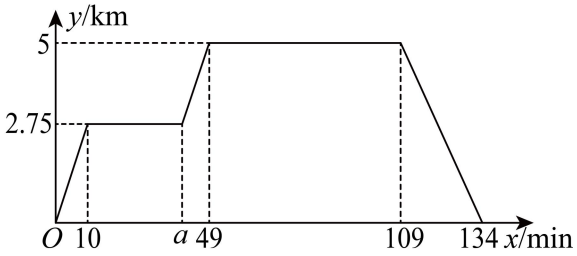
(1)$a=$ _____，$b=$ _____；

(2)当$3\le x\le 10$时，分别求出y_1，y_2关于x的函数解析式；

(3)请通过计算说明选择哪种租赁方式比较合算．

12．（2024·天津·三模）已知小明家、书店、森林公园依次在同一条直线上，书店离家2.75km，森林公园离家5km．小明从家里出发，匀速骑行10min后到达书店，在书店停留30min后，匀速骑行9分钟到达森林公园：在森林公园游玩一段时间，然后返回家中．给出的图象反映了这个过程中小明离家的距离$y$km与时间$x$min之间的对应关系．

请根据相关信息，解答下列问题：



(1)填表：

小明离开家的时间/min	10	20	49	79	112
小明离家的距离/km	2.75			5	

(2)填空：

①a的值为_

②小明从家出发前往书店的骑行速度为_ km/min；

③当$10 \le x \le 49$时，请直接写出小明离家的距离y关于时间x的函数解析式．

(3)小明从森林公园出发回家时，爸爸从家开车出发匀速行驶前往森林公园，已知爸爸的速度为0.8km/min，当小明与爸爸相遇时，求小明离开家的时间．（直接写出结果）

第 18 讲 一次函数的应用

模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

模块四　小试牛刀过关测

素养目标

1．掌握一次函数与一元一次方程之间的关系；

2．掌握单个一次函数图象的应用及两个一次函数图象的应用；

3．能利用一次函数的图象和性质解决实际数学问题。

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点一 一元一次方程与一次函数的关系

1）一元一次方程可转化为一般式：$ax+b=0$

2）一次函数为：$y=kx+b$ 的形式；当 $y=0$ 时，一次函数 x 的值就是一元一次方程的解。

$y=0$ 时 x 的值，即一次函数与 x 轴的交点横坐标，就是对应一元一次方程的解

3）每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也对应两条直线.从“数”的角度看，解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等，以及这时的函数为何值；从“形”的角度看，解方程组相当于确定两条直线交点的坐标.

知识点二 一次函数的实际应用

1）数学建模的一般思路

数学建模的关键是将实际问题数学化，从而得到解决问题的最佳方案、最佳策略.在建模的过程中，为了既合乎实际问题又能求解，这就要求在诸多因素中抓住主要因素进行抽象化简，而这一过程恰是我们的分析、抽象、综合、表达能力的体现.函数建模最困难的环节是将实际情景通过数学转化为什么样的函数模型.

2）正确认识实际问题的应用

在实际生活问题中，如何应用函数知识解题，关键是建立函数模型，即列出符合题意的函数解析式，然后根据函数的性质综合方程（组）、不等式（组）及图象求解.

注：要注意结合实际，确定自变量的取值范围，这是应用中的难点，也是中考的热门考点.

3）选择最简方案问题

分析问题的实际背景中包含的变量及对应关系，结合一次函数的解析式及图象，通过比较函数值的大小等，寻求解决问题的最佳方案，体会函数作为一种数学模型在分析解决实际问题中的重要作用.

模块三 核心考点举一反三

考点一：已知直线与坐标轴交点求一元一次方程的解

例 1.（2023 春·八年级课时练习）直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 过点 $A(0,1)$，$B(2,0)$，则关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为_____.

【答案】$x=2$

【分析】所求方程的解，即函数 $y=ax+b(a\neq 0)$ 图像与 x 轴的交点横坐标，确定出解即可.

