第一讲　等差数列

知识要点与学法指导：

这一讲我们主要学习简单的数列求和，所用知识是等差数列的求和公式和等差数列等概念。

数列：按一定次序排列的数叫数列，数列中的每一个数叫做这个数列的项，各项依次叫做第 1 项（首项）、第 2 项……第 n 项（末项）。

等差数列：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的公差。

数列求和公式：

和＝（首项＋末项）×项数÷2

用字母表示为：$s=(a_1+a_n)\times n\div 2$

项数＝（末项－首项）÷公差＋1

用字母表示为：$n=(a_n-a_1)\div d+1$

末项＝首项＋公差×（项数－1）

用字母表示为：$a_n=a_1+d\times(n-1)$

例 1　计算：3＋6＋9＋……＋90

【分析与解】

这是一个公差为 3 的等差数列，求和是多少，这个数列的首末两项和是 3＋90＝93，而第二项与倒数第二项的和是 6＋87＝93，可以发现，与首末等距离的两项的和都是 93，于是可以想到，求这个数列的和，只要用首末两项的和乘以项数再除以 2 就可以了。但项数并不能直接看出来，需要用（末项－首项）÷公差＋1 计算出来。

项数：(90－3)÷3＋1
＝87÷3＋1
＝29＋1
＝30

原式＝（3＋90）×30÷2
＝93×30÷2

　　　　　　＝1395

试一试 1

计算：19＋22＋25＋28＋……＋313

例 2　试求大于 100 而小于 200 的所有 4 的倍数之和。

【分析与解】

每 4 个连续数必有一个数是 4 的倍数，大于 100 又是 4 的倍数的第一项是 104，小于 200 又是 4 的倍数中最大的一个是 200－4＝196 即末项，这个数列的公差是 4，通过首项、末项和公差可以求出项数。这个数列即：104、108……196

项数：(196－104)÷4＋1

＝92÷4＋1

＝23＋1

＝24

数列和：(104＋196)×24÷2

＝300×24÷2

＝3600

答：大于 100 而小于 200 的所有 4 的倍数和是 3600。

试一试 2

求大于 100 而小于 200 所有 5 的倍数的和。

例 3　下面的一列数是不是等差数列？求出它的第 90 项。

2＋5　4＋8　6＋11　8＋14　10＋17……

【分析与解】

判断上面一列数是不是等差数列，可以分两步观察，做出分析，先分析第一个加数，再分析第二个加数，如果两个加数分别处在等差数列之中，那么它们的和一定是等差数列。

2＋5

4＋8

6＋11

8＋14

10＋17

……

第一个加数 2、4、6、8、10、……是等差数列；

第二个加数 5、8、11、14、17、……是等差数列；

题中给的一列数是等差数列。

第 90 项的第一个加数是：2＋（90－1）×2＝180

第二个加数是：5＋（90－1）×3＝272

第 90 项是：180＋272

答：第 90 项是 180＋272。

试一试 3

下面的一列数是不是等差数列？求出它的第 90 项。

1＋7　3＋10　5＋13　7＋16　9＋19……

例 4　求所有被 3 除余 1 的两位数的和。

【分析与解】

由题意可知被 3 除余 1 的最小两位数是 10，a_1＝10，最大的两位数是 97，a_n＝97，公差 d＝3。要求这个数列的和 S，必须先求项数 n。

$$\begin{aligned} n &= (97-10)\div 3+1 \\ &= 87\div 3+1 \\ &= 29+1 \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= (10+97)\times 30\div 2 \\ &= 107\times 30\div 2 \\ &= 3210\div 2 \\ &= 1605 \end{aligned}$$

答：所有被 3 除余 1 的两位数的和是 1605。

试一试 4

求所有被 4 除余 1 的两位数的和。

例 5　小丽家的大时钟几点钟就敲几下，而且每半点也敲一下。这只时钟一昼夜共敲了多少下？

【分析与解】

我们先不考虑每半点敲的那些，从 1 点到 12 点，时钟分别敲了 1、2、3……11、12 下。这是一个 a_1＝1，a_n＝12，n＝12，d＝1 的等差数列，求出数列的和 S，再加上每半点敲的 12 下。因为一昼夜是 24 小时，时钟要在钟面上转两圈，所以最后还应乘 2。列式为：

$$\begin{aligned} & [(1+12)\times 12\div 2+12]\times 2 \\ =& [78+12]\times 2 \\ =& 90\times 2 \\ =& 180\text{（下）} \end{aligned}$$

答：时钟一昼夜共敲 180 下。

试一试 5

大时钟几点钟就敲几下，而且每半点敲一下。这只时钟两天共敲了多少下？

练习一

1.计算。
（1）34＋38＋42＋46＋50＋54

（2）1＋2＋3＋4＋5＋6＋……＋199＋200

2.一个等差数列的首项是 5，公差是 2，那么它的第 10 项、第 15 项各是多少？

3.有一列数：1、5、9、13、17、21……问第 1000 个数是几？4921 是第几项？

4. ①1＋5＋9＋13＋17＋……＋3997

②3＋6＋9＋12＋15＋……＋1995＋1998

5.（2＋4＋6＋8＋……＋198＋200）－（1＋3＋5＋7＋……＋197＋199）

6.小丽读一本小说，她第一天读 30 页，从第二天起她每天读的页数比前一天多 3 页，最后一天读了 60 页正好读完，这本书共有多少页？

7.有一个数列：6、10、14、18、22……，这个数列前 100 项的和是多少？

8.计算小于 100 的所有奇数的和。

9.被 5 除余 1 的两位数共有多少个？它们的和是多少？

10.已知墙上的挂钟几点钟就打点几下，每半点钟打点一下，问挂钟在一昼夜共打点多少下？从早上 6 点到晚上 10 点共打点几下？（钟面上只有 1 点—12 点）

11.用 1、2、3、5、7、13、17 和 19 这八个数能组成多少个真分数？
12.一个剧场设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位，这个剧场一共设置了多少座位？

13.一个八角琉璃亭的顶部要铺琉璃瓦，它的八个斜面都是相同的等腰三角形，如果最

上面一层铺1块琉璃瓦，往下每一层多铺2块，一共铺20层，一共需要多少琉璃瓦？

14.1＋2＋3－4＋5＋6＋7－8＋9＋……＋25＋26＋27－28

第二讲　整数、小数简便运算

知识要点与学法指导：

在进行整数、小数计算时，要根据算式的结构和数的特征，灵活运用运算法则、定律、性质、公式，把一些较复杂的运算化繁为简，化难为易。常用到以下知识：

1.运算定律：

（1）加法交换律：$a+b=b+a$

（2）加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

（3）乘法交换律：$a\times b=b\times a$

（4）乘法结合律：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

（5）乘法分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

2.去括号或添括号：

$a+(b+c)=a+b+c$　　　$a\times(b\times c)=a\times b\times c$

$a+(b-c)=a+b-c$　　　$a\times(b\div c)=a\times b\div c$

$a-(b+c)=a-b-c$　　　$a\div(b\times c)=a\div b\div c$

$a-(b-c)=a-b+c$　　　$a\div(b\div c)=a\div b\times c$

3.积不变性质：若一个因数扩大若干倍，另一个因数缩小相同的倍数，则积不变。

4.商不变性质：若被除数和除数同时乘以或除以相同的非零数，则商不变。

5.等差数列求和公式：$S=(a_1+a_n)\times n\div 2$

6.平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)$

例 1　计算：9999×7778＋3333×6666

【分析与解】

在这个算式的两个乘积中，因数之间存在着倍数关系：9999 是 3333 的 3 倍。利用这个关系，可以把 3333×6666 转化成 9999×2222 这样原式转化为：

9999×7778＋3333×6666
＝9999×7778＋9999×2222
＝9999×（7778＋2222）
＝9999×10000
＝99990000

想一想：如果计算 9999×2222＋3333×3334，你该怎么转化？

试一试 1

0.9999×0.7＋0.1111×2.7

例 2 计算 2003×200420042004－2004×200320032003

【分析与解】

把 200420042004 分解成 2004×100010001

把 200320032003 分解成 2003×100010001

然后再计算就非常简便了，你发现其中的奥妙了吗？

2003×200420042004－2004×200320032003
＝2003×2004×100010001－2004×2003×100010001
＝0

试一试 2

52×535353－53×525252

例 3 计算 2004－2001＋1998－1995＋1992－1989＋…＋18－15＋12

【分析与解】

题目中，上千个加数和减数进行加减混合运算，如果照常规按次序演算，那是非常的麻烦。

观察题目里的运算符号：一加一减，一加一减，按规律排列；再看题目里的数字：或“加数”或“减数”，正好是两组等差数列。所以，本题的计算可以分组进行。

原式＝(2004＋1998＋1992＋…＋24＋18＋12)
－(2001＋1995＋1989＋…＋27＋21＋15)
＝（2004＋12）×333÷2－（2001＋15）×332÷2
＝1008×（333－332）
＝1008

