

2022-2023 学年安徽省安庆市五校联盟高三下-第三次月考数学试题试卷

注意事项:

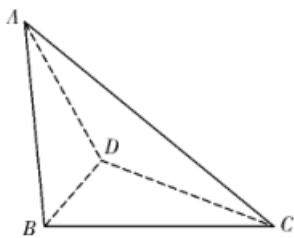
1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + 3^{-x} - 3^x$, 不等式 $f(a\sqrt{x^2+4}) + f(x^2+5) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $[-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

2. 在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 沿对角线 BD 折成二面角 $A-BD-C$ 为 120° 的四面体 $ABCD$ (如图), 则此四面体的外接球表面积为 ()



- A. 28π B. 7π
C. 14π D. 21π

3. 在函数: ① $y = \cos |2x|$; ② $y = |\cos x|$; ③ $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; ④ $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为 ()

- A. ①②③ B. ①③④ C. ②④ D. ①③

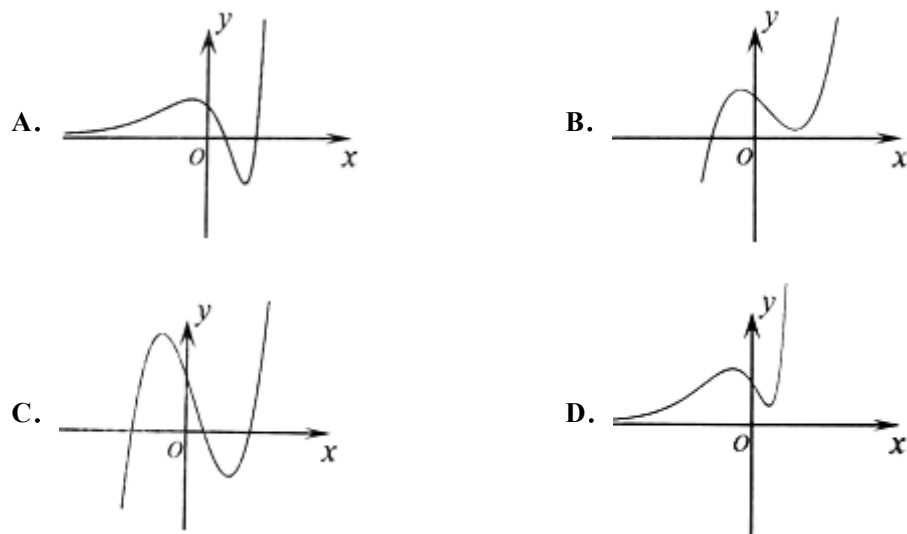
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, P 为双曲线在第一象限上的点, 直线 PO , PF_2 分别交双曲线 C 的左, 右支于另一点 M, N , 若 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 且 $\angle MF_2N = 60^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

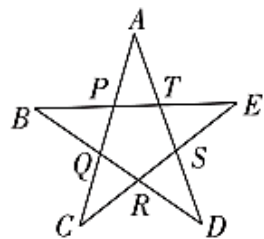
5. 抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$, 则 p 的值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

6. 函数 $f(x) = (x^2 - 4x + 1) \cdot e^x$ 的大致图象是 ()



7. 中国的国旗和国徽上都有五角星, 正五角星与黄金分割有着密切的联系, 在如图所示的正五角星中, 以 A 、 B 、 C 、 D 、 E 为顶点的多边形为正五边形, 且 $PT = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AP$, 则 $\frac{AT}{ES} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{ES}{ES} =$ ()



- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{QR}{QR}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{RQ}{RQ}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{RD}{RD}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{RC}{RC}$

8. 已知函数 $f(x) = xe^{1-x}$, 若对于任意的 $x_0 \in (0, e]$, 函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(1, e]$ B. $(e - \frac{2}{e}, e]$ C. $(e - \frac{2}{e}, e + \frac{2}{e}]$ D. $(1, e - \frac{2}{e}]$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学高考之后计划去 A 、 B 、 C 三个不同社区进行帮扶活动, 每人只能去一个社区, 每个社区至少一人. 其中甲必须去 A 社区, 乙不去 B 社区, 则不同的安排方法种数为 ()

