（挑战压轴）专题 1.6 运用勾股定理证明线段间的平方关系

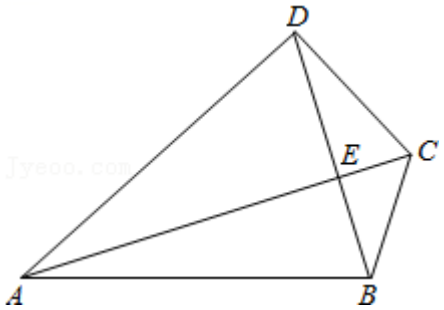
【方法点拨】

线段之间的平方和或平方差的关系，通常是将它们转换同一个直角三角形中求解，或转换到具有公共边的直角三角形中求解。

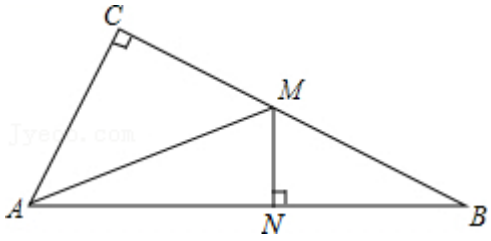
【典例分析】

【类型一 直接运用勾股定理探究线段间的平方关系】

【例 1】如图，四边形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$．求证：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

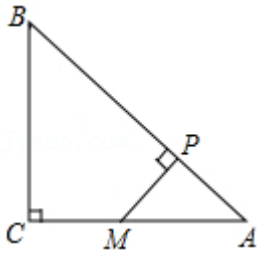


【变式 1】（2019 秋•宿州期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AM 是中线，$MN\perp AB$，垂足为点 N，求证：$AN^2-BN^2=AC^2$．

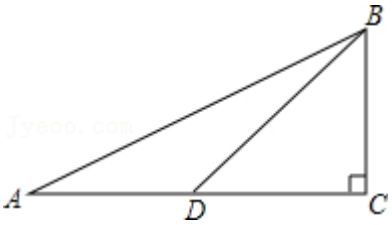


【变式 2】（2020 春•塔河县校级期末）如图，$\angle C=90°$，$AM=CM$，$MP\perp AB$ 于点 P，求

证：$BP^2=AP^2+BC^2$.

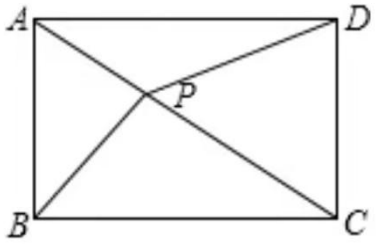


【变式 3】（2020 春•海阳市期中）如图：△ABC 中，$\angle C=90°$，D 是 AC 中点，求证：$AB^2+3BC^2=4BD^2$.



【类型二　构造直角三角形探究线段间的平方关系】

【例 2】如图，P 长方形 $ABCD$ 内的一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 PB^2+PD^2 的值。

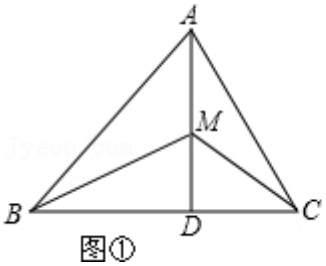


【变式】（2020 秋•下城区校级期中）（1）如图 1，AD 是△ABC 边 BC 上的高.

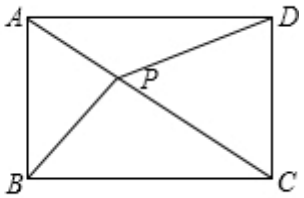
①求证：$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$；

②已知 $AB=8$，$AC=6$，M 是 AD 上的任意一点，求 BM^2-CM^2 的值；

（2）如图 2，P 是矩形 $ABCD$ 内的一点，若 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 PD 的值．



