

2023-2024 学年贵州省贵阳清镇北大培文学校高中毕业班第二次质量检测试题数学试

题文试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in R)$ 的导函数, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$, 则使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

2. 若复数 z 满足 $2z - \bar{z} = 3 + 12i$, 其中 i 为虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则复数 $|z| =$ ()

- A. $3\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 4 D. 5

3. 百年双中的校训是“仁”、“智”、“雅”、“和”。在 2019 年 5 月 18 日的高三趣味运动会中有这样的一小游戏。袋子中有大小、形状完全相同的四个小球, 分别写有“仁”、“智”、“雅”、“和”四个字, 有放回地从中任意摸出一个小球, 直到“仁”、“智”两个字都摸到就停止摸球。小明同学用随机模拟的方法恰好在第三次停止摸球的概率。利用电脑随机产生 1 到 4 之间 (含 1 和 4) 取整数值的随机数, 分别用 1, 2, 3, 4 代表“仁”、“智”、“雅”、“和”这四个字, 以每三个随机数为一组, 表示摸球三次的结果, 经随机模拟产生了以下 20 组随机数:

141 432 341 342 234 142 243 331 112 322

342 241 244 431 233 214 344 142 134 412

由此可以估计, 恰好第三次就停止摸球的概率为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

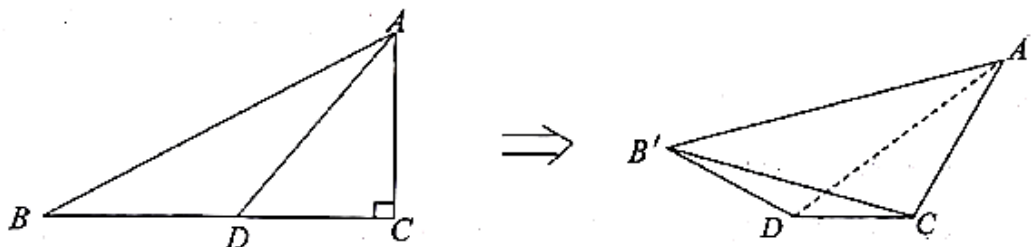
4. 我国宋代数学家秦九韶 (1202-1261) 在《数书九章》(1247) 一书中提出“三斜求积术”, 即: 以少广求之, 以小斜幂并大斜幂减中斜幂, 余半之, 自乘于上; 以小斜幂乘大斜幂减上, 余四约之, 为实; 一为从隅, 开平方得积。其实

质是根据三角形的三边长 a , b , c 求三角形面积 S , 即 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$. 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$,

$a = \sqrt{3}$, $b = 2$, 则 $\sin A$ 等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{55}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{55}}{10}$ 或 $\frac{\sqrt{11}}{6}$ D. $\frac{11}{20}$ 或 $\frac{11}{36}$

5. 如图, $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 2\angle B = 60^\circ$, 点 D 在 BC 上, $\angle BAD = 30^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 旋转得到三棱锥 $B' - ADC$, 分别记 $B'A$, $B'D$ 与平面 ADC 所成角为 α , β , 则 α , β 的大小关系是 ()



- A. $\alpha < \beta \leq 2\alpha$ B. $2\alpha \leq \beta \leq 3\alpha$
C. $\beta \leq 2\alpha$, $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$ 两种情况都存在 D. 存在某一位置使得 $\beta > 3\alpha$

6. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时,

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$. 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ()

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = 2, S_6 = 21$, 则 $a_5 =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

9. 若复数 $z = \frac{2}{1+i}$, 其中 i 为虚数单位, 则下列结论正确的是 ()

- A. z 的虚部为 $-i$ B. $|z| = 2$ C. z 的共轭复数为 $-1-i$ D. z^2 为纯虚数

10. 设集合 $A = \{x | -2 < x < a\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 若集合 $A \cap B$ 中有且仅有 2 个元素, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(0, 2)$ B. $(2, 4]$
C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

11. 已知 $p: \exists x_0 > 1, \log_{\frac{1}{2}} x_0 > \frac{1}{2}$; $q: \forall x \in R, e^x > x$, 则下列说法中正确的是 ()

