福建省部分优质高中2023-2024学年高一下学期期末质量检测数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}$（i为虚数单位）在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

〖答 案〗D

〖解 析〗Q $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore$复数z在复平面内对应的点的坐标是$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，位于第四象限．

故选：D.

2. 某校运动会，一位射击运动员10次射击射中的环数依次为：7，7，10，9，7，6，9，10，7，8．则下列说法错误的是（　　）

A. 这组数据的平均数为8　　B. 这组数据的众数为7

C. 这组数据的极差为4　　D. 这组数据的第80百分位数为9

〖答 案〗D

〖解 析〗这组数据的平均数为$\dfrac{7+7+10+9+7+6+9+10+7+8}{10}=8$，故A正确；

这组数据的众数为7，故B正确；

这组数据的极差为$10-6=4$，故C正确；

将这组数据按照从小到大的顺序排列为$6,7,7,7,7,8,9,9,10,10$，

因为$80\%\times10=8$，所以这组数据的第80百分位数为$\dfrac{9+10}{2}=9.5$，故D错误.

故选：D.

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为45°，$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2}$，则$|2\vec{b}-\vec{a}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 5

〖答 案〗A

〖解 析〗由题意知，

$$\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{(2\vec{b}-\vec{a})^2}=\sqrt{4\vec{b}^2+\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{4\times2+1-4\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{5}.$$

故选：A.

4. 已知圆锥的底面半径为2，其侧面展开图是一个圆心角为$\frac{4\pi}{3}$的扇形，则该圆锥的侧面积为（　　）

A. 6π　　B. 8π　　C. 10π　　D. 12π

〖答 案〗A

〖解 析〗因为底面半径$r=2$，所以底面周长$L=2\pi r=4\pi$，

又圆锥母线长$l=\dfrac{L}{\frac{4\pi}{3}}=3$，所以圆锥侧面积$S=\pi rl=6\pi$.

故选：A.

5. 已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，且向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量是$\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

〖答 案〗A

〖解 析〗因为$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，所以$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，

所以$\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，

因为向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量是$\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，所以$\left|\vec{a}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，

即$\frac{1}{2}\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，所以$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in\left[0,\pi\right]$，所以$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

6. 学生甲想参加某高中校蓝球投篮特长生考试，测试规则如下：①投篮分为两轮，每轮均有两次机会，第一轮在罚球线处，第二轮在三分线处;②若他在罚球线处投进第一球，则直接进入下一轮，若第一次没有投进可以进行第二次投篮，投进则进入下一轮，否则不预录取;

③若他在三分线处投进第一球，则直接录取，若第一次没有投进可以进行第二次投篮，投进则录取，否则不预录取.已知学生甲在罚球线处投篮命中率为$\frac{3}{4}$，在三分线处投篮命中率为$\frac{3}{5}$，假设学生甲每次投进与否互不影响.则学生甲共投篮三次就结束考试得概率为（　）

A. $\frac{27}{80}$　　B. $\frac{33}{80}$　　C. $\frac{9}{50}$　　D. $\frac{3}{40}$

〖答 案〗B

〖解 析〗记事件A_i表示“甲在罚球线处投篮，第 i 次投进”，事件B_i表示“甲在三分线处投篮，第 i 次投进，事件C表示“甲共投篮三次就结束考试”，

则$P(C)=P\left(\overline{A_1}A_2B_1+A_1\overline{B_1}\right)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{33}{80}$.

故选：B.