本题运用分组、等差数列求和公式及提取公因数等技巧和方法，使计算巧妙且容易。

如果本题利用题中“一加一减”的组合规律，自左至右，按两个数为一组，进行巧算，也是一种化繁为简的好方法。

原式＝（2004－2001）＋（1998－1995）＋（1992－1989）＋…＋（24－21）＋（18－15）＋12
＝3×332＋12
＝1008

注意：题目是“一加一减”为一组的，所以最后的加数“12”别忘加上。

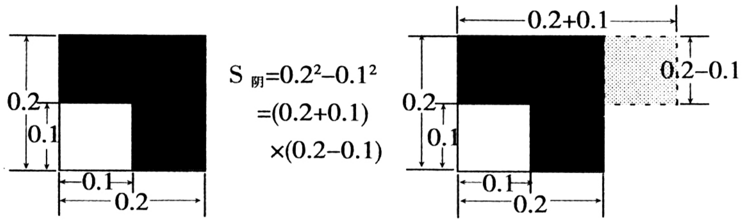
试一试 3

1994＋1993－1992－1991＋1990＋1989－1988－1987＋……＋6＋5－4－3＋2＋1

例 4 计算 $7.1^2-6.7^2+6.3^2-5.9^2+5.5^2-5.1^2+\cdots+3.1^2-2.7^2$ **【分析与解】**

本题直接计算繁杂，易出错。如若分成两组，又找不到平方和的巧算规律; 如若按一组一组的平方差来推算，试一试，能不能从中找到规律？

因为一个数的平方，相当于以这个数为边长的正方形面积，所以我们结合图形来研究两个较小数的平方差与这两个数之间有什么关系？



“两个数的平方差，等于这两个数的和乘以这两个数的差”，这是不是规律呢？让我们验证一下：

$7.1^2-6.7^2$
$=50.41-44.89$
$=5.52$

$7.1^2-6.7^2$
$=(7.1+6.7)\times(7.1-6.7)$
$=13.8\times0.4$
$=5.52$

因此，这道题可以这样巧算：

原式＝（7.1＋6.7）×（7.1－6.7）＋（6.3＋5.9）×（6.3－5.9）＋（5.5＋5.1）×（5.5－5.1）＋…＋（3.1＋2.7）×（3.1－2.7）

＝（7.1＋6.7）×0.4＋（6.3＋5.9）×0.4＋（5.5＋5.1）×0.4＋…＋（3.1＋2.7）×0.4

＝（7.1＋6.7＋6.3＋5.9＋5.5＋5.1＋…＋3.1＋2.7）×0.4

＝（7.1＋2.7）×12÷2×0.4

＝9.8×2.4

＝23.52

解题过程中，发现每一组平方差都是两数和的 0.4 倍，可以用等差数列求和公式，简算出所有加数的和，使全题进一步得到简化。

试一试 4

$2006^2-2004^2+2002^2-2000^2+1998^2-1996^2+\cdots+6^2-4^2+2^2$

练习二□

1. 3.71－2.74＋4.7＋5.29－0.26＋6.3
2. 125×69＋125×19
3. 4.75－9.63＋（8.25－1.37）
4. 14.15－（7.875－6.85）－2.125
5. 88888×3＋11111×76
6. 0.9999×2222＋0.3333×3334
7. 4.82×0.59－0.323×5.9＋0.41×1.59
8. 11×22＋0.22×3300＋330×4.4
9. 1997×19961996－1996×19971997
10. 1234×9090＋1234×909
11. 2004×20082008－2008×20042004
12. 20－19＋18－17＋……＋4－3＋2－1

13.100＋99－98＋97－96＋……＋3－2＋1

14.（2＋4＋6＋……＋2006）－（1＋3＋5＋……＋2005）

15.（101＋103＋105＋……＋199）－（90＋92＋94＋……＋188）

16.2001＋1999－1997－1995＋1993＋1991－1989－1987＋……＋9＋7－5－3＋1

17.计算：

（1）51×49　（2）28×32　（3）2008^2-2007^2

18. $2^2-1.9^2+1.8^2-1.7^2+1.6^2-1.5^2+1.4^2-1.3^2+1.2^2-1.1^2$

19. $99^2-97^2+95^2-93^2+\cdots\cdots+3^2-1^2$

第三讲　定义新运算

知识要点与学法指导：

定义新运算是指运用某种特殊符号来表示特定的意义，从而解答某些特殊算式的一种运算。解题时需注意以下几点：

1. 解答定义新运算，关键是要正确地理解新定义的算式含义，然后严格按照新定义的计算顺序，将数值代入，转化为常规的四则运算算式进行计算。

2. 定义新运算是一种人为的、临时性的运算形式，它使用的是一些特殊的运算符号，如：*、△、⊙、◎等，这是与四则运算中的“＋ - ×÷”不同的。

3. 新定义的算式中有括号的，要先算括号里面的。但它在没有转化前，是不适合于各种运算定律的。

例 1　“⊙”表示一种新的运算，它是这样定义的：

a⊙b＝a×b－（a＋b）

求：（1）3⊙5；（2）（3⊙4）⊙5。

【分析与解】

根据规定，这种新运算的意义就是：求两个数的积减去这两个数的和所得的差。对于题（2），应先算括号里的结果 x，然后再算出 x⊙5 的结果。

解：（1）3⊙5＝3×5－（3＋5）

＝15－8＝7

（2）因为 3⊙4＝3×4－（3＋4）

＝12－7

＝5

所以（3⊙4）⊙5＝5⊙5

＝5×5－（5＋5）＝15

想一想：3⊙5 与 5⊙3 相等吗？

我们知道，括号可以用来改变运算顺序，在有括号的算式中，应先算小括号里的，再算中括号里面的。人为定义的新运算中也有这条规定。

试一试 1

将新运算 “*”定义为：a*b＝(a＋b)×(a－b)。求 37*13

例 2　将新运算“*”定义为：$a*b=b^2+a$。求（4*8）*（3*7）**【分析与解】**

我们先算括号里面的。

按照定义，很容易求得 $4*8=8^2+4=68$，$3*7=7^2+3=52$，再运用定义可得：

$$(4*8)*(3*7)=68*52=52^2+68=2772$$

想一想：4*8 与 8*4 相等吗？

定义新运算都是人为规定的，所以这样的运算可以多种多样。

试一试 2

设 $a\triangle b=a^2+2b$，求 $10\triangle 6$ 和（$1\triangle 2$）△（$2\triangle 8$）

例 3　设 p、q 是两个数，规定 $p\odot q=4\times q-(p+q)\div 2$，

求 $3\odot(4\odot 6)$。

【分析与解】

根据定义先算 $4\odot 6$。在这里，“⊙”是新的运算符号。

$$
\begin{aligned}
&3\odot(4\odot 6)\\
=&3\odot[4\times 6-(4+6)\div 2]\\
=&3\odot 19\\
=&4\times 19-(3+19)\div 2\\
=&76-11\\
=&65
\end{aligned}
$$

试一试 3

设 p、q 是两个数，规定 $p◎q=p^2+(p-q)\times 2$，求 30◎（5◎3）

例 4　如果 $2*3=2+3+4=9$，$5*4=5+6+7+8=26$，那么：　　（1）求 9*5 的值；（2）解方程：$x*3=15$。

【分析与解】

“*”表示求连续自然数的和，“*”前的数表示第一个数（首项），“*”后的数表示连续自然数的个数。

按照定义，有

$$9*5=9+10+11+12+13=55$$

$$x*3=x+(x+1)+(x+2)=3x+3$$

原方程可改写为：$3x+3=15$

解方程，得　　　　$x=4$

试一试 4

如果 $3\triangle 2=3+5=8$

$4\triangle 3=4+6+8=18$

（1）求 $6\triangle 4$　　　（2）解方程 $x\triangle 4=32$

例 5 规定“□”的运算法则如下，对于任何整数 a、b：

$$a□b=\begin{cases}2\times a+b-1 & (a+b\geqslant 10)\\ 2\times a\times b & (a+b<10)\end{cases}$$

求：（1□2）＋（2□3）＋（3□4）＋（4□5）＋（5□6）＋（6□7）＋（7□8）＋（8□9）＋（9□10）。

【分析与解】

这道题中实际上定义了两种运算，必须根据两个数的和的大小，确定对它们施行哪种新运算。不妨把 a□b＝2×a＋b－1 称为运算①，把 a□b＝2×a×b 称为运算②，对 1□2，2□3，3□4，4□5，按运算②来算；对 5□6，6□7，7□8，8□9，9□10，按运算①来算。

1□2＋2□3＋3□4＋4□5
＝2×（1×2＋2×3＋3×4＋4×5）
＝2×（2＋6＋12＋20）＝80
5□6＋6□7＋7□8＋8□9＋9□10
＝2×（5＋6＋7＋8＋9）＋6＋7＋8＋9＋10－1×5
＝2×35＋40－5＝105

所求的和为 80＋105＝185

总结与提示 按照新定义的运算求某个算式的结果，关键是要正确理解这种新运算的意义，并严格按新定义的要求，将数值代入新定义的式子，转化为我们熟知的加、减、乘、除四则运算。

对新定义的运算式子，如果有括号，应先算括号里面的。但是新定义的运算一般不符合交换律、结合律和分配律。

新定义的运算里，所引入的符号是随意的，而不是确定的、通用的。它们在具体的题目中有特定的意义。解完题目后，它将失去这种特定的意义，即不可以把这种意义引入其他情况下通用。

练习三

1. 设 a*b＝4×a－5×b，试计算：

（1）5*4；

（2）（6*4）*2；

（3）求 x*（2*x）＝18 中 x 的值。；

2. 如果 a*b 的含义表示 a×b－a＋b，那么 2*（4*6）*8 的值是多少？

3. 规定 a△b＝ $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$，试求（5△3）＋$\frac{8}{15}$的值。

4. 设 a，b 表示整数（不包括 0），规定运算◎：

a◎b＝a÷b×2＋3×a－b，求 169◎13 的值。

5. 对于整数 a，b，规定运算“*”：

a*b＝a×b－a＋1，又知（2*x）*2＝0，求 x 的值。

6. 对于任意非零自然数 a，b，规定 a*b＝a÷b×2＋3，且 256*a＝19，求 a 的值。

7. 对于任意正整数 a、b，定义运算◎如下: 如果 a、b 同为奇数或同为偶数，那么，a◎b＝（a＋b）÷2；如果 a、b 的奇偶性不同，那么，a◎b＝（a＋b＋1）÷2；

求：①（1993◎1994）◎（1994◎1995）◎……◎（1999◎2000）

②1993◎1995◎1997◎1999◎2001

8. 规定运算如下：a△b＝（a＋b）×a，求（2△3）△5

9. 如果 5*2＝5×6，2*3＝2×3×4，求 3*4。

10. 定义新运算：x○y＝（x×y）＋（x＋y）

（1）求 6○2　　（2）若 5○a＝23　　求：a

11. 如果 2◎4＝24÷（2＋4），3◎6＝36÷（3＋6）

（1）求 8◎4　　（2）解方程 a◎8＝2

12. 定义三种运算“△”、“□”、“○”，对于两数 x、y，有 x△y＝2x＋2，x□y＝x×y＋1，x○y＝y－1。

求：[1○（4□5）] △1000

13. 规定 $x\triangle y=\begin{cases}2x+y & (x\geqslant y)\\ x+2y & (x<y)\end{cases}$