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

10. 设 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上任意一点, N 为 AM 的中点, 若 $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若不等式 $f(x) \leq |x - k|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是()

A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[0, 1)$ D. $(-1, 0]$

12. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$, $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 则 $f(x)$ 的一条对称轴是()

A. $x = -\frac{\pi}{12}$ B. $x = \frac{\pi}{12}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 假设 10 公里长跑, 甲跑出优秀的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙跑出优秀的概率为 $\frac{1}{2}$, 丙跑出优秀的概率为 $\frac{1}{4}$, 则甲、乙、丙三人同时参加 10 公里长跑, 刚好有 2 人跑出优秀的概率为_____.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(e+x) = f(e-x)$, 且 $f(0) = 0$, 当 $x \in (0, e]$ 时, $f(x) = \ln x$. 已知方程

$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2e}x\right)$ 在区间 $[-e, 3e]$ 上所有的实数根之和为 $3ea$. 将函数 $g(x) = 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$ 的图象向右平移 a 个单位长度, 得到函数 $h(x)$ 的图象, 则 $a =$ _____, $h(8) =$ _____.

15. 已知集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x(x-5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

16. 已知正数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值等于_____, 此时 $a =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $g(x) = x - \ln(x+1)$ ($e = 2.71828\ldots$ 是自然对数的底数).

(I) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;

(II) 若 $a = 1$, 且命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq kg(x)$ ”是假命题, 求实数 k 的取值范围.

18. (12 分) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, P, Q 为抛物线 C 上的两个动点, O 为坐标原点.

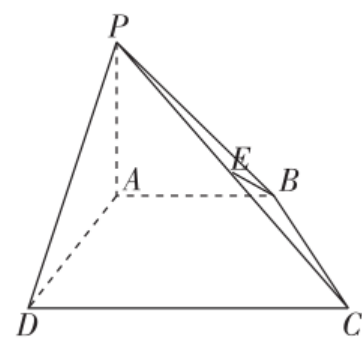
(I) 若点 F 在线段 PQ 上, 求 $|PQ|$ 的最小值;

(II) 当 $OP \perp PQ$ 时, 求点 Q 纵坐标的取值范围.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a$ (实数 a 为常数), $a_2 = 2, S_n$ 是其前 n 项和, $S_n = \frac{n(a_n - a_1)}{2}$ 且数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, $b_1 = 2, a_4$ 恰为 S_4 与 $b_2 - 1$ 的等比中项.

- (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (3) 若 $c_1 = \frac{3}{2}$, 当 $n \geq 2$ 时 $c_n = \frac{1}{b_{n-1} + 1} + \frac{1}{b_{n-1} + 2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对任意 $n \geq 2$, 都有 $12T_n \geq 6n + 13$.

20. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB, AB \parallel CD, AB = AD = AP = \frac{1}{2}CD = 2$, E 为 PC 的中点.



- (1) 求证: $BE \perp$ 平面 PCD ;
- (2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

21. (12 分) 在综合素质评价的某个维度的测评中, 依据评分细则, 学生之间相互打分, 最终将所有的数据合成一个分数, 满分 100 分, 按照大于或等于 80 分的为优秀, 小于 80 分的为合格, 为了解学生的在该维度的测评结果, 在毕业班中随机抽出一个班的数据. 该班共有 60 名学生, 得到如下的列联表:

	优秀	合格	总计
男生	6		
女生		18	
合计			60

已知在该班随机抽取 1 人测评结果为优秀的概率为 $\frac{1}{3}$.