7. 故宫角楼的屋顶是我国十字脊顶的典型代表，如图 1，它是由两个完全相同的直三棱柱垂直交叉构成，将其抽象成几何体如图 2 所示.已知三棱柱$ABF-CDE$和$BDG-ACH$是两个完全相同的直三棱柱，侧棱EF与GH互相垂直平分，EF,GH交于点I，$AF=BF=a$，$AF\perp BF$，则点G到平面$ACEF$的距离是（　　）


图1

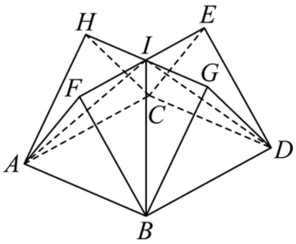
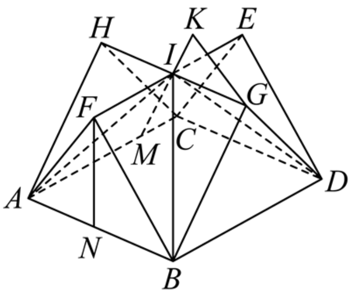


图2

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$　　B. $\frac{1}{2}a$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

〖答 案〗B

〖解 析〗取AC中点M，连接MI，过G作MI的垂线交MI的延长线于点K，



取AB中点N，连接FN，

由已知，M、I 分别为 AC、EF 中点，

因为 $ABF-CDE$ 是直三棱柱，所以 $AF\perp AC$，$EF//AC$ 且 $EF=AC$，

所以 $FI//AM$ 其 $FI=AM$，所以四边形 $AMIF$ 为平行四边形，

又 $AF\perp AC$，所以 $AMIF$ 为矩形，所以 $EF\perp MK$，

又 $EF\perp GH$，$MK\subset$ 平面 KIG，$GH\subset$ 平面 KIG，$MK\cap GH=I$，

所以 $EF\perp$ 平面 KIG，$KG\subset$ 平面 KIG，所以 $EF\perp KG$，

又因为 $KG\perp MK$，$EF\subset$ 平面 $ACEF$，$MK\subset$ 平面 $ACEF$，$EF\cap MK=I$，

所以 $KG\perp$ 平面 $ACEF$，所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离等于线段 KG 的长度，设为 h；

$AF\perp BF$，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，$AF=BF=a$，

所以 $AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，设角 $\angle FAB=\theta$，则有 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为四边形 $AMIF$ 为平行四边形，所以 $MI//AF$，

又因为因为 $BDG-ACH$ 是直三棱柱，所以 $AB//HG$，且 $HG=AB=a$，

所以 $\angle KIG=\angle FAB=\theta$，$IG=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，

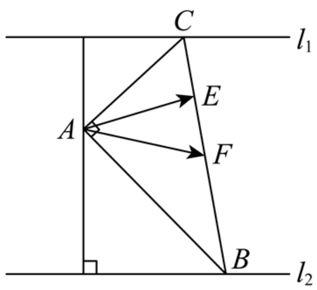
又因为 $KG\perp$ 平面 $ACEF$，　$IK\subset$ 平面 $ACEF$，所以 $KG\perp IK$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{KG}{IG}=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$，即 $\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\dfrac{a}{2}$，

所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离是 $\dfrac{a}{2}$.

故选：B.

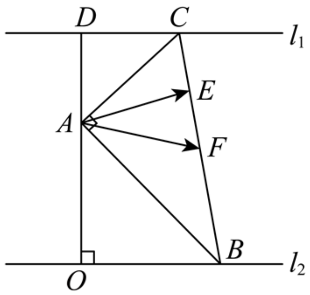
8. 如图，直线 $l_1//l_2$，点 A 是 l_1，l_2 之间的一个定点，点 A 到 l_1，l_2 的距离分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{6}$. 点 B 是直线 l_2 上一个动点，过点 A 作 $AC\perp AB$，点 E,F 在线段 BC 上运动（包括端点）且 $EF=1$，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$. 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为（　　）



A. 3　　B. $\dfrac{11}{4}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{7}{4}$

〖答 案〗B

〖解 析〗如图，设 $\angle OAB=\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，则 $\angle DAC=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，



所以 $AB=\dfrac{OA}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{6}}{\cos\theta},AC=\dfrac{AD}{\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}$，

得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 2\theta}$，又 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 2\theta}=2\sqrt{3}$，得 $\sin 2\theta=1$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $AB=2\sqrt{3},AC=2$，故 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