求：1△2△4

第四讲　鸡兔同笼问题

知识要点与学法指导：

鸡兔同笼的基本问题是：已知鸡、兔总头数和总脚数，求鸡、兔各有多少只。

（1）解决鸡兔同笼问题的方法通常是用假设法，解题思路是：先假设笼子里装的全是鸡，根据鸡兔的总数就可以算出在假设下共有几只脚，把这样得到的脚数与题中给出的脚数相比较，看看差多少，每差 2 只脚就说明有 1 只兔，将所差的脚数除以 2，就可以算出共有多少只兔。

（2）将基本问题中同笼的是鸡、兔两种不同东西，还可以引伸到同笼中不同东西是三种，四种等等。

注意：鸡兔同笼问题的两种变型均可转化成基本问题来解决。

例 1　在同一个笼子中，有若干只鸡和兔，从笼子上看有 40 个头，从笼子下数有 130 只脚，那么这个笼子中装有兔、鸡各多少只？**【分析与解】**

题目中给出了鸡、兔共有 40 只，如果让兔子把前两只脚抬起来，身子直立，那么兔子就成了 2 只脚（即把兔子都当成两只脚的鸡），鸡兔总的脚数是 40×2＝80（只），比题中所说的 130 只要少 130－80＝50（只）。

现在让兔子把抬起的两只前脚放下来，每只兔子会增加 2 只脚，多少只兔子才会增加 50 只脚呢？显然是 50÷2＝25（只）因此，兔子数是 50÷2＝25（只）

解一：　兔：（130－40×2）÷（4－2）
＝（130－80）÷2
＝50÷2
＝25（只）
鸡：40－25＝15（只）

解二：把鸡和兔都想象成一半脚着地，就会有 130÷2＝65（只）脚，鸡是 1 个头对 1 只脚，而兔却 1 个头对两只脚，因此用一半脚数减去总头数，得到的应该是每只兔多出 1 只脚的总数，多几只脚就有几只兔。兔有 65－40＝25（只）；鸡有 40－25＝15（只）；

列式计算　　兔：130÷2－40＝25（只）
鸡：40－25＝15（只）；

答：笼子中有兔子 25 只，有鸡 15 只。

想一想：用方程怎么解答？

试一试 1

有一首民谣：“一队猎手一队狗，二队并着一起走，数头一共三百六，数腿一共八百九。”问民谣中有多少个猎手和多少条狗？

例 2　停车场共停 24 辆车，其中有 4 个轮子的汽车和 3 个轮子的摩托车。这些车共有 86 个轮子。求汽车和摩托车各有多少辆？

【分析与解】

假设这 24 辆车都是 3 个轮子，那么一共有 3×24＝72 个轮子。比实际轮子数少了 86－72＝14 个轮子。为什么会少了 14 个轮子呢？因为我们把 4 个轮子的汽车假设成 3 个轮子来计算了，每辆汽车少算了（4－3）个轮子。14÷1＝14 说明这 24 辆车中有 14 辆是汽车，有 24－14＝10 辆摩托车。

算式为（86－3×24）÷（4－3）＝14（辆）

24－14＝10（辆）

答：汽车有 14 辆，摩托车有 10 辆

你会列方程求解吗？

试一试 2

小明的妈妈买了苹果和梨共 10 千克，一共花了 27 元钱。已知苹果的价钱是每千克 3 元，梨是每千克 2 元，求这两种水果各买了多少千克？

例 3　数学竞赛抢答题共 10 道题，规定答对一题得 15 分，答错一题倒扣 10 分（不答按答错计算）。小敏回答了所有的问题，结果共得 100 分。问答对和答错各几题？

【分析与解】

假设小敏 10 道题都答对了，应该得 15×10＝150（分），比实际得分多算了 150－100＝50（分）。因为这 10 道题中有答错的题。每答错一题，不仅不能得 15 分，而且还要倒扣 10 分。也就是说，错一题比对一题减少 15＋10＝25（分）。50÷25＝2，所以，小敏答错了 2 道题，答对了 8 道题。

（15×10－100）÷（15＋10）＝2（道）

10－2＝8（道）

答：小敏答对 8 道题，答错 2 道题。

试一试 3

李明参加射击比赛，共打 20 发，约定每打中一发记 10 分，脱靶一发扣 6 分，结果得了 168 分。他一共打中了多少发？

例 4 蜘蛛有 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿和 2 对翅膀，蝉有 6 条腿和 1 对翅膀，现在这三种昆虫共 21 只，有 140 条腿和 24 对翅膀，求每种昆虫各几只？

【分析与解】

此题中出现了 3 种昆虫，不仅有腿的比较，而且又出现了翅膀，显然比前几道题复杂了。

解此题的关键就是将 3 种昆虫转化为 2 种昆虫，这样解起来就比较容易了。突破口在于，蝉和蜻蜓都有 6 条腿。

解：因为蜻蜓和蝉都有 6 条腿，所以从腿的数目考虑，可以把昆虫分成“8 条腿”和“6 条腿”两种，利用基本关系式算出 8 条腿的蜘蛛数：

（140－6×21）÷（8－6）

＝（140－126）÷2

＝14÷2

＝7（只）

从而，可以推知 6 条腿的昆虫共有：

21－7＝14（只）

也就是蜻蜓和蝉共有 14 只，因为蜻蜓和蝉共有 24 对翅膀，现在再用一次基本关系式，得蝉数是：

（14×2－24）÷（2－1）

＝（28－24）÷1

＝4（只）

因此，蜻蜓数是 14－4＝10（只）

答：有 7 只蜘蛛，4 只蝉，10 只蜻蜓。

试一试 4

现有蜘蛛、蜻蜓、蝉这三种昆虫共 47 只，共有腿 324 条，翅膀 37 对。其中每只蜘蛛无翅 8 条腿，每只蜻蜓有 2 对翅膀和 6 条腿，每只蝉有 1 对翅膀和 6 条腿，问每种昆虫各几只？

练习四

1. 今有鸡兔共 35 个头，脚共有 94 只，求鸡、兔各有多少只？

2. 动物园里有一群鸵鸟和长颈鹿，它们共有 30 只眼睛和 44 只脚，问鸵鸟和长颈鹿各有多少只？

3. 杂技团有独轮车和三轮车共 30 辆，两种车共有 70 个轮子，问这两种车各有多少辆？

4. 有 10 分和 20 分的邮票共 18 张，总面值为 2.8 元。问 10 分和 20 分的邮票各有多少张？

5. 同学们参加投篮比赛，规定：每投中一球得 5 分，投不中倒扣 3 分，小明投了 20 个球，得了 68 分。问：他投中了几个球？

6．方方和圆圆两个人进行数学比赛，商定算对一题给 20 分，错一题扣 12 分。方方和圆圆各算了 10 道题，两人共得 208 分，方方比圆圆多得 64 分，问他俩各算对了多少道题？

7．刘老师带了 41 名同学去北海公园划船共租了 10 条船。每条大船坐 6 人，每条小船坐 4 人，问大船、小船各租几条？

8．鸡与兔共 100 只，鸡脚比兔脚多 80 只，问鸡兔各有多少只？

9．大油瓶一瓶装 4 千克油，小油瓶 2 瓶装 1 千克油。现有 100 千克油装了 60 个瓶子，问大小油瓶各用了多少个？

10．停车场上有汽车和自行车共 71 辆，已知汽车的轮子总数比自行车的轮子总数多 116 个，问汽车和自行车各有多少辆？

11．松鼠妈妈采松子，晴天每天采 20 个，雨天每天采 12 个，它一连采了 112 个，平均每天采了 14 个，问这些天中有几天是雨天？

12．某运输队为超市运送暖瓶 500 箱，每箱装有 6 个暖瓶。已知每 10 个暖瓶的运费为 5 元，损坏一个的话，不但不给运费还要赔偿成本费 10 元；运完后结算时，运输队共得 1350 元运费。问共损坏了多少个暖瓶？

13. 三种昆虫共 18 只，它们共有 20 对翅膀 116 条腿，其中每只蜘蛛无翅 8 条腿；每只蜻蜓有两对翅膀 6 条腿；每只蝉有 1 对翅膀 6 条腿，问这三种昆虫各有多少只？

14．有一元、五元和十元的人民币共 25 张，总面值 110 元，已知一元和五元的张数相等，问三种面值的人民币各有几张？

第五讲　盈亏问题

知识要点与学法指导：

盈亏问题又叫盈不足问题，是指把一定数量的物品平均分给固定的对象，如果按某种标准分，则分配后会有剩余（盈）；按另一种标准分，分配后又会有不足（亏），求物品的数量和分配对象的数量。

从本质上讲，盈亏问题就是对两个数量进行比较时采用了两种不同的叙述方式：

一种方式：甲数是乙数的 a 倍多 m。

另一种方式：甲数是乙数的 b 倍少 n。求甲乙两数是多少？

例如: 把一袋饼干分给小班的小朋友，每人分 3 块多 12 块; 如果每人分 4 块，少 8 块。小朋友有多少人？饼干有多少块？这种一盈一亏的情况，就是我们通常说的标准的盈亏问题。

盈亏问题的基本类型和解法有三种：

1、“一盈一亏”：（盈＋亏）÷两次分得的差＝参与分配对象总数；

2、“两盈”：（大盈－小盈）÷两次分得的差＝参与分配对象总数；

3、“两亏”：（大亏－小亏）÷两次分得的差＝参与分配对象总数；

当然，盈亏问题也可以通过设未知数列方程来解决。

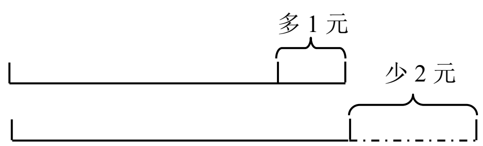
例 1　小明去买练习本，他付给营业员的钱买 4 本多 1 元，买 6 本又差 2 元，小明付给营业员多少钱？每本练习本多少元？