【详解】解：关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解，即为函数 $y=ax+b(a\neq 0)$ 图像与 x 轴的交点横坐标，

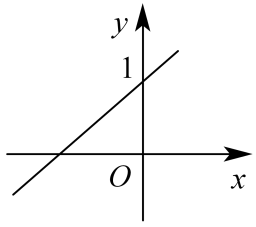
∵直线 $y=ax+b$ 过点 $B(2,0)$，

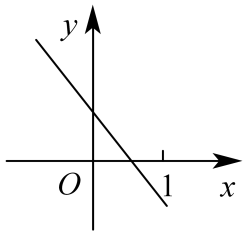
∴方程 $ax+b=0$ 的解为 $x=2$，

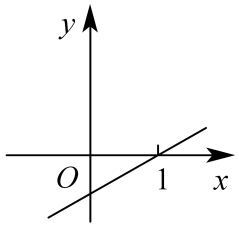
故答案为：$x=2$.

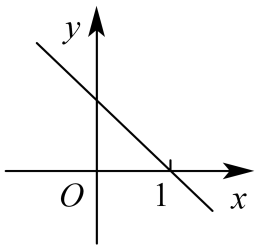
【点睛】此题考查了一次函数与一元一次方程，掌握任何一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$（a，b 为常数，$a\neq 0$）的形式，所以解一元一次方程可以转化为，当某个一次函数的值为 0 时，求相应的自变量的值. 从图像上看，相当于已知直线 $y=ax+b$ 确定它与 x 轴的交点的横坐标的值，是解答本题的关键.

【变式 1-1】（2024·陕西·一模）已知关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=\frac{1}{2}$，则一次函数 $y=kx+b$（k、b 为常数，且 $k\neq 0$）的图象可能是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【分析】本题主要考查了一次函数与一次方程的关系，关键是根据方程 $kx+b=0$ 的解其实就是当 y=0 时一次函数 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点横坐标解答. 根据交点坐标的含义可得答案.

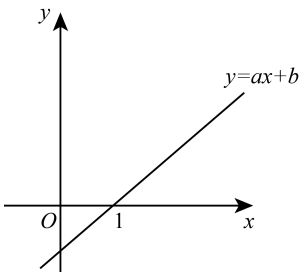
【详解】解：∵关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=\frac{1}{2}$，

∴一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标是 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

∴只有选项 B 的图象符合题意，

故选：B

【变式 1-2】（2023 春·浙江台州·八年级统考期末）如图，直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $(1,0)$，则关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为 _____.



【答案】$x=1$

【分析】先根据一次函数 $y=ax+b$ 的图象交 x 轴交于点 $(1,0)$ 可知，当 $x=1$ 时函数图象在 x 轴上，故可得出结论.

【详解】解：∵直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $(1,0)$，

由函数图象可知，当 $x=1$ 时函数图象在 x 轴上，即 $y=0$，

∴ $ax+b=0$ 的解是 $x=1$.

故答案为：$x=1$.

【点睛】本题考查的是一次函数与一元一次方程，能利用数形结合求出方程的解是解答此题的关键.

【变式 1-3】（2023 秋·广东惠州·九年级校考开学考试）一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中，x 与 y 的部分对应值，如下表：那么，一元一次方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=$_____.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-4	-2	0	2

【答案】1

【分析】此题实际上是求当 $y=0$ 时，所对应的 x 的值，根据表格求解即可.

【详解】解：根据表格可得：

当 $y=0$ 时，$x=1$，即一元一次方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=1$，

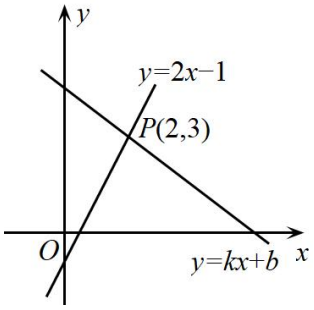
故答案为：1.

【点睛】本题考查了一次函数与一元一次方程，熟练掌握一次函数与坐标轴的交点与一元一次方程的解的关系是解题的关键.