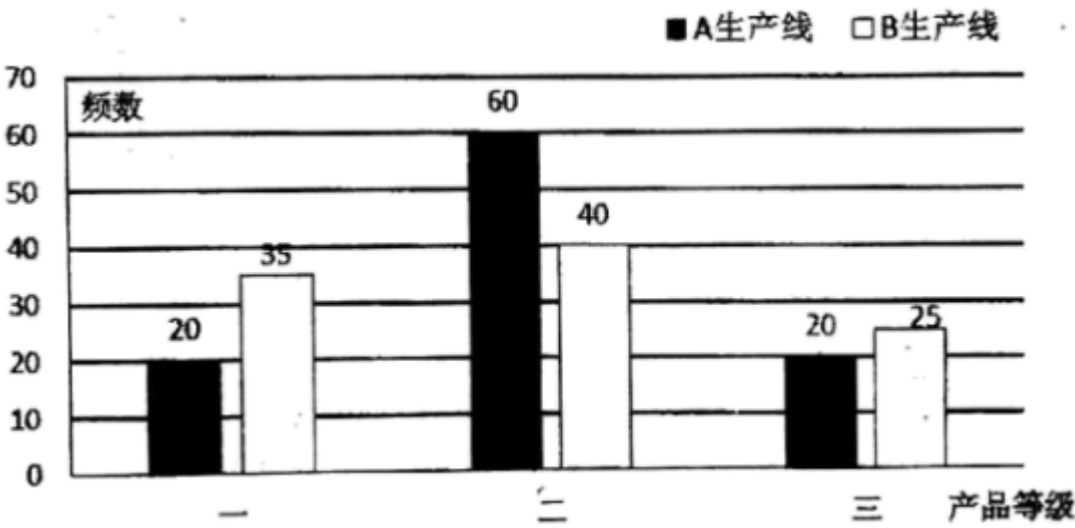
- (1) 完成上面的列联表;

- (2) 能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为性别与测评结果有关系？
- (3) 现在如果想了解全校学生在该维度的表现情况，采取简单随机抽样方式在全校学生中抽取少数一部分来分析，请你选择一个合适的抽样方法，并解释理由.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.025
k	1.323	2.706	5.024

22. (10 分) 某工厂 A ， B 两条相互独立的生产线生产同款产品，在产量一样的情况下通过日常监控得知 A ， B 生产线生产的产品为合格品的概率分别为 p 和 $2p-1(0.5 \leq p < 1)$.



- (1) 从 A ， B 生产线上各抽检一件产品，若使得至少有一件合格的概率不低于 99.5%，求 p 的最小值 p_0 .
- (2) 假设不合格的产品均可进行返工修复为合格品，以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值.
- ① 已知 A ， B 生产线的不合格产品返工后每件产品可分别挽回损失 5 元和 3 元. 若从两条生产线上各随机抽检 1000 件产品，以挽回损失的平均数为判断依据，估计哪条生产线挽回的损失较多？
- ② 若最终的合格品（包括返工修复后的合格品）按照一、二、三等级分类后，每件分别获利 10 元、8 元、6 元，现从 A ， B 生产线的最终合格品中各随机抽取 100 件进行检测，结果统计如下图；用样本的频率分布估计总体分布，记该工厂生产一件产品的利润为 X ，求 X 的分布列并估算该厂产量 2000 件时利润的期望值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

确定函数为奇函数，且单调递减，不等式转化为 $a \dots \frac{-x^2-5}{\sqrt{x^2+4}} = -\left(\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$ ，利用双勾函数单调性求最值

得到答案.

【详解】

$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + 3^x - 3^{-x} = -f(x)$, $f(x)$ 是奇函数,

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + 3^{-x} - 3^x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) + 3^{-x} - 3^x$,

易知 $y = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$, $y = 3^{-x}$, $y = -3^x$ 均为减函数, 故 $f(x)$ 且在 R 上单调递减,

不等式 $f(a\sqrt{x^2+4}) + f(x^2+5) \geq 0$, 即 $f(a\sqrt{x^2+4}) \geq f(-x^2-5)$,

结合函数的单调性可得 $a\sqrt{x^2+4} \geq -x^2-5$, 即 $a \dots \frac{-x^2-5}{\sqrt{x^2+4}} = -\left(\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$,

设 $t = \sqrt{x^2+4}$, $t \geq 2$, 故 $y = -\left(t + \frac{1}{t}\right)$ 单调递减, 故 $-\left(\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)_{\max} = -\frac{5}{2}$,

当 $t = 2$, 即 $x = 0$ 时取最大值, 所以 $a \dots -\frac{5}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查了根据函数单调性和奇偶性解不等式, 参数分离求最值是解题的关键.