【分析与解】

首先画线段图看一看。

解法一：第一种方案：

第二种方案：



由题意可知，小明付的钱数和每本练习本的价钱是不变的。比较两种方案，结果相差 1＋2＝3（元），即第二种购买方案比第一种要多 3 元。为什么要多用 3 元钱呢？因为第二种

方案比第一种多买6－4＝2本，所以用3÷2＝1.5（元），就是每本练习本的价钱。再用1.5×4＋1＝7（元），就是小明付给营业员的钱了。

（1＋2）÷（6－4）＝1.5（元）

1.5×4＋1＝7（元）

解法二：设每本练习本X元，小明付给营业员的钱数为（4X＋1）元或（6X－2）元，二者是相等的关系，因此，列方程得：

4X＋1＝6X－2

6X－4X＝1＋2

2X＝3

X＝1.5

4X＋1＝4×1.5＋1＝7

答：小明付给营业员7元钱，每本练习本1.5元。

试一试1

幼儿园老师给小朋友分梨子，如果每人分4个，则多9个；如果每人分5个，则少6个。问有多少个小朋友？有多少个梨子？

例2 小红把自己的一些连环画借给她的几位同学。若每人借5本则差17本；若每人借3本，则差3本。问小红的同学有几人？她一共有多少本连环画？

【分析与解】

这是一道“两亏”题。从题意可知，同学的人数和连环画的本数是不变的。比较两种借书方案，可以得出每人借5本比3本要多需17－3＝14（本）书，为什么会多需14本书呢？这是因为每人多借5－3＝2（本）。每人多借2本，多少人就多需14本呢？用14÷2＝7（人），这就是同学的人数。再用7×5－17＝18（本）就是连环画的本数。

（17－3）÷（5－3）＝7（人）

7×5－17＝18（本）

答：小红的同学有7人，她一共有18本连环画。

你还有其他解答方法吗？请试一试。

试一试2

学校将一批铅笔奖给三好学生，每人9支缺15支；每人7支缺7支。问三好学生有多少人？铅笔有多少支？

例3 全班同学去划船，如果减少一条船，每条船正好坐9个同学；如果增加一条船，每条船正好坐6个同学。这个班有多少个同学？

【分析与解】

根据题意可知：每船坐9人，就能节省下来一条船，也就是除了现有人数，还能再坐9人；每船坐6人，就要增加一条船，否则就有6人坐不上船。因此，每船坐9人比每船坐6人可多坐9＋6＝15（人），15里面包含5个（9－6），说明有5条船。知道了有5条船，就可以求全班人数了，用9×（5－1）＝36（人）

（9＋6）÷（9－6）＝5（条）

9×（5－1）＝36（人）

答：这个班有 36 人。

用其他方法解答：

试一试 3

五年级同学去划船，如果增加一只船，正好每只船上坐 7 人；如果减少一只船，正好每只船上坐 8 人。求五年级共有多少同学去划船？

例 4 用绳测井深，把绳三折，井外余 2 米，把绳四折，还差 1 米不到井口，那么井深多少米？绳长多少米？

【分析与解】

绳三折，井外余 2 米，说明绳子比井深的 3 倍多 3×2＝6（米）；绳四折，还差 1 米不到井口，说明绳子比井深的 4 倍少 4×1＝4（米）。

所以，三折——余 3×2＝6（米）（盈）

四折——差 4×1＝4（米）（亏）

解：井深　（3×2＋4×1）÷（4－3）

＝（6＋4）÷1

＝10（米）

绳长　(10＋2)×3＝36（米）或(10－1)×4＝36（米）

答：井深 10 米，绳长 36 米。

试一试 4

用绳测一水窖的深度，把绳 2 折，窖口外绳余 3 米；把绳 4 折，则还差 1 米不到窖口。问水窖深和绳长各多少米？

练习五

1. 老师把一些铅笔奖给三好学生。每人 5 支则多 4 支；每人 7 支则少 4 支。老师有多少支铅笔？奖给多少个三好学生？

2. 数学兴趣小组同学做一些数学题，如果每人做 7 道，则少 27 道；如果每人做 5 道，则少 7 道。问有多少学生？几道数学题？

3. 一个旅游团去旅馆住宿，6 人一间，多 2 个房间；若 4 人一间又少 2 个房间。旅游团共有多少人？

4.六年级同学去划船，如果增加一只船，正好每只船上坐 5 人，如果减少一只船，正好每只船上坐 7 人。六年级有多少人去划船？

5．老师发练习本给第一组的同学，如果每人发 7 本还多 7 本，如果每人发 9 本，则少 9 本，第一小组有多少个同学？老师带来多少本练习本？

6. 小朋友分糖果，每人分 10 粒，正好分完；若每人分 16 粒，则少 48 粒。问一共有多少粒糖果？

7. 在桥上测桥高。把绳长对折后垂到水面，还余 4 米；把绳长 3 折后垂到水面，还余 1 米。桥高多少米？绳长多少米？

8. 幼儿园老师将一筐苹果分给小朋友。如果分给大班的学生每人 5 个余 10 个；如果分给小班的学生每人 8 个缺 2 个。已知大班比小班多 3 个学生，这筐苹果有多少个？

9. 王老师给美术小组分彩色笔，如果每人分 5 枝则多 12 枝；如果每人分 8 枝，则还多 3 枝，请问有多少枝彩色笔？美术小组有多少人？

10. “五一”节某单位租小客车若干辆去旅游，如果每辆车坐 15 人，则空出 2 辆车；如果每辆车坐 11 人，则空出 2 个座位。求租小客车的辆数和这个单位的人数。

11. 学生分练习本，其中两人每人分 6 本，其余每人分 4 本，则多 4 本；如果一人分 10 本，其余的人分 6 本，则少 18 本。学生有多少人？练习本有多少本？

12. 小明将自己的故事书借给他的几个同学。若每人借 3 本，则差 8 本；若每人借 5 本，则差 20 本。小明的同学有几个？他一共有多少本故事书？

13. 为了测量一口井的深度，同学们想出用长绳吊重物来测量的方法，将绳子 3 折来量，井外余 6 米，将绳子 4 折来量，井外余 2 米。你能算出井深和绳长各多少米吗？

第六讲　行程问题（一）

知识要点与学法指导：

行程应用题是专门研究物体运动的速度、时间、路程三者关系的应用题。行程问题的主要数量关系是：路程＝速度×时间。知道三个量中的两个量，就能求出第三个量。行程问题大致可以分为以下三种情况：

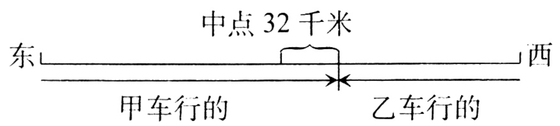
（1）相向而行：速度和×相遇时间＝距离

（2）相背而行：相背距离＝速度和×时间

（3）同向而行：速度差×追及时间＝追及距离

遇到行程问题，应养成先在草稿纸上根据题意画线段图的好习惯，可以帮助我们分析数量关系，确定各人行走时到达的位置，从而突破难点，对于一些较复杂的行程问题，我们也可以充分利用我们熟悉的数量关系，用方程来解。

例 1　甲、乙两辆汽车同时从东、西两地相向开出，甲车每小时行 56 千米，乙车每小时行 48 千米。两车在距中点 32 千米处相遇。东、西两地相距多少千米？



【分析与解】

两车在距中点 32 千米处相遇，由于甲车的速度大于乙车的速度，所以相遇时，甲车应行了全程的一半多 32 千米，乙车行了全程的一半少 32 千米。因此，两车相遇时，甲车比乙车共多行了 32×2＝64（千米）。两车同时出发，又相遇了，两车所行的时间是一样的，为什么甲车会比乙车多行 64 千米？因为甲车每小时比乙车多行 56－48＝8（千米）。64÷8＝8 所以两车各行了 8 小时，求东、西两地距离只要用（56＋48）×8 即可。

32×2÷（56－48）＝8（小时）

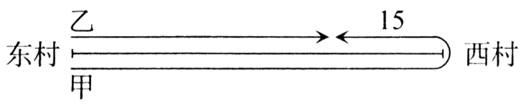
（56＋48）×8＝832（千米）

答：东、西两地相距 832 千米。

试一试 1

小玲每分行 100 米，小平每分行 80 米，两人同时从学校和少年宫相向而行，并在离中点 120 米处相遇，学校到少年宫有多少米？

例 2 甲、乙二人上午 8 时同时从东村骑车到西村去，甲每小时比乙快 6 千米。中午 12 时甲到西村后立即返回东村，在距西村 15 千米处遇到乙。求东、西两村相距多少千米？



【分析与解】

二人相遇时，甲比乙多行 15×2＝30（千米），说明二人已行 30÷6＝5（小时），上午 8 时至中午 12 时是 4 小时，所以，甲的速度是 15÷（5－4）＝15（千米）。因此，东、西两村的距离是 15×（5－1）＝60（千米）。

上午 8 时至中午 12 时是 4 小时。

15×2÷6＝5（小时）

15÷（5－4）＝15（千米）

15×4＝60（千米）

答：东、西村相距 60 千米。

试一试 2

甲、乙二人上午 7 时同时从 A 地去 B 地，甲每小时比乙快 8 千米。上午 11 时甲到达 B 地后立即返回，在距 B 地 24 千米处与乙相遇。求 A、B 两地相距多少千米？

例 3 一辆汽车从甲地开往乙地，平均每小时行 20 千米。到乙地后又以每小时 30 千米的速度返回甲地，往返一次共用 7.5 小时。求甲、乙两地间的路程。

【分析与解】

如果设汽车从甲地开往乙地时用了 x 小时，则返回时用了（7.5－x）小时。由于往返的路程是一样的，我们可以通过这个等量关系，列出方程式，求出 x 的值，就可以计算出甲、乙两地间的路程。