考点二：利用图象法解一元一次方程

例 2.（2023 春·河北石家庄·八年级校考期中）数形结合是解决数学问题常用的思想方法．如图，直

线 $y=2x-1$ 与直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 相交于点 $P(2,3)$．根据图像可知，关于 x 的方程 $2x-1=kx+b$ 的解是（　　）



A．$x=1$　　B．$x=2$　　C．$x=3$　　D．$x=4$

【答案】B

【分析】由直线 $y=2x-1$ 与直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 相交于点 $P(2,3)$ 即可得出方程 $2x-1=kx+b$ 的解．

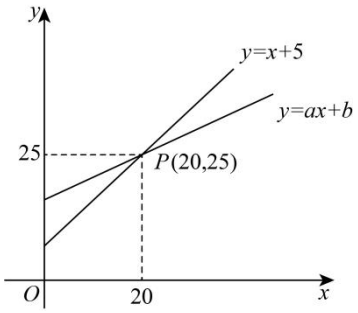
【详解】解：∵ 直线 $y=2x-1$ 与直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 相交于点 $P(2,3)$，

∴关于 x 的方程 $2x-1=kx+b$ 的解是 $x=2$，

故选：B．

【点睛】本题主要考查了利用图象法解一元一次方程，采用数形结合的思想解题，是解此题的关键．

【变式 2-1】（2023 春·山东烟台·七年级统考期末）如图，直线 $y=x+5$ 和直线 $y=ax+b$ 相交于点 $P(20,25)$，则方程 $x+5=ax+b$ 的解是（　）



A．$x=25$　　B．$x=20$　　C．$x=15$　　D．$x=5$

【答案】B

【分析】两直线的交点的横坐标即为两直线解析式所组成的方程的解．

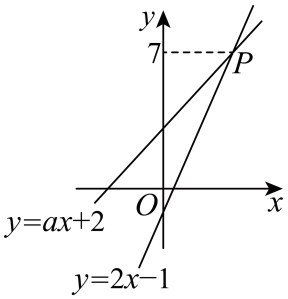
【详解】解：∵ $y=x+5$ 和直线 $y=ax+b$ 相交于点 $P(20,25)$，

∴方程 $x+5=ax+b$ 的解是 $x=20$．

故选：B．

【点睛】本题主要考查了一次函数与一元一次方程，关键是掌握一元一次方程与一次函数的关系，从图象上看，一元一次方程的解，相当于已知两条直线交点的横坐标的值．

【变式 2-2】（23-24 八年级下·陕西商洛·阶段练习）如图，一次函数 $y=ax+2$（$a\neq 0$ 且 a 为常数）与 $y=2x-1$ 的图像相交于点 P，且点 P 的纵坐标为 7，则关于 x 的方程 $ax+2=2x-1$ 的解是（　）



A．$x=1$　　B．$x=4$　　C．$x=3$　　D．$x=2$

【答案】B

【分析】本题主要考查了一元一次方程的解与一次函数图像的交点坐标，熟练掌握相关知识是解题关键．先求出点P的坐标，由图像可知，当$x=4$时，两个函数的函数值是相等的，即可求解．

【详解】解：根据题意得，点P的纵坐标为7，

把$y=7$代入$y=2x-1$，

可得$7=2x-1$，解得$x=4$，

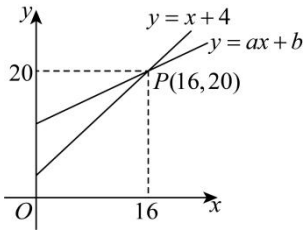
∴点P的坐标为$(4,7)$，

∵一次函数$y=ax+2$（$a\neq0$且a为常数）与$y=2x-1$的图像相交于点P，

∴关于x的方程$ax+2=2x-1$的解是$x=4$．

故选：B

【变式 2-3】（2023 春·河南商丘·八年级统考期末）如图，直线$y=x+4$和直线$y=ax+b$相交于点P，根据图像可知，关于x的方程$x+4=ax+b$的解是（　）