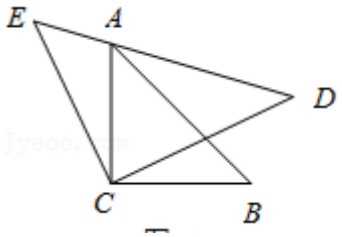
图①



图②

【类型三　构造全等三角形探究线段间的平方关系】

【例 3】（2019 春•江岸区校级期中）等腰 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$ 且 $CA=CB$．如图，若△ECD 也是等腰 Rt△且 $CE=CD$，△ACB 的顶点 A 在△ECD 的斜边 DE 上，求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$；



【变式 1】（2019 春•海珠区校级月考）（1）如图 1，△ACB 与△ECD 都是等腰直角三角形，△ACB 的顶点 A 在△ECD 的斜边 DE 上．

①已知 $AC=2$，求 AB 的长度；

②求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$；

（2）如图 2，在等腰 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，D 为线段 BC 上一点，连接 AD．求证：$BD^2+CD^2=2AD^2$．

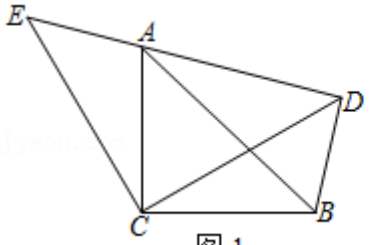


图 1

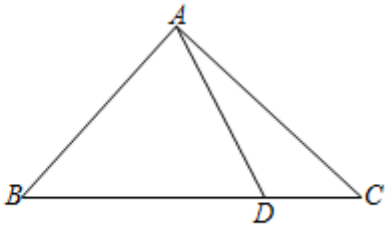
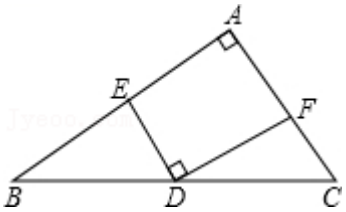
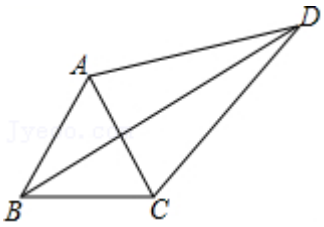


图 2

【变式 2】（2020•张家港市校级模拟）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，D 为斜边 BC 中点，$DE\perp DF$，求证：$EF^2=BE^2+CF^2$．



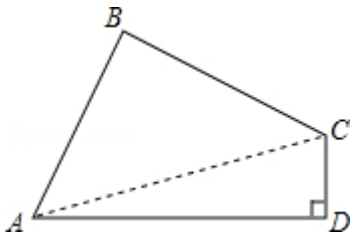
【变式 3】如图，△ABC 是等边三角形，点 D 在△ABC 的外部，且$\angle ADC=30°$，求证：$BD^2=AD^2+CD^2$．



【课后巩固】

1．（2019 春•双鸭山期末）已知，如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$CD\perp AD$，

$AD^2+CD^2=2AB^2$，求证：$AB=BC$.



2．（2019 春•武昌区期中）如图 1，$\triangle ACB$ 和$\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$CA=CB$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle ECD=90°$，$\triangle ACB$ 的顶点 A 在$\triangle ECD$ 的斜边 DE 上．

（1）求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$；

（2）如图 2，若 $AE=2$，$AC=2\sqrt{5}$，点 F 是 AD 的中点，求 CF 的长．

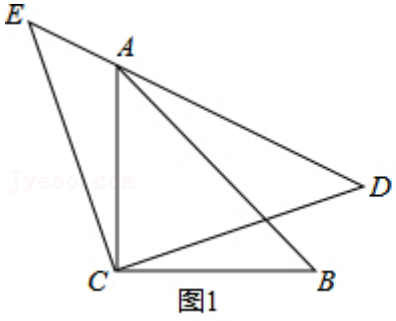


图1

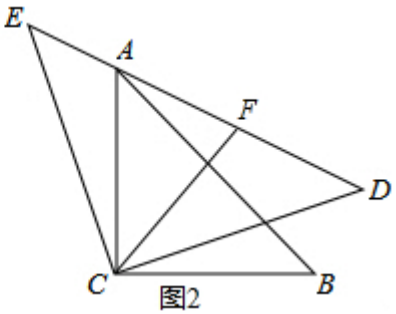


图2

3．（2021 秋•金牛区校级月考）如图，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle CAB=90°$，D 是斜边 BC 上的中点，E、F 分别是 AB、AC 边上的点，且 $DE\perp DF$.

