2023 年高考数学模拟试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

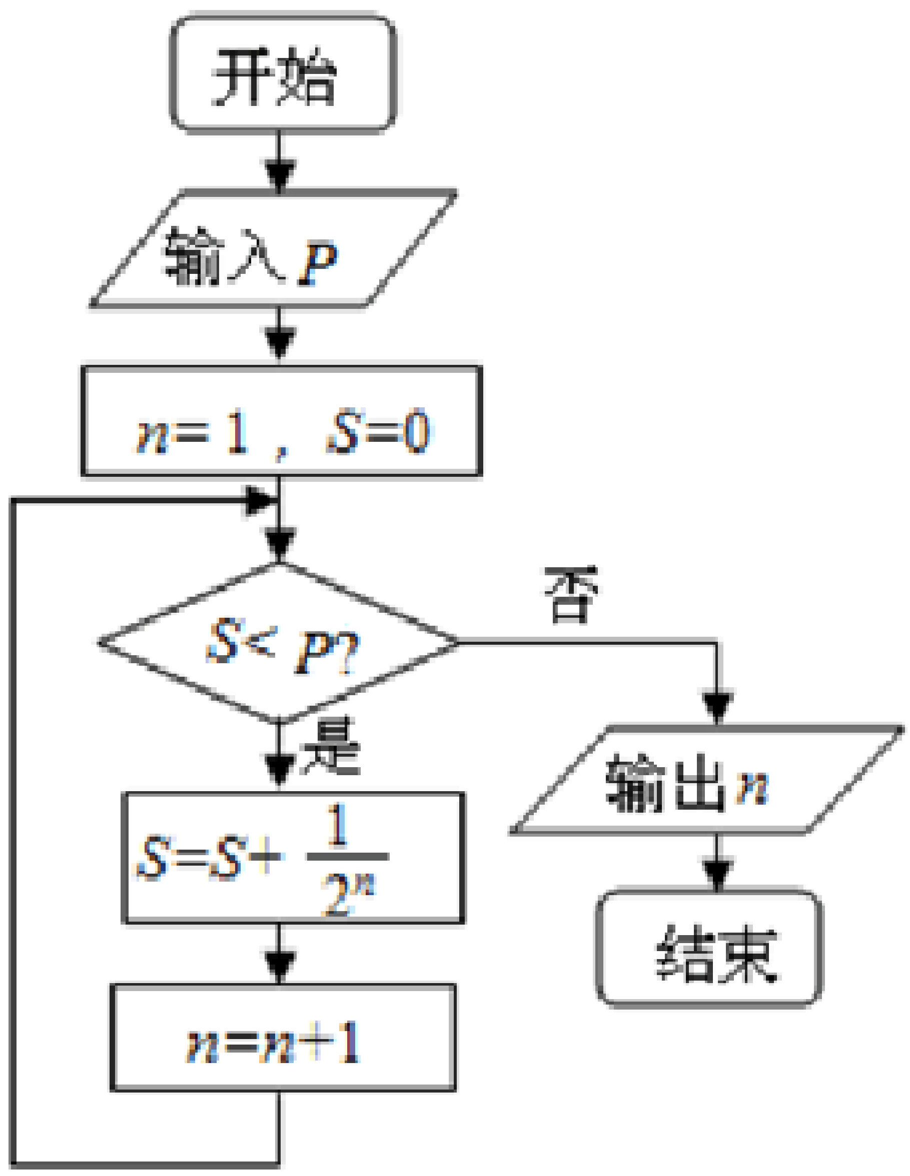
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知定点 A,B 都在平面 α 内，定点 $P\notin\alpha,PB\perp\alpha,C$ 是 α 内异于 A,B 的动点，且 $PC\perp AC$，那么动点 C 在平面 α 内的轨迹是（　　）

A．圆，但要去掉两个点　　　　**B**．椭圆，但要去掉两个点

C．双曲线，但要去掉两个点　　　　**D**．抛物线，但要去掉两个点

2．执行如图所示的程序框图后，输出的值为 **5**，则 P 的取值范围是（　　）**.**



A．$\left(\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$　　**B**．$\left(\frac{5}{6},\frac{9}{10}\right]$　　**C**．$\left(\frac{7}{8},\frac{15}{16}\right]$　　**D**．$\left(\frac{15}{16},\frac{31}{32}\right]$

3．已知函数 $f(x)=|\cos x|+\sin x$，则下列结论中正确的是

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

②函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形；

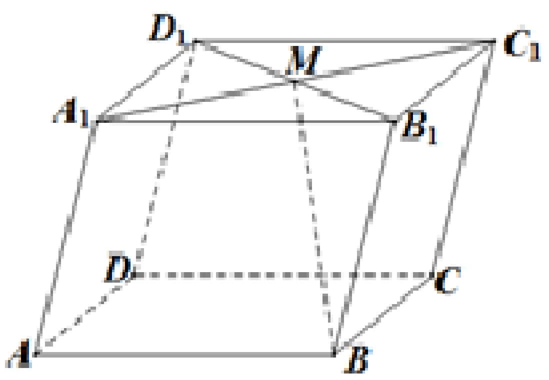
③函数 $f(x)$ 的极大值为$\sqrt{2}$；

④函数 $f(x)$ 的最小值为-1.