解：设去时用 x 小时，则返回时用（7.5－x）小时。

20x＝30×（7.5－x）

20x＝30×7.5－30x

50x＝225

x＝4.5

20×4.5＝90（千米）

答：甲、乙两地间的路程是 90 千米。

试一试 3

汽车从甲地开往乙地送货，去时每小时行 30 千米，返回时每小时行 40 千米。往返一次共用 8 小时 45 分，求甲、乙两地间的路程。

例 4　快、慢两车同时从 A 地到 B 地，快车每小时行 54 千米，慢车每小时行 48 千米。途中快车因故停留 3 小时。结果两车同时到达 B 地。求 A、B 两地间的距离。

【分析与解】

我们可以设快车行驶了 x 小时，那么，慢车就行驶了（x＋3）小时，利用快、慢两车所行的路程相等这一关系，可以列出方程，通过解方程求出快车所行驶的时间，最后用“速度×时间＝路程”这一关系求出 A、B 两地间的距离。

解：设快车行驶了 x 小时。

54x＝48×（x＋3）

6x＝144

x＝24

54×24＝1296（千米）

答：A、B 两地相距 1296 千米。

试一试 4

甲、乙二人同时从学校骑车出发去江边，甲每小时行 15 千米，乙每小时行 20 千米。途中乙因修车停留了 24 分钟，结果二人同时到达江边。从学校到江边要行多少千米？

练习六

1．一辆汽车和一辆摩托车同时从甲、乙两地相对开出，汽车每小时行 40 千米，摩托车每小时行 65 千米。两车在距中点 50 千米处相遇，甲、乙两地相距多少千米？

2. 小轿车每小时行 60 千米，比客车每小时多行 5 千米，两车同时从 A、B 两地相向而行，在距中点 20 千米处相遇，求 A、B 两地的路程。

3．甲、乙二人上午 9 时同时从 A 地骑车去 B 地，甲每小时比乙快 8 千米，中午 12 时，甲到 B 地后立即返回 A 地，在距 B 地 16 千米处遇到乙。求 A、B 两地相距多少千米？

4. 小平和小红同时从学校出发步行去小平家，小平每分钟比小红多走 20 米。30 分钟后小平到家，到家后立即原路返回，在离家 350 米处遇到小红。小红每分钟走多少米？

5. 甲、乙二人同时从 A 地到 B 地，甲每分钟走 250 米，乙每分钟走 90 米。甲到达 B 地后立即返回 A 地，在离 B 地 3.2 千米处与乙相遇。A、B 两地间的距离是多少千米？

6．一辆汽车从甲地开往乙地，去时平均每小时行 30 千米，返回时平均每小时行 40 千米，往返一次共用 7 小时。甲、乙两地相距多少千米？

7. 一架飞机所带的燃料最多可用 9 小时，飞机去时顺风，每小时可飞 1500 千米，返回时逆风，每小时可飞 1200 千米。这架飞机最多飞出多少千米就要往回飞？

8．兄弟二人同时从家去学校，哥哥每分钟走 90 米，弟弟每分钟走 70 米，途中哥哥因买文具停留了 2 分钟，结果与弟弟同时到达学校。他们家离学校有多远？

9．甲每分钟行 120 米，乙每分钟行 80 米，二人同时从 A 店出发去 B 店，当乙到达 B 店时，甲已在 B 店停留了 2 分钟。A 店到 B 店的路程是多少米？

10. 一辆汽车从甲地出发，速度是每小时 50 千米，在汽车开出 1 小时后，一辆摩托车以每小时 75 千米的速度从同一地点出发沿同一行驶路线去追赶这辆汽车，几小时可以追上？追上时距出发地有多远？

11.快慢两车从 A 地开往 B 地，快车每小时行 50 千米，慢车每小时行 45 千米。慢车提前 2 小时出发，结果两车同时到达 B 地。A、B 两地相距多少千米？

12. 一列火车通过一座长 2200 米的大桥用了 60 秒，用同样的速度穿越长 1400 米的隧道用了 40 秒，问这列火车的速度和车身长各是多少？

13. 一辆汽车从甲地开往乙地，平均每小时 40 千米，到乙地后又以每小时 60 千米的速度返回甲地。已知去时比返回多用 1 个小时，求甲、乙两地之间的路程。

14. 一辆汽车从甲地到乙地，如果每小时行驶 50 千米，要比规定时间晚到 8 小时；如果每小时行驶 60 千米，就可比规定时间提前 5 小时到，求甲、乙两地之间的距离。

第七讲　逻辑推理

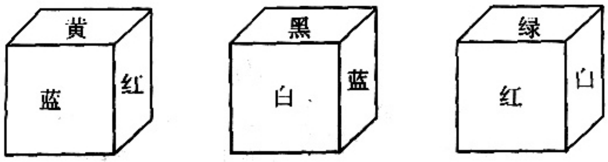
知识要点与学法指导：

逻辑推理就是依据逻辑规律，从一定的前提出发，通过一系列的推理来获取某种结论。

解决这类问题常用的方法有：直接法、假设法、排除法、图解法和列表法等。

逻辑推理问题的解决，需要我们深入地理解条件和结论，分析关键所在，找到突破点，进行合情合理的推理，最后作出正确的判断。

例 1　一个正方体的六个面上分别涂着红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色。根据下图摆放的三种情况，判断每种颜色的对面分别涂着哪种颜色。



【分析与解

如果直接思考哪种颜色的对面是什么颜色，有一定的困难。我们可以考虑，这种颜色的对面不会是什么颜色。

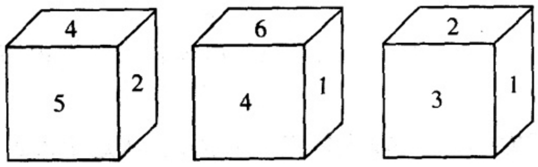
我们发现蓝色出现了两次，就先来考虑蓝色。从第一个图中可以知道，蓝色的对面不会是黄色和红色，从第二个图中又知道，蓝色的对面不会是黑色和白色，因此蓝色的对面一定是绿色。

红色也出现了两次，接下来再来考虑红色。从第一个图中知道，红色的对面不会是黄色和蓝色，从第三个图中又知道，红色的对面不会是绿色和白色，因此红色的对面一定是黑色。

剩下黄色的对面一定是白色。

试一试 1

一个正方体的六个面上分别写着数字 1，2，3，4，5，6。根据下面的三种摆法，判断每个数字对面上的数字各是几。



例 2　小明、小华和小刚三位同学中，有一位同学做了件好事。老师向他们三人了解情况。

小明说：“是小华做的。”

小华说：“不是我做的。”

小刚说：“不是我做的。”

他们三人中只有一人说的是真话。那么到底是谁说的真话，又是谁做的好事呢?

【分析与解】

我们可以先作出一种假设，从这个假设出发，充分利用每一个条件，进行层层推理，从而得出正确结论。

不妨假设是小明做的好事，那么小明说的是假话，小华说的是真话，而小刚说的也是真话，这与题目中告诉我们的“只有一人说的是真话”这一条件相矛盾，所以这件好事不是小明做的。

再假设是小华做的好事，那么可以发现小明说的是真话，小华说的是假话，而小刚说的也是真话，又矛盾了，所以也不是小华做的。

因此只可能是小刚做的好事，同时可以发现，三人中说真话的是小华。

其实，分析题目中的三句话我们还可以发现，小明与小华说的两句话是相互矛盾的，因此他们两个人中肯定有一个人说的是真话，而另外一个人说的是假话。但是题目中又告诉我们，只有一个人说的是真话。因此剩下来的小刚说的肯定是假话，因此这件好事就是小刚做的，而且可以判断出，说真话的是小华。

试一试 2

有一个珠宝店失窃了，经过几个月的侦察，查明作案的人肯定是 A、B、C、D 中的一个人。把他们四个人当做重大嫌疑犯进行审讯时，他们是这样招供的：

A：“珠宝店被盗那天，我在别的城市，所以我是不可能作案的。”B：“D 是盗窃犯。”

C：“B 是盗窃犯，他曾在黑市上卖珠宝。”

D：“B 与我有仇，他在陷害我。”

经过进一步调查知道，这四个人中只有一个人说的是真话。你知道罪犯是谁吗?是谁说的真话?

例 3 同住一间寝室的甲、乙、丙、丁四个人分别来自上海、南京、北京和沈阳。已知:

(1)甲不是来自上海，也不是来自北京；

(2)乙的家乡不是南京，也不是上海；

(3)如果甲不是来自南京，那么丙就不是来自上海；

(4)丁的家乡不是北京和上海。

那么他们四个人分别来自哪儿?

【分析与解】

我们可以绘制一张表格(如下图所示)。

	上海	南京	北京	沈阳
甲	×		×	
乙	×	×		
丙				
丁	×		×	

在这个表格中进行判断。用“×”表示否定，用“√”表示肯定。而且要注意，在这道题目中的每行、每列都只能有一个肯定，一旦取定，同行、同列都要否定。

现在已经把题目中的条件填在表格中了，接下来分析表格。

我们发现在上海的这一列里，已经有了三个否定，因此丙肯定是来自上海，在相应的这一格里打上“√”，同时把丙这一行的其余格子都打上“×”。接下来又可以看出，在北京的

这一列里已经有了三个否定，因此乙肯定是来自北京。

根据条件(3)可知，如果甲不是来自南京，那么丙就不是来自上海。而现在知道丙来自上海，所以甲肯定来自南京。最后剩下来的丁肯定来自沈阳。

因此甲来自南京，乙来自北京，丙来自上海，丁来自沈阳。(最后完成的表格如下图所示)

	上海	南京	北京	沈阳
甲	×	√	×	×
乙	×	×	√	×
丙	√	×	×	×
丁	×	×	×	√

试一试 3

张、王、李、赵四位师傅分别是甲、乙、丙、丁四个工厂的。现在已知：

(1)张师傅不是甲厂的；

(2)王师傅不是乙厂和丙厂的；

(3)李师傅既不是乙厂的，也不是丁厂的；

(4)赵师傅经常和乙厂、丙厂的那两位师傅一起喝酒；

(5)甲厂的那位师傅的年龄比赵师傅大。

根据以上条件，你能判断出他们四人各是哪个工厂的吗?