（1）若 $AB=AC$ 时，

①求证：$AF=BE$；

②当 $BE=12$，$CF=5$，求△DEF 的面积．

（2）求证：$BE^2+CF^2=EF^2$．

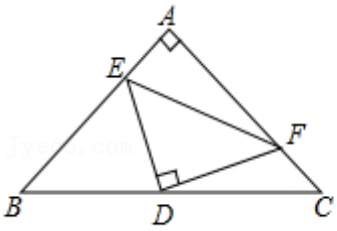


图1

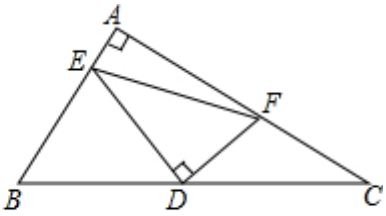
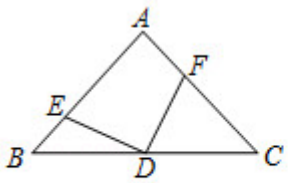
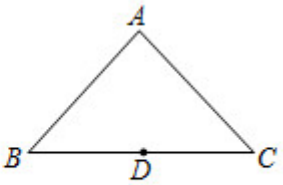


图2

4．（2019 秋•长兴县期中）已知，在△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，点 D 为 BC 的中点．



图①



图②

（1）如图①，若点 E、F 分别为 AB、AC 上的点，且 $DE\perp DF$．

①求证：$BE=AF$；

②若 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}=2$，求 $S_{\triangle CDF}$；

（2）若点 E、F 分别为 AB、CA 延长线上的点，且 $DE\perp DF$．

①$BE=AF$ 还成立吗？请利用图②说明理由；

②若 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=8$，直接写出 DF 的长．

（挑战压轴）专题 1.6 运用勾股定理证明线段间的平方关系

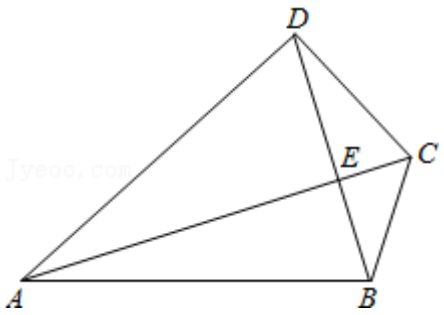
【方法点拨】

线段之间的平方和或平方差的关系，通常是将它们转换同一个直角三角形中求解，或转换到具有公共边的直角三角形中求解。

【典例分析】

【类型一 直接运用勾股定理探究线段间的平方关系】

【例 1】如图，四边形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$．求证：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．



【答案】略

【解答】解：∵$BD\perp AC$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle DEC=90°$，

∴在 Rt△AED 中，$AD^2=AE^2+DE^2$，

在 Rt△AEB 中，$AB^2=AE^2+BE^2$，

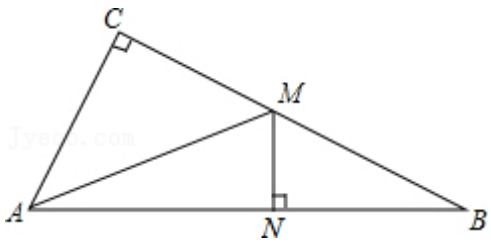
在 Rt△BEC 中，$BC^2=BE^2+CE^2$，

在 Rt△CED 中，$CD^2=CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

【变式 1】（2019 秋•宿州期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AM 是中线，$MN\perp AB$，垂足为点 N，求证：$AN^2-BN^2=AC^2$．