A．$x=16$或$x=20$　B．$x=20$　　C．$x=16$　　D．$x=-16$

【答案】C

【分析】两直线的交点坐标为两直线解析式所组成的方程组的解．

【详解】∵直线$y=x+4$和直线$y=ax+b$相交于点P，

∴$x+4=ax+b$的解是：$x=16$，

故选：C．

【点睛】此题考查了一次函数与一元一次方程，解题的关键是掌握一元一次方程与一次函数的关系，从图象上看，一元一次方程的解就是已知两条直线交点的横坐标的值．

考点三：一次函数的应用——分配方案问题

例 3.（2024·河南周口·三模）某家用电器厂生产一种电饭煲和一种电热水壶，电饭煲每个定价 200 元，电热水壶每个定价 60 元．厂方在开展促销活动期间，向客户提供以下两种优惠方案：

方案一：每买一个电饭煲就赠送一个电热水壶；

方案二：电饭煲和电热水壶都按定价的80%付款．

某厨具店计划购进80个电饭煲和x个电热水壶$(x>80)$．设选择方案一需付款y_1元，选择方案二需付款y_2元．

(1)分别写出y_1，y_2关于x的函数表达式．

(2)当$x=200$时．

①请通过计算说明该厨具店选择上面哪种方案更省钱．

②若两种优惠方案可以同时使用（使用方案一优惠过的商品不能再使用方案二优惠，使用方案二优惠过的商品不能再使用方案一优惠），请你设计出更省钱的购买方案，并计算出该方案所需费用．

【答案】(1)$y_1=60x+11200$，$y_2=48x+12800$

(2)①该厨具店选择方案二更省钱；②先按方案一购买 80 个电饭煲，再按方案二购买 120 个电热水壶．该方案所需费用为 21760 元

【分析】本题考查了用代数式表示和一次函数的实际应用，解题的关键是正确理解题意，根据题意正确列出函数表达式．

（1）根据题目所给的两个方案，分别列出代数表达式即可；

（2）①将$x=200$分别代入（1）中得出的两个函数表达式，即可解答；②先按方案一购买 80 个电饭煲，再按方案二购买 120 个电热水壶最省钱，计算即可．

【详解】（1）解：根据题意可得：

$y_1=200\times80+60(x-80)=60x+11200$，

$y_2=200\times80\%\times80+60\times80\%x=48x+12800$．

（2）解：①当$x=200$时，$y_1=60\times200+11200=23200$，$y_2=48\times200+12800=22400$．

∵$23200>22400$，

∴该厨具店选择方案二更省钱．

②更省钱的购买方案：

先按方案一购买 80 个电饭煲，再按方案二购买 120 个电热水壶．

该方案所需费用为$200\times80+120\times80\%\times60=21760$（元）．

【变式 3-1】（2024·陕西宝鸡·三模）“生活即教育，行为即课程”．某校将劳动教育融入立德树人全过程．学校给每个班划分一块地供学生“种菜”，某班现要购买肥料对该地施肥，该班班长与农资店店主商量后，店主给出了两种购买方案（如表），且都送货上门．

方案	运费	肥料价格

方案一	12 元	3 元/kg
方案二	0 元	3.6 元/kg

若该班购买 x 千克肥料，按方案一购买的付款总金额为 y_1 元，按方案二购买的付款总金额为 y_2 元.

(1)请分别写出 y_1, y_2 与 x 之间的函数关系式；

(2)若该班计划用 180 元钱购买肥料，请问该班选择哪种购买方案购买的肥料较多？

【答案】(1) $y_1=3x+12$，$y_2=3.6x$

(2)方案一

【分析】本题考查一次函数的应用，列出正确的函数关系式是解答的关键.

（1）根据两种销售方案表示出销售总价即可；

（2）用不同的购买方法，分别计算所用金额，比较得出答案.

【详解】（1）解： y_1 与 x 之间的函数关系式为 $y_1=3x+12$，

y_2 与 x 之间的函数关系式为 $y_2=3.6x$.

（2）解：当 $y_1=180$ 时，$3x+12=180$，解得 $x=56$，

当 $y_2=180$ 时，$3.6x=180$，解得 $x=50$，

$\because 56>50$，

$\therefore$ 该班选择方案一购买的肥料较多.