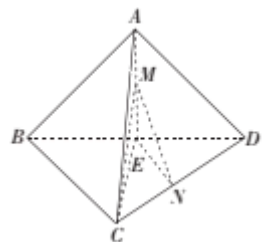
- A. $p \vee q$ 是假命题
B. $p \wedge q$ 是真命题
C. $p \vee (\neg q)$ 是真命题
D. $p \wedge (\neg q)$ 是假命题

12. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $m // \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$
B. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
C. 若 $m \perp \alpha, m // n$, 则 $n \perp \alpha$
D. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 $m // \beta$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 点 E 在 BD 上, $EA=EB=EC=ED$, $BD=\sqrt{2}CD$, $\triangle ACD$ 为正三角形, 点 M, N 分别在 AE, CD 上运动 (不含端点), 且 $AM=CN$, 则当四面体 $C-EMN$ 的体积取得最大值 $\frac{2}{3}$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为_____.



14. 在如图所示的三角形数阵中, 用 $a_{i,j}$ ($i \geq j$) 表示第 i 行第 j 个数 ($i, j \in N^*$), 已知 $a_{i,1} = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$ ($i \in N^*$), 且当 $i \geq 3$ 时, 每行中的其他各数均等于其“肩膀”上的两个数之和, 即 $a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}$ ($2 \leq j \leq i-1$), 若 $a_{m,2} > 2019$, 则正整数 m 的最小值为_____.

			0						
			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{4}$			
	$\frac{7}{8}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{7}{8}$		
$\frac{15}{16}$		$\frac{21}{8}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{21}{8}$		$\frac{15}{16}$	
	...			...			...		
$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$		...		...		...		$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$	

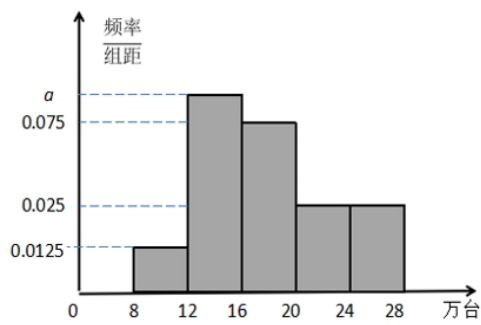
15. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比为 5:5:4

，现按年级采用分层抽样的方法抽取若干人，若抽取的高三年级为 12 人，则抽取的样本容量为_____人.

16. 已知实数 x, y 满足 $(2x - y)^2 + 4y^2 = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 秉持“绿水青山就是金山银山”的生态文明发展理念，为推动新能源汽车产业迅速发展，有必要调查研究新能源汽车市场的生产与销售. 下图是我国某地区 2016 年至 2019 年新能源汽车的销量（单位：万台）按季度（一年四个季度）统计制成的频率分布直方图.



- (1) 求直方图中 a 的值，并估计销量的中位数；
- (2) 请根据频率分布直方图估计新能源汽车平均每个季度的销售量（同一组数据用该组中间值代表），并以此预计 2020 年的销售量.

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{4 \sin A}$.

- (1) 求 $\sin B \sin C$ ；
- (2) 若 $10 \cos B \cos C = -1, a = \sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. (12 分) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ ，焦点 F 到准线的距离为 3，抛物线 E 上的两个动点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ ，其中 $x_1 \neq x_2$ 且 $x_1 + x_2 = 1$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C .

- (1) 求抛物线 E 的方程；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

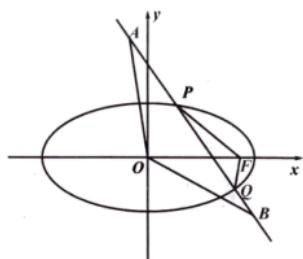
20. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列，其前 n 项和为 S_n ，满足 $a_3 = 12$ ，_____。是否存在正整数 k ，使得 $S_k > 2020$ ？若存在，求 k 的最小值；若不存在，说明理由.