设 $\dfrac{BE}{BC}=x\ (0\le x\le 1)$，则 $\dfrac{CE}{BC}=1-x,\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{BE-EF}{BC}=x-\dfrac{1}{4},\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{CE+EF}{BC}=\dfrac{5}{4}-x$，

所以 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=\dfrac{BF}{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{CF}{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=(x-\dfrac{1}{4})\overrightarrow{AC}+(\dfrac{5}{4}-x)\overrightarrow{AB}$，

则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=[x\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AB}]\cdot[(x-\dfrac{1}{4})\overrightarrow{AC}+(\dfrac{5}{4}-x)\overrightarrow{AB}]$

$=(x^2-\dfrac{1}{4}x)\overrightarrow{AC}^2+(\dfrac{5}{4}x-x^2)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+(1-x)(x-\dfrac{1}{4})\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+(1-x)(\dfrac{5}{4}-x)\overrightarrow{AB}^2$

$=16x^2-28x+15=16\left(x-\dfrac{7}{8}\right)^2+\dfrac{11}{4}$，

当 $x=\dfrac{7}{8}$ 时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 取得最小值，且为 $\dfrac{11}{4}$.

故选：B.

二、多项选择题 本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 下列关于平面向量的说法正确的是（　　）

A. 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是共线的单位向量，则 $\vec{a}=\vec{b}$

B. 若$\vec{a}$，$\vec{b}$是相反向量，则$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

C. 若$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线

D. 若$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，则点$A$，$B$，$C$，$D$必在同一条直线上

〖答 案〗BC

〖解 析〗对于A，$\vec{a}$，$\vec{b}$是共线的单位向量，则$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，A错误；

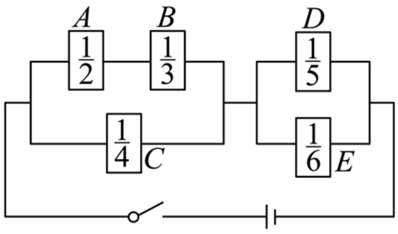
对于B，若$\vec{a}$，$\vec{b}$是相反向量，则$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，B正确；

对于C，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，即$\vec{a}=-\vec{b}$，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，C正确；

对于D，$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，点$A$，$B$，$C$，$D$可以不在同一直线上，D错误.

故选：BC.

10. 如图所示的电路中，5个盒子表示保险匣，设5个盒子分别被断开为事件A，B，C，D，E. 盒中所示数值表示通电时保险丝被切断的概率，则下列结论正确的是（　　）



A. A，B两个盒子串联后畅通的概率为$\dfrac{1}{3}$

B. D，E两个盒子并联后畅通的概率为$\dfrac{1}{30}$

C. A，B，C三个盒子混联后畅通的概率为$\dfrac{5}{6}$

D. 当开关合上时，整个电路畅通的概率为$\dfrac{29}{36}$

〖答 案〗ACD

〖解 析〗依题意，$P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{1}{3},P(C)=\dfrac{1}{4},P(D)=\dfrac{1}{5},P(E)=\dfrac{1}{6}$，

对于A，A，B两个盒子畅通的概率为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，A正确；

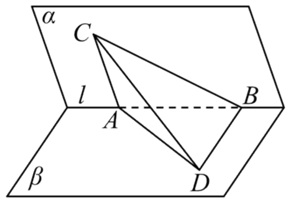
对于B，D，E两个盒子并联后畅通的概率为$1-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{6}=1-\dfrac{1}{30}=\dfrac{29}{30}$，B错误；

对于C，A，B，C三个盘子混联后畅通的概率为$1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$，C正确；

对于 D，根据上述分析可知，当开关合上时，电路畅通的概率为$\frac{29}{30}\times\frac{5}{6}=\frac{29}{36}$，D 正确.

故选：ACD.