【变式 3-2】（2024·安徽淮北·三模）某企业计划购进一批智能机器人，总价在 20 万元以上，商家推出两种分期付款购买机器人的活动：①首付款满 20 万元，减 2 万元；②首付款满 15 万元，分期交付的余款可享受八折优惠.

(1)该企业选中的智能机器人的总价为 x 万元，采取哪种付款方式比较省钱？请说明理由；

(2)已知购买智能机器人的总价低于 50 万元，除首付款之外，该企业分期付款的能力是每月 2 万元. 若不考虑其他因素，为早日结清余款，该企业该怎样选择？请说明理由.

【答案】(1)见解析

(2)采取第①种方式可早日结清余款，理由见解析

【分析】本题考查一次函数的实际应用，正确理解题意列出关系式是关键.

（1）先根据题意表示出第①种，第②种应实付款，再分类讨论即可；

（2）分别表示出所购智能机器人的总价 x（万元）与结清余款所需的月数之间的函数关系式，相减即可求解.

【详解】（1）解：第①种应实付款 $y_1=x-2$，

第②种应实付款 $y_2=0.8(x-15)+15=0.8x+3$，

$y_1-y_2=(x-2)-(0.8x+3)=0.2\text{x}-5$，

令$0.2x-5=0$，解得$x=25$

当智能机器人的总价$20<x<25$万元时，采取第①种方式较省钱；

当智能机器人的总价$x=25$万元时，两种方式一样；

当智能机器人的总价$x>25$万元时，采取第②种方式较省钱.

（2）该企业采取第①种优惠方式所购智能机器人的总价x（万元）与结清余款所需的月数n_1之间的关系为：

$x-20-2=2n_1$，即$n_1=0.5x-11$

该企业采取第②种优惠方式所购智能机器人的总价x（万元）与结清余款所需的月数n_2之间的关系为：

$0.8(x-15)=2n_2$，即$n_2=0.4x-6$

$n_1-n_2=(0.5x-11)-(0.4x-6)=0.1x-5$

因为$x<50$，所以$n_1<n_2$

∴采取第①种方式可早日结清余款.

【变式 3-3】（2024·陕西渭南·一模）古人常说：“读书可以启智，读书可以明理，读书可以医愚”，读书不但可以让人增长智慧，开拓视野，而且还能让人明事理，知荣辱．某校为营造书香校园，计划购进x个某品牌书架，已知该品牌书架的单价为200元/个，经过与厂家协商，厂家给出两种优惠方案：

方案一：所有书架均按原价的八折销售；

方案二：若一次购买不超过10个，则每个书架按原价的九折销售；若一次购买超过10个，则前10个打九折，超过的部分每个书架的价格在九折的基础上再降低30元.

(1)分别求方案一实际付款金额y_1（元）和方案二实际付款金额y_2（元）与x之间的函数关系式；

(2)当$x=20$时，请分别求出两种方案的实际付款金额，并判断选择哪种方案对学校来说更省钱.

【答案】(1)$y_1=200\times0.8x=160x$，$y_2=\begin{cases}180x(0\le x\le10)\\150x+300(x>10)\end{cases}$；

(2)选择方案一更省钱.

【分析】本题考查了一次函数的应用，根据题意列出函数关系式是解题的关键；

（1）根据题意分别列出两种方案的函数关系式即可；

（2）将$x=20$分别代入（1）中两种方案的函数关系式，计算比较即可.

【详解】（1）解：由题意可得：

$y_1=200\times0.8x=160x$，

当$0\le x\le10$时，$y_2=200\times0.9x=180x$，

当$x>10$时，$y_2=10\times200\times0.9+(x-10)\times(200\times0.9-30)=150x+300$，

∴$y_1=200\times0.8x=160x$，$y_2=\begin{cases}180x(0\le x\le10)\\150x+300(x>10)\end{cases}$；

（2）解：当$x=20$时，$y_1=160\times20=3200$（元），$y_2=150\times20+300=3300$（元），

∴$3200<3300$，

∴选择方案一更省钱.