A．①③　　　　**B**．②④

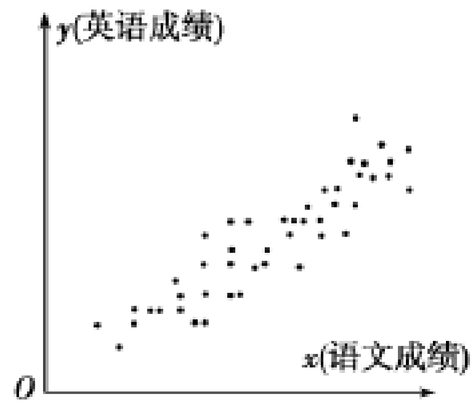
C．②③　　　　**D**．②③④

4．在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是（　　）



A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　**B**．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　**C**．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　**D**．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

5．为研究语文成绩和英语成绩之间是否具有线性相关关系，统计两科成绩得到如图所示的散点图(两坐标轴单位长度相同)，用回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 近似地刻画其相关关系，根据图形，以下结论最有可能成立的是(　　)



A．线性相关关系较强，b 的值为 **1.25**

B．线性相关关系较强，b 的值为 **0.83**

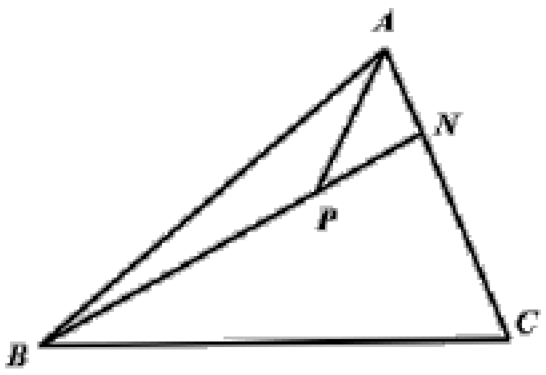
C．线性相关关系较强，b 的值为－**0.87**

D．线性相关关系太弱，无研究价值

6．已知集合 $A=\{2,3,4\}$，集合 $B=\{m,m+2\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $m=$（　　）

A．0　　**B**．1　　**C**．2　　**D**．4

7．如图，在 ΔABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则实数 m 的值为（　　）



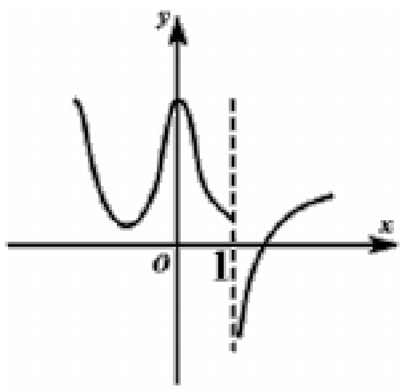
A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{9}$　　C．1　　D．2

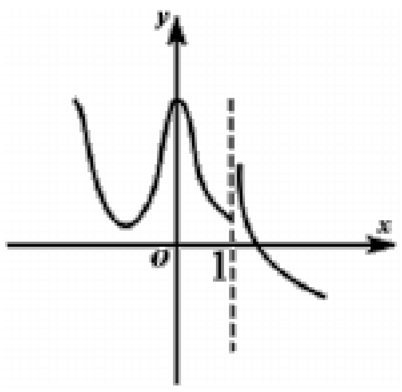
8．如果$b<a<0$，那么下列不等式成立的是（　　）

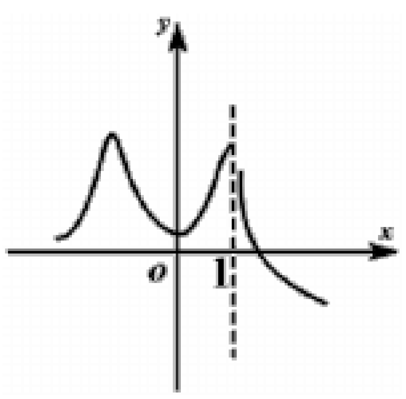
A．$\log_2|b|<\log_2|a|$　　B．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^b<\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$