从① $q = 2$ ，② $q = \frac{1}{2}$ ，③ $q = -2$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

21. (12 分) 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ， F 为其右焦点，直线 $l: x = my + \sqrt{3} (m < 0)$ 与椭圆交于

$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点，点 P, Q 在 l 上，且满足 $|PQ| = |P_1P|, |PQ| = |P_2P|, |PQ| = |P_1P|$. (点 P, Q, P_1, P_2

从上到下依次排列)



(I) 试用 $\square_l$ 表示 $|\square\square|$;

(II) 证明: 原点 $\square$ 到直线 l 的距离为定值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{2}x^2$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 设 $m = f(x_2) + \frac{x_1+2}{8} \cdot f'(x_1+1)$, 求 m 的取值范围, 并求 m 取到最小值时所对应的 a 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

构造函数, 令 $g(x) = \ln x \cdot f(x) (x > 0)$, 则 $g'(x) = \ln x f'(x) + \frac{f(x)}{x}$,

由 $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$ 可得 $g'(x) < 0$,

则 $g(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数,

且 $g(1) = \ln 1 \times f(1) = 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0, \therefore \ln x < 0, f(x) < 0, (x^2-1)f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0, \therefore \ln x > 0, \therefore f(x) < 0, (x^2-1)f(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0, (x^2-1)f(x) < 0$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$.

综上所述, 使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

本题选择 D 选项.

点睛: 函数的单调性是函数的重要性质之一, 它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中. 某些数学问题从表面上看似与函数的单调性无关, 但如果我们能挖掘其内在联系, 抓住其本质, 那么运用函数的单调性解题, 能起到化难为易、化繁为简的作用. 因此对函数的单调性进行全面、准确的认识, 并掌握好使用的技巧和方法, 这是非常必要的. 根据题目的特点, 构造一个适当的函数, 利用它的单调性进行解题, 是一种常用技巧. 许多问题, 如果运用这种思想去解决, 往往能获得简洁明快的思路, 有着非凡的功效.

2、D

【解析】

根据复数的四则运算法则先求出复数 z , 再计算它的模长.

【详解】

解: 复数 $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$;

$$\therefore 2z - \bar{z} = 3 + 12i,$$

$$\therefore 2(a + bi) - (a - bi) = 3 + 12i,$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a - a = 3 \\ 2b + b = 12 \end{cases},$$

解得 $a = 3, b = 4$,

$$\therefore z = 3 + 4i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

故选 D.

【点睛】

本题主要考查了复数的计算问题, 要求熟练掌握复数的四则运算以及复数长度的计算公式, 是基础题.

3、A

【解析】

由题意找出满足恰好第三次就停止摸球的情况, 用满足恰好第三次就停止摸球的情况数比 20 即可得解.

【详解】

由题意可知当 1, 2 同时出现时即停止摸球, 则满足恰好第三次就停止摸球的情况共有五种: 142, 112, 241, 142, 412.

则恰好第三次就停止摸球的概率为 $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了简单随机抽样中随机数的应用和古典概型概率的计算，属于基础题.

4、C

【解析】

将 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ， $a = \sqrt{3}$ ， $b = 2$ ，代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ ，解得 $c^2 = 5$ ， $c^2 = 9$ ，再分类讨论，利用余

弦定理求 $\cos A$ ，再用平方关系求解.

【详解】

已知 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ， $a = \sqrt{3}$ ， $b = 2$ ，

代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ ，

得 $\sqrt{\frac{1}{4}[3c^2 - (\frac{c^2 + 3 - 4}{2})^2]} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ，

即 $c^4 - 12c^2 + 45 = 0$ ，

解得 $c^2 = 5$ ， $c^2 = 9$ ，

当 $c^2 = 5$ 时，由余弦定理得： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ ， $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

当 $c^2 = 9$ 时，由余弦定理得： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{6}$ ， $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{11}{6}$.

故选：C

【点睛】

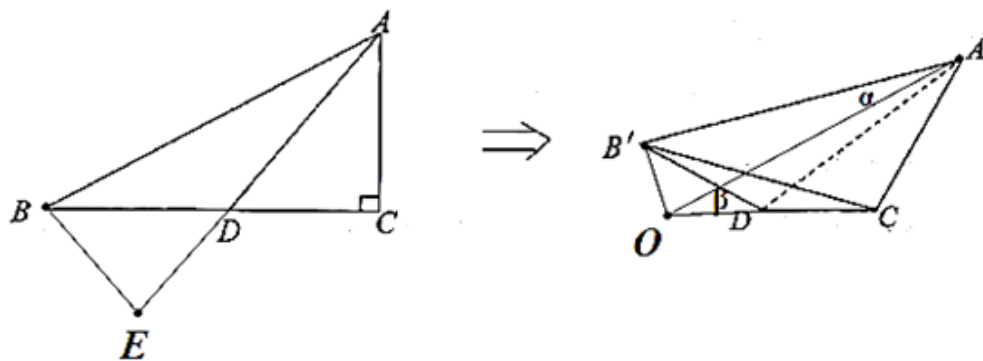
本题主要考查余弦定理和平方关系，还考查了对数学史的理解能力，属于基础题.