【答案】略

【解答】证明：∵$MN \perp AB$ 于 N，

∴$BN^2=BM^2-MN^2$，$AN^2=AM^2-MN^2$

∴$BN^2-AN^2=BM^2-AM^2$，

又∵$\angle C=90°$，

∴$AM^2=AC^2+CM^2$

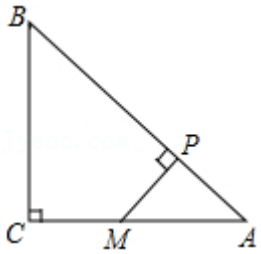
∴$BN^2-AN^2=BM^2-AC^2-CM^2$，

又∵$BM=CM$，

∴$BN^2-AN^2=-AC^2$，

即 $AN^2-BN^2=AC^2$.

【变式 2】（2020 春•塔河县校级期末）如图，$\angle C=90°$，$AM=CM$，$MP \perp AB$ 于点 P，求证：$BP^2=AP^2+BC^2$.



【答案】略

【解答】证明：连接 BM，

∵$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$，

∴$AB^2=BC^2+AC^2$，则 $AB^2-AC^2=BC^2$.

又∵在直角$\triangle AMP$ 中，$AP^2=AM^2-MP^2$，

∴$AB^2-AC^2+(AM^2-MP^2)=BC^2+(AM^2-MP^2)$.

又∵$AM=CM$，

∴$AB^2-AC^2+(AM^2-MP^2)=BC^2+(MC^2-MP^2)$，①

∵$\triangle APM$ 是直角三角形，∴$AM^2=AP^2+MP^2$，则 $AM^2-MP^2=AP^2$，②

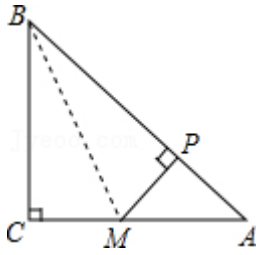
∵$\triangle BPM$ 与$\triangle BCM$ 都是直角三角形，

∴$BM^2=BP^2+MP^2=MC^2+BC^2$，

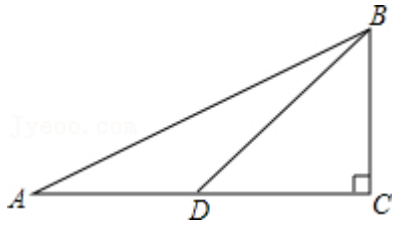
$MC^2+BC^2-MP^2=BM^2-MP^2=BP^2$，③

把②③代入①，得

$AB^2-AC^2+AP^2=BP^2$，即 $BP^2=AP^2+BC^2$.



【变式 3】（2020 春•海阳市期中）如图：△ABC 中，∠C＝90°，D 是 AC 中点，求证：$AB^2+3BC^2=4BD^2$.



【答案】略

【解答】证明：∵D 是 AC 中点，

∴$AC=2CD$，

在 Rt△BCD 中，$CD=\sqrt{BD^2-BC^2}$，

∴$AC=2\sqrt{BD^2-BC^2}$，

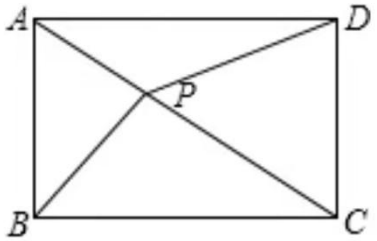
在 Rt△ABC 中，$AB^2=AC^2+BC^2$，

即 $AB^2=4BD^2-4BC^2+BC^2$，

∴$AB^2+3BC^2=4BD^2$.

【类型二　构造直角三角形探究线段间的平方关系】

【例 2】如图，P 长方形 $ABCD$ 内的一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 PB^2+PD^2 的值。

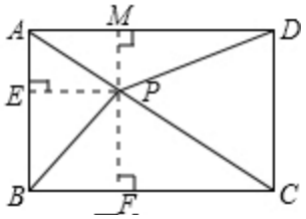


【答案】$PB^2+PD^2=34$

【解答】矩形 $ABCD$ 内，作 $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，$PM\perp AD$，

分别与 AB，BC，AD 相交于 E，F，M，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，

$$\begin{cases} PE^2+AE^2=PA^2=9 \\ PE^2+EB^2=PB^2=16; \\ PF^2+FC^2=25 \end{cases}$$



则 $PD^2=AE^2+MD^2$，

又 $MD=FC$，

解得 $PD^2=18$.