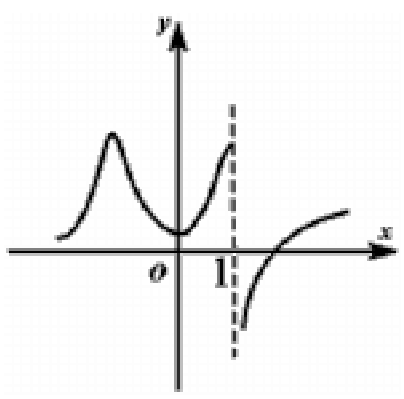
C．$b^3>a^3$　　D．$ab<b^2$

9．函数$f(x)=\begin{cases}\ln(x-\dfrac{1}{x}), x>1,\\ e^{\cos\pi x}, x\le 1\end{cases}$的图象大致是（　　）

A．

B．

C．

D．

10．在$\triangle ABC$ 中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，且$|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=120°$，则$|\overrightarrow{EB}|=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{19}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{11}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

11．M 是抛物线$y^2=4x$上一点，N是圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$关于直线$x-y-1=0$的对称圆上的一点，则$|MN|$最小值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{11}}{2}-1$　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$2\sqrt{2}-1$　　D．$\dfrac{3}{2}$

12．在直角坐标系中，已知**A**（**1**，**0**），**B**（**4**，**0**），若直线 ***x+my*﹣1=0** 上存在点 ***P***，使得**|*PA*|=2|*PB*|**，则正实数 ***m*** 的最小值是**(　　)**

A．$\frac{1}{3}$　　　　B．3　　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D．$\sqrt{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左右焦点为$F_1,F_2$，过$F_2$作$x$轴的垂线与$C$相交于$A,B$两点，$F_1B$与$y$轴相交于$D$.若$AD\perp F_1B$，则双曲线$C$的离心率为________.

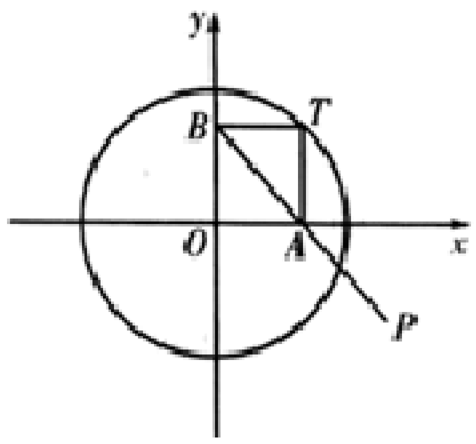
14．在三棱锥 ***P-ABC*** 中，$AB=5$，$BC=3$，$CA=4$，三个侧面与底面所成的角均为$60°$，三棱锥的内切球的表面积为________.

15．复数$z=\frac{2i}{1+i}$（i为虚数单位）的虚部为_________.

16．已知三棱锥$P-ABC$，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 **4** 的正三角形，D，E分别是PA、AB的中点，F为棱BC上一动点（点C除外），$\angle CDE=\frac{\pi}{2}$，若异面直线AC与DF所成的角为θ，且$\cos\theta=\frac{7}{10}$，则$CF=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，点T为圆O：$x^2+y^2=1$上一动点，过点T分别作x轴，y轴的垂线，垂足分别为A，B，连接BA延长至点P，使得$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AP}$，点$P$的轨迹记为曲线$C$.



（**1**）求曲线C的方程；

（**2**）若点A，B分别位于x轴与y轴的正半轴上，直线AB与曲线C相交于M，N两点，且$|AB|=1$，试问在曲线C上是否存在点Q，使得四边形$OMQN$为平行四边形，若存在，求出直线l方程；若不存在，说明理由.

18．（12 分）已知函数$f(x)=e^x-ax+\frac{1}{2}x^2$，其中$a>-1$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）设$h(x)=f(x)+ax-\frac{1}{2}x^2-\ln x$，求证：$h(x)>2$；

（Ⅲ）若$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+b$对于$x\in\mathbf{R}$恒成立，求$b-a$的最大值.

19．（12 分）已知直线l的参数方程为$\begin{cases} x=m+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=12$，且曲线$C$的左焦点$F$在直线$l$上.

（Ⅰ）求l的极坐标方程和曲线C的参数方程；

（Ⅱ）求曲线C的内接矩形的周长的最大值.

20．（12 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，且二阶矩阵 ***M*** 满足 ***AM=B***，求 ***M*** 的特征值及属于各特征值的一个特征向量.

21．（12 分）已知函数$f(x)=ax^3+bx^2$，当$x=1$时，有极大值 **3**；

（**1**）求a，b的值；

（**2**）求函数$f(x)$的极小值及单调区间.