例 4　江波、潘锋、刘荣 3 位老师共同担任六年级（1）班语文、数学、政治、体育、音乐和美术 6 门课，每人教两门。现在知道：　　（1）政治老师和数学老师是邻居。

（2）潘锋最年轻。

（3）江波喜欢和体育老师、数学老师交谈。

（4）体育老师比语文老师年龄大。

（5）潘锋、音乐老师、语文老师 3 人经常一起去游泳。

你能说出 3 人分别教哪两门课吗？

【分析与解】

有这么多条件，我们该从何处入手呢？（3）和（5）提供的信息最多，我们可以从这里入手。为了使分析过程条理清晰，一目了然，我们可利用列表法整理条件，用“√”表示肯定，用“×”表示否定。

由（3）知江波不是体育老师、数学老师。在（江，数)、(江，体）两格中打“×”。

由（5）知潘锋不是音乐老师、语文老师。在（潘，音)、(潘，语）两格中打“×”。

由（2)、(4）知潘锋不是体育老师，所以刘荣是体育老师，在（刘，体）一格中打“√”。

由（3）知刘荣不是数学老师，在（刘，数）一格中打“×”，在剩下的（潘，数）一格中打“√”。

由（1）知潘锋又不是政治老师，在（潘，政）一格中打“×”，在剩下的（潘，美）一格中打“√”。

由（4）知刘荣不是语文老师，在（刘，语）一格中打“×”，在剩下的（江，语）一格中打“√”。

由（5）知江波不是音乐老师，在剩下的（刘，音）一格中打“√”。　最后得到下表：

	语	数	政	体	音	美
江	√	×	√	×	×	×
潘	×	√	×	×	×	√
刘	×	×	×	√	√	×

解： 江波教语文、政治，潘锋教数学和美术，刘荣教体育、音乐。

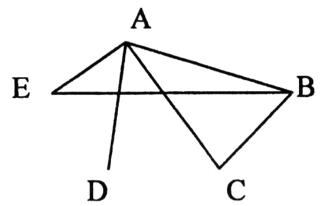
试一试 4

小赵、小钱、小孙和小李四位老师分别教数学、语文、自然和体育中的一门功课。而且知道，赵老师只能教语文或自然，钱老师只能教数学或体育，孙老师能教数学、语文或自然，而李老师只能教自然。请问：这四个人各教什么功课?

例 5 有 A、B、C、D、E 五位老朋友见面后，每两人各握手一次。已知 A 与另外四个人都握了手，B 与三个人握了手，C 与两个人握了手，D 只与一个人握了手。问还有哪些人之间没有握手？

【分析与解】

五个人每两人间握手一次，总的握手次数应当是 4＋3＋2＋1＝10 次。依题意我们可以把已握过手的人用下图表示出来。



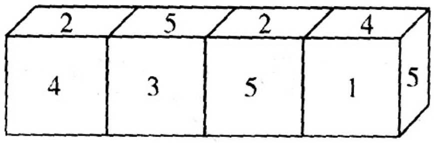
A 与四个人握过手，由于 D 只与一人握过手，所以 B 只能是与 E、C 握过手。从图中可以看出，已握过手的总次数是 6，还有四次没有握，当然这四次是在没有连线的两人间进行，因而得到还没有握过手的是：E 与 D、E 与 C、D 与 C、D 与 B。

试一试 5

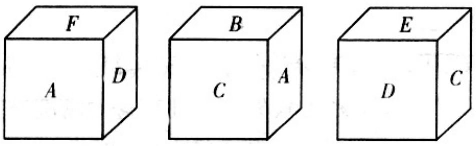
A、B、C、D、E 五位同学一起比赛象棋，每两人都要比赛一盘。到现在为止，A 已经赛了 4 盘，B 赛了 3 盘，C 赛了 2 盘，D 赛了 1 盘，E 赛了几盘？

练习七

1. 下图是由四个完全一样的正方体拼成的长方体，每个正方体的六个面上都按同样的顺序写有 1，2，3，4，5，6 六个数字，请判断出每个数字的对面上的数字各是几。



2. 根据一个正方体的三种不同摆法，判断出相对的两个面上的字母各是什么?



3. 红红、明明、亮亮、娟娟经常为学校做好事。星期天，校长发现操场被打扫得干干净净，找来他们 4 人询问。

红红说：“打扫操场在明明、亮亮、娟娟之中。”

明明说：“我没打扫操场，是亮亮扫的”。

亮亮说：“在红红和明明中间有一人是打扫操场的。”

娟娟说：“明明说的是事实。”

经过调查，证实 4 个人有两人说的是真话，另外两人说的是假话。这 4 人中有一人打扫操场，你知道是谁打扫的吗？

4. 听到一声响，原来我房内玻璃被打破了，询问了院子里的四个孩子，得到的回答是:

A 说：“是 B 打破的”。

B 说：“是 D 打破的”。

C 说：“不是我打破的。”

D 说：“B 在说谎”。

已知其中只有一个孩子说了真话，且肇事者也只是其中的一个人。那人是谁？

5. 张华、李明和王强三个同学在操场踢足球，他们中的一个人不小心把教室的一块玻璃踢碎了，老师找他们了解情况，他们是这样说的：

张华说：“是王强踢碎的。”

李明说：“不是我踢碎的。”

王强说：“也不是我踢碎的。”

事后查明他们三人中只有一个人说的是真话。是谁踢碎的玻璃?谁说了真话?

6. 甲、乙、丙、丁四个人分别在看书、打电脑、踢足球和打排球。已知：

(1)甲不在看书，也不在打排球；

(2)乙不在踢足球，也不在看书；

(3)如果甲不在踢足球，那么丙就不在看书；

(4)丁既不在打排球，也不在看书。

那么他们四个人分别在做什么?

7. 生日那天，小芳收到了一份贵重的生日礼物，而且她知道这肯定是她的三个好朋友甲、乙、丙中的一个人送的。到底是谁送的呢?甲、乙、丙三个人是这样告诉小芳的：

甲说："是我送的礼物"。

乙说："不是我送的。"

丙说："这份礼物是乙送的。"

经过进一步了解，发现他们三个人中有两个人说的是真话。你知道礼物是谁送的吗?

8、五位同学一起打乒乓球，两人之间最多只能打一盘。打完后甲说："我打了四盘"。乙说："我打了一盘。"丙说："我打了三盘。"丁说："我打了四盘。"戊说："我要了三盘。"你能肯定其中有人说错了吗？为什么？

9、. 学校要在甲、乙、丙、丁四位同学中选两位去参加话剧演出，在征求意见时：甲说：我服从分配。乙说：如果甲去，那我也去。丙说：如果我不去，那乙也不能去。丁说：我和丙要不都去，要不都不去。问学校该如何选派？

10. A、B、C 三个人进行跳绳比赛，比赛后，有人问他们比赛的结果。

A 说："我第一。"

B 说："我是第二。"

C 说："我不是第一。"

他们三人中有一人说了假话，问三个人的名次？

11．小赵、小钱和小孙一位是工人，一位是医生，一位是教师。现在只知道：

（1）小孙比教师年龄大。

（2）小赵和医生不同岁。

（3）医生比小钱年龄小。

想一想：谁是工人，谁是医生，谁是教师？

12．在一个年级里，甲、乙、丙三位老师分别讲授数学、物理、化学、生物、语文和历史中的两门课。现在知道：

（1）化学老师和数学老师住在一起。

（2）甲老师是三位老师中最年轻的。

（3）数学老师和丙老师都是优秀的国际象棋手。

（4）物理老师比生物老师年长，比乙老师又年轻。

（5）三人中最年长的老师的家比其他两位老师远。

问：甲、乙、丙三位老师分别讲授哪两门课？

第八讲　牛吃草问题

知识要点与学法指导：

牛吃草问题是英国伟大的数学家牛顿提出来的，因而叫做“牛顿问题”。

“牛顿问题”的难点在于草每天都在生长，草的数量在不断变化。因此，解答这类题的关键是从变化中找到不变的量，即原有的草量和每天新长出的草量。

解题时通常都是把 1 个个体在 1 个时间单位内完成的工作量假设为 1 份，从而逐步弄清：

1. 原有的初始工作量是多少。

2. 每个时间单位均匀增加的份额是多少。

3. 把参加完成工作者分成两部分，一部分解决原始工作量，另一部分解决均匀增长的工作量。

4. 原始工作量完成之时，均匀增长也同时停止。

为帮助同学们正确解答牛吃草问题，在这里把解法步骤编成口诀，帮助大家熟练掌握解题技巧。

牛吃草问题冷静想，关键是找不变量。

1 头牛 1 天吃 1 份，头数乘天数是总量。

总量、天数各相差，两差相除求生长。

总量去新长是原有草，牛分两路吃草忙。

新草每天要吃光，牛与长量要相当，

余牛去除原有草，吃草天数显真相。

英国著名科学家牛顿在他所著的《普通算术》中有这样一道题：12 头牛 4 周吃草 $3\frac{1}{3}$格

尔，同样的牧草 21 头牛 9 周吃 10 格尔。问 24 格尔牧草多少头牛 18 周吃完？（格尔是牧场面积单位）

这道题粗看好像与我们平时做的几头牛吃一堆干草的题没什么区别，但再仔细想一想，你就会发现它们大不一样：几头牛吃一堆干草，干草的总量是不变的。这道题中牛吃的却是牧场上的青草，它们每天都在不断地生长，也就是青草的总量在不断地变化。像这样的问题我们称为“牛顿问题”，也叫“牛吃草问题”。