5、A

【解析】

根据题意作出垂线段，表示出所要求得 α 、 β 角，分别表示出其正弦值进行比较大小，从而判断出角的大小，即可得答案.

【详解】



由题可得过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，过 B' 作 CD 的垂线，垂足为 O ，则易得 $\alpha = \angle B'AO$ ， $\beta = \angle B'DO$ 。

设 $CD=1$ ，则有 $BD=AD=2$ ， $DE=1$ ， $BE=\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 可得 $AB'=AB=2\sqrt{3}$ ， $B'D=BD=2$ 。

$$\text{Q } \sin \alpha = \frac{OB'}{AB'}, \sin \beta = \frac{OB'}{DB'},$$

$$\therefore \sin \beta = \sqrt{3} \sin \alpha > \sin \alpha, \therefore \beta > \alpha;$$

$$\text{Q } OB' \in [0, \sqrt{3}], \therefore \sin \alpha \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$\text{Q } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \in [\sqrt{3}, 2], \therefore \sin 2\alpha \dots \sqrt{3} \sin \alpha = \sin \beta,$$

$$\therefore 2\alpha \dots \beta.$$

综上可得， $\alpha < \beta, 2\alpha$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查空间直线与平面所成的角的大小关系，考查三角函数的图象和性质，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平。

6、B

【解析】

由题意可得 $f(x)$ 的周期为 2，当 $x \in [2, 3]$ 时， $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ ，令 $g(x) = \log_a(x+1)$ ，则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，画出图像，数形结合，根据 $g(2) > f(2)$ ，求得 a 的取值范围。

【详解】

$f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，满足任意 $x \in R$ ，

$$f(x+2) = f(x) - f(1), \text{ 令 } x = -1, f(1) = f(-1) - f(1),$$

$$\text{又 } f(-1) = f(1), \therefore f(1) = 0, f(x+2) = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为周期为 2 的偶函数,

$$\text{当 } x \in [2, 3] \text{ 时, } f(x) = -2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2,$$

$$\text{当 } x \in [0, 1], x+2 \in [2, 3], f(x) = f(x+2) = -2(x-1)^2,$$

$$\text{当 } x \in [-1, 0], -x \in [0, 1], f(x) = f(-x) = -2(x+1)^2,$$

作出 $f(x), g(x)$ 图像, 如下图所示:

函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点,

则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点,

Q $f(x) \leq 0$, 若 $a > 1$,

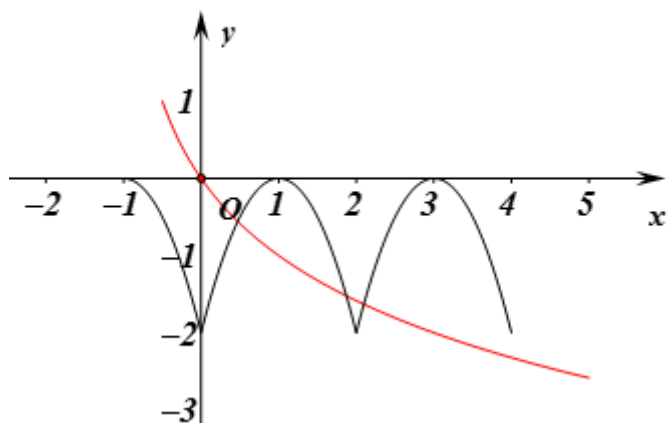
$f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像只有 1 个交点, 不合题意,

所以 $0 < a < 1$, $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点,

则有 $g(2) > f(2)$, 即 $\log_a(2+1) > f(2) = -2, \therefore \log_a 3 > -2$,

$$\therefore \frac{1}{a^2} > 3, a^2 < \frac{1}{3}, \text{Q } 0 < a < 1, \therefore 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选:B.



【点睛】

本题考查函数周期性及其应用, 解题过程中用到了数形结合方法, 这也是高考常考的热点问题, 属于中档题.

7、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/205143243044011332>