11. 如图，已知二面角$\alpha-l-\beta$的棱l上有A,B两点，$C\in\alpha,AC\perp l,D\in\beta,BD\perp l$，且$AC=AB=BD$，则（　　）



A. 当$\alpha\perp\beta$时，直线CD与平面β所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 当二面角$\alpha-l-\beta$的大小为60°时，直线AB与CD所成角为45°

C. 若$CD=2AB=2$，则三棱锥$A-BCD$的外接球的体积为$\frac{5\sqrt{5}\pi}{3}$

D. 若$CD=2AB$，则二面角$C-BD-A$的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

〖答 案〗ABD

〖解 析〗对 A 选项：当$\alpha\perp\beta$时，因为$\alpha \cap \beta=l$，$AC\perp l$，

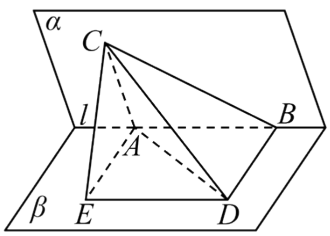
所以$AC\perp\beta$，所以直线CD与平面β所成角为$\angle CDA$，

又因为$AD\subset\beta$，所以$AC\perp AD$，

因为$BD\perp l$，$AC=AB=BD$，所以$AD=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AC$，

所以$\sin\angle CDA=\frac{AC}{CD}=\frac{AC}{\sqrt{AC^{2}+\left(\sqrt{2}AC\right)^{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确；

对 B 选项：如图，过 A 作$AE//BD$，且$AE=BD$，连接ED，EC，



则四边形 $ABDE$ 为正方形，所以 $AB//DE$，

所以 $\angle CDE$（或其补角）即为直线 AB 与 CD 所成角，

因为 $BD\perp l$，四边形 $ABDE$ 为正方形，有 $AE//BD$，所以 $AE\perp l$，

又因为 $AC\perp l$，所以 $\angle CAE$ 即为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，即 $\angle CAE=60^\circ$，

由 $AC\perp l$、$AE\perp l$、$AC\cap AE=A$ 且 AC、$AE\subset$ 平面 ACE，

所以 $l\perp$ 平面 ACE，又四边形 $ABDE$ 为正方形，所以 $DE//l$，

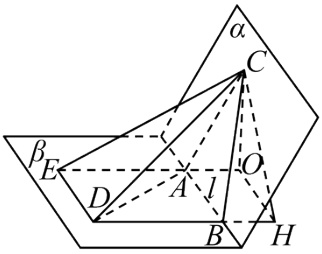
所以 $DE\perp$ 平面 ACE，又 $CE\subset$ 平面 ACE，所以 $DE\perp CE$.

由 $AC=BD$ 且四边形 $ABDE$ 为正方形，$\angle CAE=60^\circ$，所以 $AC=AE=CE$，

所以 $\tan\angle CDE=1$，即 $\angle CDE=45^\circ$，即直线 AB 与 CD 所成角为 45°，故 B 正确；

对于 D，如图，作 $AE//BD$，且 $AE=BD$，

则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\angle CAE$，不妨取 $CD=2AB=2$，



由 $CD=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中，易得 $CE=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle CAE=-\dfrac{1}{2}$，$\angle CAE=120^\circ$，

过 C 点作 $CO\perp AE$ 交线段 EA 的延长线于点 O，则 $CO\perp$ 平面 $ABDE$，

过 O 点作 $OH\perp BD$，交线段 DB 的延长线于点 H，连接 CH，

则 $\angle CHO$ 为二面角 $C-BD-A$ 的平面角，

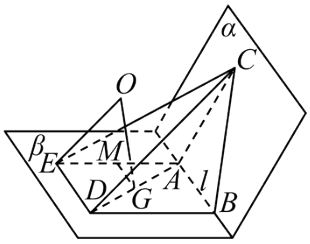
易得 $CO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$HO=1$，$CH=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

所以 $\cos\angle CHO=\dfrac{OH}{CH}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，故 D 正确；