解答这类问题的关键是把一头牛一周吃的青草量看成一份，通过两组条件的比较，求出每周新长的草量，然后把牧场的草分成原有的草和新长的草两部分，相应地把牛也分成两部分，让一部分牛去吃新草，一部分牛去吃原有的草，从而使问题得以解决。

例 1　牧场上有一片青草，每天都在匀速生长，这片青草可供 21 头牛吃 8 周，可供 18 头牛吃 12 周，可供 20 头牛吃几周？

【分析与解】

假设一头牛一周吃草量为 1 份，21 头牛 8 周吃草量为 21×8＝168（份），18 头牛 12 周吃草量为 18×12＝216（份），两组条件进行比较发现：这些牛吃的都是同一个牧场上的青草，而最终的吃草总量却不一样，原因就在于所用时间不同，导致新长的青草总量不同。由此可知每周新长的青草总量为：（216－168）÷（12－8）＝12（份），原来牧场上的青草量为：168－12×8＝72（份）或 216－12×12＝72（份），根据每周新长青草量 12 份，我们可安排 12 头牛去吃，其余的（20－12）头牛去吃原有的青草。这样，就可求出所用的时间，具体解答过程如下：

设一头牛一周吃草量为 1 份

（1）每周新长的青草量为：

（18×12－21×8）÷（12－8）＝12（份）

（2）牧场上原有的青草量为：

21×8－12×8＝72（份）　或　18×12－12×12＝72（份）

（3）20 头牛吃的时间：

72÷（20－12）＝9（周）

答：可供 20 头牛吃 9 周。

试一试 1

一片青草地，每天都匀速长出青草，这片青草可供 27 头牛吃 6 周或 23 头牛吃 9 周，那么这片草地可供 21 头牛吃几周？

例 2　一片牧场，可供 27 头牛吃 6 天，如果放牛 23 头，则可吃 9 天，如果牧场上的草都在匀速生长，可供多少头牛吃 12 天？

【分析与解】

此题与上一题的区别在于一个求的是时间，一个求的是牛的头数，解题思路一样。

设一头牛一天吃的青草量为 1 份

（1）每天新长的青草量：

（23×9－27×6）÷（9－6）＝15（份）

（2）原有的青草量：

27×6－15×6＝72（份）　或　23×9－15×9＝72（份）

（3）原有的青草量可供 12 天吃的牛的只数：

72÷12＝6（头）

（4）每天新长的青草量为 15 份，相当于可供 15 头牛吃一天，这块草地可供牛的只数：

15＋6＝21（头）

答：可供 21 头牛吃 12 天。

通过上面的例题我们可知，用数学知识去解决生活中的实际问题时，可以把一种量分成几部分后分别去研究，然后再综合起来，这样可使问题简单化。

试一试 2

牧场里的草能够供 10 头牛吃 20 天，或者可供 15 头牛吃 10 天，如果牧场上的草每天都在匀速生长，可供多少头牛吃 5 天？

例 3　由于天气逐渐变冷，牧场上的草每天以均匀的速度减少，如果牧场上的草可供 25 头牛吃 6 天，或可供 20 头牛吃 7 天，可供多少头牛吃 10 天？

【分析与解】

此题与前两题的不同之处在于牧场上的青草在不断地减少，但解题思路相同。

设每头牛每天吃青草量为 1 份

（1）每天减少的青草量：

（25×6－20×7）÷（7－6）＝10（份）

（2）原有的青草量：

25×6＋10×6＝210（份）　或　20×7＋10×7＝210（份）

（3）可供吃 10 天牛的头数：

（210－10×10）÷10＝11（头）　或　210÷10－10＝11（头）

答：可供 11 头牛吃 10 天。

试一试 3

因天气渐冷，牧场上的草以固定的速度在减少。已知牧场上的草可供 33 头牛吃 5 天，或可供 24 头牛吃 6 天，照此计算，这个牧场可供多少头牛吃 10 天？

例 4　一只船有一个漏洞，水以均匀的速度进入船内，发现漏洞时已经进入了一些水。如果用 12 人舀水，3 小时舀完。如果只有 5 个人舀水，要 10 小时才能舀完。现在要想 2 小时舀完，需要多少人？

【分析与解】

该题表面上既不涉及牛，也没提到草，似乎与“牛吃草”问题无关，但这里每小时进入船内的水一样多，所以这里的人舀水可以看成是牛在吃草，即“牛吃草”问题。关键还是要求出发现漏洞时已经进入的水和每小时进入船内的水量。

假设每人每小时舀的水量为 1 份。

（1）每小时进入船内的水量为：

(5×10－12×3)÷(10－3)＝2（份）

（2）发现漏洞时已进入船内的水量为：

12×3－2×3＝30（份）　或　5×10－2×10＝30（份）

（3）已漏进的水加上 2 小时漏进的水，需几个人 2 小时舀完？

(30＋2×2)÷2＝17（人）

答：需要 17 人。

试一试 4

有一眼泉水，泉底不断涌出泉水，且每小时涌出的泉水一样多。如果用 10 台抽水机 20

小时可以把水抽干，用 15 台同样的抽水机，10 小时可以把水抽干，那么用 30 台这样的抽水机多少小时可以把水抽干？

练习八

1. 牧场上有一片青草，每天都在匀速生长，这片青草可供 24 头牛吃 6 周，可供 19 头牛吃 9 周，可供 18 头牛吃几周？

2、牧场上有一片青草，每天都在匀速生长，这片青草可供 24 头牛吃 6 天，可供 20 头牛吃 10 天，可供 19 头牛吃几天？

3、 一片牧场，青草每天都在匀速生长，这片青草可供 24 头牛吃 12 天，供 20 头牛吃 16 天，可供多少头牛吃 8 天？

4. 由于天气逐渐变冷，牧场上的草每天以均匀的速度减少，知道这片牧场的草可供 20 头牛吃 5 天，或可供 16 头牛吃 6 天，那么可供 11 头牛吃几天？

5. 某车站在检票前若干分钟就开始排队，设每分钟来的旅客人数一样多。从开始检票到等候的队伍消失，若同时开 4 个检票口需 30 分钟; 同时开 5 个检票口需 20 分钟，为使 15 分钟内检票队伍消失，需至少开多少个检票口？

6. 自动扶梯以均匀速度由下向上行驶着，两位性急的孩子要从扶梯上楼。已知男孩每分钟走 20 级台阶，女孩每分钟走 15 级台阶，结果男孩用 5 分钟到达楼上，女孩用 6 分钟到达楼上。问该扶梯共有多少级台阶？

7.牧场上有一片青草，每天都在匀速生长，这片青草可供 20 头牛吃 15 天，或者可供 25 头牛吃 10 天。可供多少头牛吃 5 天？

8．一水库存水量一定，河水均匀入库。5 台抽水机连续 20 天可抽干; 6 台同样的抽水机连续 15 天可抽干。若要求 6 天抽干，需要多少台同样的抽水机？

9．两个顽皮的孩子逆着自动扶梯行驶的方向行走，男孩每秒可走 3 级梯级，女孩每秒可走 2 级梯级，结果从扶梯的一端到达另一端，男孩用了 100 秒，女孩用了 300 秒。问: 该扶梯共有多少梯级？

10．一只船发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内。如果 10 人舀水，3 小时舀完；如 5 人舀水 8 小时舀完。如果要求 2 小时舀完，要安排多少人舀水？

11. 由于天气逐渐变冷，牧场上的草不仅不长，反而以固定的速度在减少。已知草地上的草可供 20 头牛吃 5 天，或者可供 15 头牛吃 6 天。照此计算，可供多少头牛吃 10 天？

第九讲　分数计算、速算和巧算

知识要点与学法指导：

分数计算的常用技法有：□

1. 公式法：直接运用一些公式来计算，如运用等差数列求和公式等。□

2. 图解法：将算式或算式中的某些部分的意思，用图表示出来，从而找出简便的方法。

3. 裂项法：在计算分数加、减法时，先将其中的一些分数作适当的拆分，使得其中一部分分数可以互相抵消，从而使计算简化。

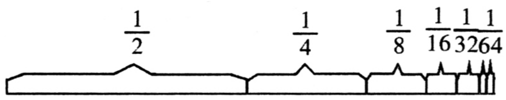
4. 分组法：运用运算定律，将原式重新分组组合，把能凑整或能约分化简的部分结合在一起简算。□

5. 代数法：将算式中的某些部分用字母代替并化简，然后再计算出结果。

例 1　计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

【分析与解】

解法一：先画出线段图：



从线段图中可以看出：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

解法二：观察和式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$，可以发现后一个加数总是前一个加数的一半。因而，只要添上一个加数$\frac{1}{64}$，就能凑成$\frac{1}{32}$，以此向前类推，可以迅速求出和。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{64}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}$$
$$=\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

试一试 1

计算：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$

例 2 计算：$\frac{1}{2004}+\frac{2}{2004}-\frac{3}{2004}-\frac{4}{2004}+\frac{5}{2004}+\frac{6}{2004}-\frac{7}{2004}-\frac{8}{2004}+\frac{9}{2004}+\frac{10}{2004}-\cdots\cdots-\frac{1999}{2004}-\frac{2000}{2004}+\frac{2001}{2004}+\frac{2002}{2004}$

【分析与解】

这道题可以用分组法求解。算式中共有 2002 个分数，从第二个分数$\frac{2}{2004}$开始依次往后数，每 4 个分数为一组，到$\frac{2001}{2004}$为止，共有 500 组，每组计算后的结果都是 0。

$\frac{1}{2004}+\frac{2}{2004}-\frac{3}{2004}-\frac{4}{2004}+\frac{5}{2004}+\frac{6}{2004}-\frac{7}{2004}-\frac{8}{2004}+\frac{9}{2004}+\frac{10}{2004}-\cdots\cdots-\frac{1999}{2004}-\frac{2000}{2004}+\frac{2001}{2004}+\frac{2002}{2004}$