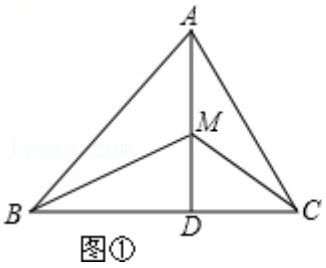
所以 $PB^2+PD^2=16+18=34$

【变式】（2020 秋•下城区校级期中）（1）如图 1，AD 是△ABC 边 BC 上的高.

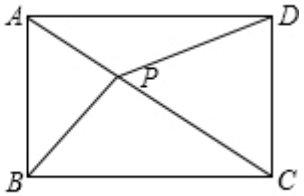
①求证：$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$；

②已知 $AB=8$，$AC=6$，M 是 AD 上的任意一点，求 BM^2-CM^2 的值；

（2）如图 2，P 是矩形 $ABCD$ 内的一点，若 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 PD 的值.



图①



图②

【答案】（1） ①略 ②28（2）$PD=3\sqrt{2}$

【解答】解：（1）①证明：∵AD 是△ABC 边 BC 上的高，

∴在 Rt△ABD 及 Rt△ACD 中，

$AD^2=AB^2-BD^2$，$AD^2=AC^2-CD^2$，

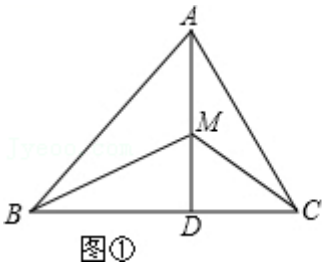
∴$AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，即 $AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$.

②$BM^2=BD^2+DM^2$，$CM^2=CD^2+DM^2$，

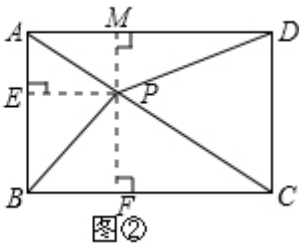
∴$BM^2-CM^2=BD^2-CD^2$，

又 $CD^2=AC^2-AD^2BD^2=AB^2-AD^2$，

∴$BM^2-CM^2=AB^2-AC^2=8^2-6^2=28$.



图①



图②

（2）矩形 $ABCD$ 内，作 $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，$PM\perp AD$，

分别与 AB，BC，AD 相交于 E，F，M，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，

$$\begin{cases} PE^2+AE^2=PA^2=9 \\ PE^2+EB^2=PB^2=16; \\ PF^2+FC^2=25 \end{cases}$$

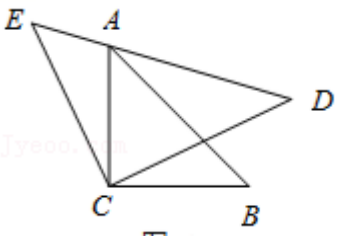
则 $PD^2=AE^2+MD^2$，

又 $MD=FC$，

解得 $PD=3\sqrt{2}$

【类型三　构造全等三角形探究线段间的平方关系】

【例 3】（2019 春•江岸区校级期中）等腰 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$ 且 $CA=CB$．如图，若△ECD 也是等腰 Rt△且 $CE=CD$，△ACB 的顶点 A 在△ECD 的斜边 DE 上，求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$；



【答案】略

【解答】（1）证明：连接 BD，如图所示：

∵△ACB 与△ECD 都是等腰直角三角形，

∴$\angle ECD=\angle ACB=90°$，$\angle E=\angle ADC=\angle CAB=45°$，

$EC=DC$，$AC=BC$，$AC^2+BC^2=AB^2$，

∴$2AC^2=AB^2$．$\angle ECD-\angle ACD=\angle ACB-\angle ACD$，

∴$\angle ACE=\angle BCD$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/205102042112011134