对 C 选项：同选项 D 可知 $\angle CAE=120^\circ$，

如图，分别取线段 AD，AE 的中点 G，M，连接 GM，过 G 点作平面 β 的垂线，

则球心 O' 必在该垂线上，设球的半径为 R，则 $O'E=R$，



又$\triangle ACE$的外接圆半径$r=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sin120^{\circ}}=1$，而平面$ACE\perp$平面$ABDE$，

所以$O'G//$平面ACE，即MG的长为点O'到平面ACE的距离，则$R^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，

所以四面体$A-BCD$的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$，故C错误.

故选：ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

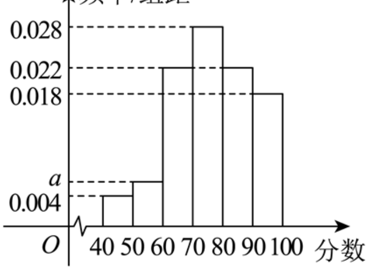
12. 若复数z满足$\frac{z}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{2020}+\mathrm{i}^{2021}$，则复数$z=$______.

〖答 案〗2i

〖解 析〗$\frac{z}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{2020}+\mathrm{i}^{2021}=\left(\mathrm{i}^2\right)^{1010}+\left(\mathrm{i}^2\right)^{1010}\cdot\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，所以$z=\left(1+\mathrm{i}\right)^2=2\mathrm{i}$.

故〖答 案〗为：$2\mathrm{i}$.

13. 为深入贯彻落实　对天津工作“三个着力”重要要求，天津持续深化改革，创建全国文明城区，城市文明程度显著提升，人民群众的梦想不断实现.在创建文明城区的过程中，中央文明办对某小区居民进行了创建文明城区相关知识网络问卷调查，从本次问卷中随机抽取了50 名居民的问卷结果，统计其得分数据，将所得 50 份数据的得分结果分为 6 组：$[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$，并整理得到如下的频率分布直方图，则该小区居民得分的第 70 百分位数为__________.



〖答 案〗84.55

〖解 析〗由题意得$\left(0.004+a+0.018+2\times0.022+0.028\right)\times10=1$，

解得$a=0.006$，

因为前 4 组数据的频率之和为$0.04+0.06+0.22+0.28=0.6$，

前 5 组数据的频率之和为$0.04+0.06+0.22+0.28+0.22=0.82$，

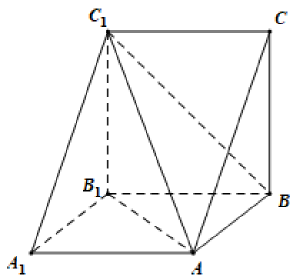
则70%分位数在$\left[80,90\right)$内，设70%分位数为x，

则$0.6+\left(x-80\right)\times 0.022=0.7$，解得$x\approx 84.55$，

所以70%分位数约为84.55.

故〖答 案〗为：84.55.

14. 《九章算术》中记载：将底面为直角三角形的直三棱柱称为堑堵，将一堑堵沿其一顶点与相对的棱剖开，得到一个阳马（底面是长方形，且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥）和一个鳖臑（四个面均为直角三角形的四面体）.在如图所示的堑堵$ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1=BC=2\sqrt{3},AB=2,AC=4,$且有鳖臑$C_1ABB_1$和鳖臑$C_1-ABC$，现将鳖臑$C_1-ABC$沿线$BC_1$翻折，使点$C$与点$B_1$重合，则鳖臑$C_1-ABC$经翻折后，与鳖臑$C_1-ABB_1$拼接成的几何体的外接球的表面积是______.



〖答 案〗$\dfrac{100\pi}{3}$

〖解 析〗当C_1-ABC沿线BC_1翻折，使点C与点B_1重合，则鳖臑C_1-ABC经翻折后，A点翻折到E点，A,E关于B对称，所拼成的几何体为三棱锥C_1-AEB_1，如图，