$=\frac{1}{2004}+\frac{2002}{2004}$

$=\frac{2003}{2004}$

试一试 2

计算：$\frac{1}{2001}-\frac{2}{2001}-\frac{3}{2001}+\frac{4}{2001}+\frac{5}{2001}-\frac{6}{2001}-\frac{7}{2001}+\frac{8}{2001}+\frac{9}{2001}-\cdots\cdots-\frac{1998}{2001}-\frac{1999}{2001}+\frac{2000}{2001}$

例 3 计算：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004}+\frac{1}{2004\times 2005}$

【分析与解】

因为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$　　$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times 3}\cdots$，所以，在求这个数列的和时，可以运用这个结论，先把积分解为差，再求和。这也就是前面谈到的裂项法。

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004}+\frac{1}{2004\times 2005}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}$

$=1-\frac{1}{2005}$

$=\frac{2004}{2005}$

想一想：　$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$怎么算呢？

试一试 3

计算：$\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\frac{1}{13\times14}+\frac{1}{14\times15}$

例 4　计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}$

【分析与解】

题中每个分数的分子都是 1，分母不是两个相邻自然数的积，无法直接裂项，需要变形。因为$\frac{1}{1\times3}=(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3\times5}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\times\frac{1}{2}$，…，所以先把算式中的每一项扩大 2 倍，再把所求的和乘$\frac{1}{2}$即可。

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}$$
$$=(\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\frac{2}{7\times9}+\frac{2}{9\times11}+\frac{2}{11\times13})\times\frac{1}{2}$$
$$=(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13})\times\frac{1}{2}$$
$$=(1-\frac{1}{13})\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{6}{13}$$

裂项法不是随便可以套用的，有时题目稍有变化，就需要我们抓住具体题目的特点，灵活地进行变形转化。

一般地，形如$\frac{1}{a\times(a+1)}$的分数可以拆成$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$；形如$\frac{1}{a\times(a+n)}$的分数可以拆成$\frac{1}{n}\times(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n})$；形如$\frac{a+b}{a\times b}$的分数可以拆成$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$等等。

试一试 4

计算：$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{46\times48}+\frac{1}{48\times50}$

例 5　计算：$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$

【分析与解】

把算式中相同的一部分式子，设字母代替，可以化繁为简，化难为易（也就是前面提到的代数法）。我们把$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$用字母 A 代替，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$用字母 B 代替，可以很快算出结果。

设　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=A$　　　　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=B$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$$
$$=(1+A)\times B-(1+B)\times A$$

$=B+AB-A-AB$

$=B-A$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{5}$

试一试 5

计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

练习九

1．$\frac{1}{2004}+\frac{2}{2004}+\frac{3}{2004}+\frac{4}{2004}+\cdots\cdots+\frac{2002}{2004}+\frac{2003}{2004}$

2．$\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots\cdots+\frac{49}{100}+\frac{50}{100}$

3. 计算：$\frac{1}{49}+\frac{3}{49}+\frac{5}{49}+\frac{7}{49}+\frac{9}{49}+\frac{11}{49}+\frac{13}{49}$

4. 计算：$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$

5. 计算：$\frac{1}{2002}+\frac{2}{2002}+\frac{3}{2002}+\frac{4}{2002}-\frac{5}{2002}-\frac{6}{2002}-\frac{7}{2002}-\frac{8}{2002}+\frac{9}{2002}+\frac{10}{2002}+\cdots\cdots+$
$\frac{1995}{2002}+\frac{1996}{2002}-\frac{1997}{2002}-\frac{1998}{2002}-\frac{1999}{2002}-\frac{2000}{2002}+\frac{2001}{2002}+\frac{2002}{2002}$

6. 以质数 43 为分母的最简真分数的和是多少？

7. 计算：$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}+\frac{127}{128}$

8. 计算：（$\frac{2}{2002}+\frac{4}{2002}+\frac{6}{2002}+\cdots+\frac{2002}{2002}$）－（$\frac{1}{2002}+\frac{3}{2002}+\frac{5}{2002}+\cdots+\frac{2001}{2002}$）

9. 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$

10 计算：$\frac{1}{1998\times1999}+\frac{1}{1999\times2000}+\frac{1}{2000\times2001}+\cdots+\frac{1}{2006\times2007}+\frac{1}{2007}$

11．计算：$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\cdots+\frac{2}{97\times 99}+\frac{2}{99\times 101}$

12. 计算：$\frac{1}{1\times 5}+\frac{1}{5\times 9}+\frac{1}{9\times 13}+\cdots+\frac{1}{29\times 33}+\frac{1}{33\times 37}$

13. 计算：$\frac{4}{3}+\frac{16}{15}+\frac{36}{35}+\frac{64}{63}+\frac{100}{99}+\frac{144}{143}$

14. 计算：$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$

15．计算：$(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11})\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12})-(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12})\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11})$

第十讲　分数的简便计算

知识要点与学法指导：

分数四则混合运算中，既要按照四则运算的顺序进行计算，同时又要依据数据的特点，灵活运用四则运算的定律、性质及和、差、积、商的变化规律使计算简便合理。有时还要运用一些计算技巧达到简算的目的。本讲重点介绍的简算技法有：

1. 定律、性质法：直接运用一些定律、性质、规律使计算变得简便。

2. 数字变形法：从数字特点出发，通过联想变形，巧妙运用运算性质、规律达到简算目的。

3. 约分法：提取分子、分母中相同的因数进行约分，从而使计算简便。

例 1 计算：(1) $2003\div2003\frac{2003}{2004}$　　(2) $\frac{498\times381+382}{382\times498-116}$

【分析与解】

观察这两道题的数字特点，第(1)题中的 $2003\frac{2003}{2004}$化为假分数时，把分子用两个数相乘的形式表示，则便于约分和计算，另外，本题还可以利用商不变的性质，把被除数、除数同时缩小 203 倍，计算更简便。第(2)题可以考虑将分子变形，$498\times381+382=498\times(382-1)+382=498\times382-498+382=498\times382-116$，这样使原式的分子、分母相同，从而简化计算。

(1) 解法一：　$2003\div2003\frac{2003}{2004}$

$=2003\div\frac{2003\times2004+2003}{2004}$

$=2003\times\frac{2004}{2003\times2005}$

$=\frac{2004}{2005}$

解法二：　$2003\div2003\frac{2003}{2004}$

$=(2003\div2003)\div(2003\frac{2003}{2004}\div2003)$

$=1\div1\frac{1}{2004}$

$$=\frac{2004}{2005}$$

（2） $\dfrac{498\times381+382}{382\times498-116}$

$$=\frac{498\times(382-1)+382}{382\times498-116}$$

$$=\frac{498\times382-498+382}{382\times498-116}$$

$$=\frac{498\times382-116}{382\times498-116}$$

$$=1$$

想一想：第(2)题中可以将分母变形吗？

试一试 1

计算：(1)$2007\div2007\dfrac{2007}{2008}$　(2) $\dfrac{2005+2004\times2006}{2005\times2006-1}$

例 2　计算下面各题。

（1）$\dfrac{454545\times454454}{545545\times545454}$　　（2）$246\times\dfrac{321963}{123369}$

【分析与解】

这两道题，构思巧妙，要仔细观察，抓住数字有规律地重复这这一特点，利用分解法巧妙解答。

（1）$\dfrac{454545\times454454}{545545\times545454}$

$$=\frac{45\times10101\times454\times1001}{545\times1001\times54\times10101}$$

$$=\frac{45\times454}{545\times54}$$

$$=\frac{227}{327}$$

（2）$246\times\dfrac{321963}{123369}$

$$=2\times123\times\frac{321\times1003}{123\times1003}$$

$$=642$$

试一试 2

（1）$\dfrac{1}{21}+\dfrac{202}{2121}+\dfrac{50505}{212121}+\dfrac{13131313}{21212121}$　　（2）$\dfrac{373737}{737373}\times511$

例 3 计算 $1\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{9}{20}-\dfrac{11}{30}+\dfrac{13}{42}-\dfrac{15}{56}$

【分析与解】

因为$\dfrac{7}{12}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{9}{20}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{11}{30}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}$……

所以

原式$=1\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$=1\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$

$=1-\frac{1}{8}$

$=\frac{7}{8}$

试一试 3

$1\frac{1}{4}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}$

例 4 计算：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}+\frac{1}{9\times10\times11}$

【分析与解】

这道题同样可以利用裂项法把每个加数分解成两个分数之差，并且前一个数裂项后的减数与后一个数裂项后的被减数相同，这样可以前后抵消，化繁为简。

因为 $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)$

$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)$

$\frac{1}{8\times9\times10}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)$

$\frac{1}{9\times10\times11}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)$

这样就达到了裂项简算的目的。

$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}+\frac{1}{9\times10\times11}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{10\times11}\right)$

$=\frac{27}{110}$

一般地，分母是三个连续自然数 a、b 、c 的乘积时（且 a＜b＜c)我们通常先把它们裂项为分母是两个连续自然数的乘积的形式：

$\frac{1}{a\times b\times c}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a\times b}-\frac{1}{b\times c}\right)$

试一试 4

计算：$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$

练习十

1. $\left(\frac{2}{29}+\frac{3}{23}\right)\times29\times23$

2. $2008\div2008\frac{2008}{2009}$

3. $198\div198\frac{198}{199}+\frac{1}{200}$

4. $\frac{987\times655-321}{666+987\times654}$

5. $\frac{1988+1989\times1987}{1988\times1989-1}$

6. $4.44\div4\frac{5}{8}+\frac{31}{37}\div\frac{25}{111}+\frac{36}{37}\times4\frac{11}{25}$

7. $\frac{252525\times252252}{525525\times525252}$

8. $\frac{123+123123+123123123}{234+234234+234234234}$

9. $1\frac{3}{4}+\left[2\frac{3}{14}-\left(2\frac{3}{14}-1.875\right)\right]\times\frac{7}{15}$

10. $1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\frac{19}{90}$

11. $1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$

12. $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{9}{20}+\frac{10}{21}+\frac{11}{24}+\frac{19}{35}$