2、A

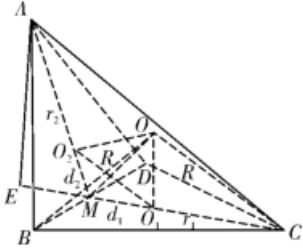
【解析】

画图取 BD 的中点 M , 法一: 四边形 OO_1MO_2 的外接圆直径为 OM , 即可求半径从而求外接球表面积; 法二: 根据

$OO_1 = \sqrt{3}$ ，即可求半径从而求外接球表面积；法三：作出 $\triangle CBD$ 的外接圆直径 CE ，求出 AC 和 $\sin \angle AEC$ ，即可求半径从而求外接球表面积；

【详解】

如图，取 BD 的中点 M ， $\triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 的外接圆半径为 $r_1 = r_2 = 2$ ， $\triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 的外心 O_1 ， O_2 到弦 BD 的距离（弦心距）为 $d_1 = d_2 = 1$ 。



法一：四边形 OO_1MO_2 的外接圆直径 $OM = 2$ ， $R = \sqrt{7}$ ，

$$S = 28\pi；$$

法二： $OO_1 = \sqrt{3}$ ， $R = \sqrt{7}$ ， $S = 28\pi$ ；

法三：作出 $\triangle CBD$ 的外接圆直径 CE ，则 $AM = CM = 3$ ， $CE = 4$ ， $ME = 1$ ，

$$AE = \sqrt{7}，AC = 3\sqrt{3}，\cos \angle AEC = \frac{7+16-27}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 4} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}，$$

$$\sin \angle AEC = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}，2R = \frac{AC}{\sin \angle AEC} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}} = 2\sqrt{7}，R = \sqrt{7}，S = 28\pi。$$

故选：A

【点睛】

此题考查三棱锥的外接球表面积，关键点是通过几何关系求得球心位置和球半径，方法较多，属于较易题目。

3、A

【解析】

逐一考查所给的函数：

$$y = \cos |2x| = \cos 2x，\text{该函数为偶函数，周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi；$$

将函数 $y = \cos x$ 图象 x 轴下方的图象向上翻折即可得到 $y = |\cos x|$ 的图象，该函数的周期为 $\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$ ；

$$\text{函数 } y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi；$$

$$\text{函数 } y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}；$$

综上可得最小正周期为 π 的所有函数为①②③.

本题选择 A 选项.

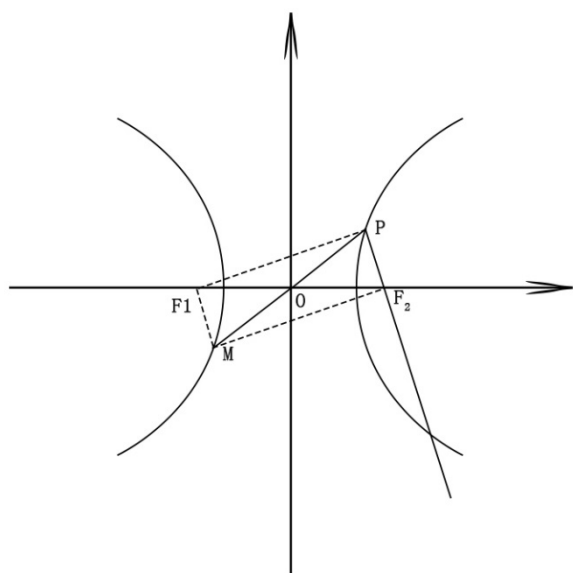
点睛：求三角函数式的最小正周期时，要尽可能地化为只含一个三角函数的式子，否则很容易出现错误。一般地，经过恒等变形成“ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ， $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ ， $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ ”的形式，再利用周期公式即可。