考点四：一次函数的应用——最大利润问题



例 4.（23-24 九年级下·宁夏银川·期中）为满足顾客的购物需求，某水果店计划购进甲、乙两种水果进行销售．通过市场调研发现：购进 6 千克甲种水果和 10 千克乙种水果共需 110 元；乙种水果每千克的进价比甲种水果多 3 元．

(1)求甲、乙两种水果的进价分别是多少？

(2)已知甲、乙两种水果的售价分别为 7 元/千克和 11 元/千克，若水果店购进这两种水果共 200 千克，其中甲种水果的重量不低于乙种水果的 3 倍．则水果店应如何进货才能获得最大利润，最大利润是多少？

【答案】(1)甲种水果的进价为 5 元/kg，乙种水果进价为 8 元/kg

(2)水果店应购进甲水果150kg，购进乙水果50kg才能获得最大利润，最大利润是 450 元

【分析】（1）设甲种水果的进价为x元/kg，则乙种水果进价为$(x+3)$元/kg，列方程$6x+10(x+3)=110$解答即可.

（2）设购进甲水果$m$kg，则乙水果$(200-m)$kg，利润为y元.$y=(7-5)m+(11-8)(200-m)=-m+600$，利用一次函数的性质解答即可.

本题考查了一元一次方程的应用，一次函数的性质的应用，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

【详解】（1）设甲种水果的进价为x元/kg，则乙种水果进价为$(x+3)$元/kg

$6x+10(x+3)=110$

$x=5$

$5+3=8$（元）

答：甲种水果的进价为 5 元/kg，乙种水果进价为 8 元/kg.

（2）设购进甲水果$m$kg，则乙水果$(200-m)$kg，利润为y元.

$y=(7-5)m+(11-8)(200-m)=-m+600$

∵$m\geq3(200-m)$，

∴$m\geq600-3m$，

∴$4m\geq600$，

∴$m\geq150$，

又∵ $-1<0$，

∴y 随 m 的增大而减小.

∴当 $m=150$ 时，y 最大，最大值为 450 元.

【变式 4-1】（2024·陕西咸阳·模拟预测）“读万卷书，行万里路”，最美的风景在路上．为了让同学们在实践中增长见识、提高学习兴趣、陶冶情操，某中学组织八年级师生共 600 人开展研学活动，现有甲、乙两种客车，它们的载客量和租金如表所示：

	甲型客车	乙型客车
载客量（人辆）	45	60
租金（元/辆）	800	1200

倘若甲、乙两种客车都需要租用，每位师生都有座位且座位没有剩余，设租 x 辆甲型客车，租车总费用为 y 元.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)请你设计一种租车方案，要求费用最省.

【答案】(1) $y=-100x+12000$

(2)租用甲种客车 12 辆，乙种客车 1 辆，费用最省

【分析】本题考查了一次函数的应用，综合性强，解决问题的关键在于找到 x 的取值范围，才能确定方案.本题较为灵活，计算量略微有些大，考查了学生的推理能力、计算能力.

（1）设租用甲种客车 x 辆，则乙种客车是 $\frac{600-45x}{60}$ 辆，利用公式：总租金＝甲的总租金＋乙的总租金，即可列出 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）求出 x 的取值范围，再根据一次函数的性质求解即可.

【详解】（1）依题意得：$y=800x+\frac{600-45x}{60}\times1200=-100x+12000$ （x 为整数）

（2）依题意得：

$600-45x\geq0$，

解之，得 $x\leq\frac{40}{3}$，

∵x 为整数，且 $\frac{600-45x}{60}=10-\frac{3}{4}x$ 为整数，

$y=-100x+12000$ 中，$-100<0$，y 随 x 的增大而减小，

∴x 的值为 12 时，y 有最小值，为 $-100\times12+12000=10800$，此时 $\frac{600-45x}{60}=1$，

∴租用甲种客车 12 辆，乙种客车 1 辆，费用最省.

【变式 4-2】（2024·河南南阳·二模）为扎实推进“百县千镇万村高质量发展工程”，某镇已将区域内特色农

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/198125024020006111