4、D

【解析】

本道题结合双曲线的性质以及余弦定理，建立关于 a 与 c 的等式，计算离心率，即可。

【详解】



结合题意，绘图，结合双曲线性质可以得到 $PO=MO$ ，而 $F_1O=F_2O$ ，结合四边形对角线平分，可得四边形 PF_1MF_2 为平行四边形，结合 $\angle MF_2N=60^\circ$ ，故 $\angle F_1MF_2=60^\circ$

对三角形 F_1MF_2 运用余弦定理，得到， $F_1M^2+F_2M^2-F_1F_2^2=2\cdot MF_1\cdot MF_2\cdot\cos\angle F_1MF_2$

而结合 $|PF_1|=3|PF_2|$ ，可得 $|MF_1|=a, |MF_2|=3a$ ， $F_1F_2=2c$ ，代入上式子中，得到

$a^2+9a^2-4c^2=3a^2$ ，结合离心率满足 $e=\frac{c}{a}$ ，即可得出 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ，故选 D.

【点睛】

本道题考查了余弦定理以及双曲线的性质，难度偏难.

5、A

【解析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值．

【详解】

抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的准线为 $y = -\frac{p}{4}$ ，双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为

$(-\frac{p}{4}, -\frac{\sqrt{2}p}{8}), (-\frac{p}{4}, \frac{\sqrt{2}p}{8})$ ，即有三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{p}{4} \times \frac{\sqrt{2}p}{4} = 2\sqrt{2}$ ，解得 $p = 8$ ，故选 A．

【点睛】

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题．

6、A

【解析】

用 $x < 0$ 排除 B，C；用 $x = 2$ 排除 D；可得正确答案．

【详解】

解：当 $x < 0$ 时， $x^2 - 4x + 1 > 0$ ， $e^x > 0$ ，

所以 $f(x) > 0$ ，故可排除 B，C；

当 $x = 2$ 时， $f(2) = -3e^2 < 0$ ，故可排除 D．

故选：A．

【点睛】

本题考查了函数图象，属基础题．

7、A

【解析】

利用平面向量的概念、平面向量的加法、减法、数乘运算的几何意义，便可解决问题．

【详解】

解： $\overrightarrow{AT} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{QR}$ ．

故选：A

【点睛】

本题以正五角星为载体，考查平面向量的概念及运算法则等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想，属于基础题．

8、D

【解析】

将原题等价转化为方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根, 先求导 $f'(x)$, 可判断 $x \in (0, 1)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$, 再令 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$, 求导得

$F'(x) = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}$, 结合韦达定理可知, 要满足题意, 只能是存在零点 x_1 , 使得 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 有解, 通过导

数可判断当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数; 当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在 (x_1, e) 上是

减函数; 则应满足 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$, 再结合 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$, 构造函数 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$, 求导即可求解;

【详解】

函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点,

等价于方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根.

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$.

设 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$, $F'(x) = \frac{1}{x} - 2x + a = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}$,

若 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 无解, 则 $F(x)$ 在 $(0, e]$ 上是单调函数, 不合题意; 所以 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 有解, 且易知只能有一个解.

设其解为 x_1 , 当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数;

当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在 (x_1, e) 上是减函数.

因为 $\forall x_0 \in (0, e]$, 方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内有两个不同的根,

所以 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$, 且 $F(e) \leq 0$. 由 $F(e) \leq 0$, 即 $\ln e - e^2 + ae + 1 \leq 0$, 解得 $a \leq e - \frac{2}{e}$.

由 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$, 即 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 + 1 > 1$, 所以 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 > 0$.

因为 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$, 所以 $a = 2x_1 - \frac{1}{x_1}$, 代入 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 > 0$, 得 $\ln x_1 + x_1^2 - 1 > 0$.

设 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$, $m'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(0, e)$ 上是增函数,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/205141032120011144>