22．（10 分）语音交互是人工智能的方向之一，现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱.主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱，它们可以通过语音交互满足人们的部分需求.某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度，从某地区随机抽取了 **100** 名购买“小爱同学”和 **100** 名购买“天猫精灵”的人，具体数据如下：

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计
男	**45**	**60**	**105**
女	**55**	**40**	**95**
合计	**100**	**100**	**200**

（**1**）若该地区共有 **13000** 人购买了“小爱同学”，有 **12000** 人购买了“天猫精灵”，试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人？

（**2**）根据列联表，能否有 **95%** 的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\ge k)$	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
k	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**	**7.879**	**10.828**

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**A**

【解析】

根据题意可得 $AC \perp BC$**,**即知 $\boldsymbol{C}$ 在以 $\boldsymbol{AB}$ 为直径的圆上**.**

【详解】

$\because PB \perp \alpha, AC \subset \alpha$，

$\therefore PB \perp AC$，

又 $PC \perp AC$， $PB \cap PC = P$，

$\therefore AC \perp$ 平面 PBC，又 $BC \subset$ 平面 PBC

$\therefore AC \perp BC$，

故 C 在以 AB 为直径的圆上，

又 C 是 α 内异于 A, B 的动点，

所以 C 的轨迹是圆，但要去掉两个点 ***A,B***

故选：***A***

【点睛】

本题主要考查了线面垂直、线线垂直的判定，圆的性质，轨迹问题，属于中档题**.**

2．**C**

【解析】

框图的功能是求等比数列的和，直到和不满足给定的值时，退出循环，输出 ***n*.**

【详解】

第一次循环：$S=\frac{1}{2}, n=2$；第二次循环：$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}, n=3$；

第三次循环：$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}, n=4$；第四次循环：$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}, n=5$；

此时满足输出结果，故 $\frac{7}{8}<P \leq \frac{15}{16}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查程序框图的应用，建议数据比较小时，可以一步一步的书写，防止错误，是一道容易题**.**

3．**D**

【解析】

因为 $f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|+\sin(x+\pi)=|\cos x|-\sin x\neq f(x)$，所以①不正确；

因为 $f(x)=|\cos x|+\sin x$，所以 $f(\frac{\pi}{2}+x)=|\cos(\frac{\pi}{2}+x)|+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=|\sin x|+\cos x$，

$f(\frac{\pi}{2}-x)=|\cos(\frac{\pi}{2}-x)|+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=|\sin x|+\cos x$，所以 $f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形，②正确；

易知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以只需研究函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 上的极大值与最小值即可．当 $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)=-\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，且 $\frac{\pi}{4}\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$，令 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{3\pi}{4}$，可知函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处取得极大值为 $\sqrt{2}$，③正确；

因为 $\frac{\pi}{4}\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$，所以 $-1\leq\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 -1，④正确.

故选 **D**.

4．**D**

【解析】

根据空间向量的线性运算，用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 作基底表示 $\overrightarrow{BM}$ 即可得解**.**

【详解】

根据空间向量的线性运算可知

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}$$
$$=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}$$
$$=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1}\right)$$
$$=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

因为 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，

则 $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$

即 $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$，

故选：**D.**

【点睛】

本题考查了空间向量的线性运算，用基底表示向量，属于基础题**.**

5．**B**

【解析】

根据散点图呈现的特点可以看出，二者具有相关关系，且斜率小于 **1.**

【详解】

散点图里变量的对应点分布在一条直线附近，且比较密集，

故可判断语文成绩和英语成绩之间具有较强的线性相关关系，

且直线斜率小于 **1**，故选 **B.**

【点睛】

本题主要考查散点图的理解，侧重考查读图识图能力和逻辑推理的核心素养**.**

6．**A**

【解析】

根据 $m=2$ 或 $m+2=2$，验证交集后求得 m 的值**.**

【详解】

因为 $A\cap B=\{2\}$，所以 $m=2$ 或 $m+2=2$**.**当 $m=2$ 时，$A\cap B=\{2,4\}$，不符合题意，当 $m+2=2$ 时，$m=0$**.**故选 **A.**

【点睛】

本小题主要考查集合的交集概念及运算，属于基础题**.**

7．**B**

【解析】

$m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 变形为 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，由 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$，转化在 $\triangle ABN$ 中，利用 B、P、N 三点共线可得 **.**

【详解】

解：依题：$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=3m\overrightarrow{AN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

又 B，P，N 三点共线，

$\therefore 3m+\dfrac{2}{3}=1$，解得 $m=\dfrac{1}{9}$.

故选： B .

【点睛】

本题考查平面向量基本定理及用向量共线定理求参数. 思路是**(1)**先选择一组基底，并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式，再通过向量的运算来解决**.**利用向量共线定理及向量相等的条件列方程(组)求参数的值**. (2)**直线的向量式参数方程： A、P、B 三点共线$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ （O 为平面内任一点**,**$t\in R$）

8．**D**

【解析】

利用函数的单调性、不等式的基本性质即可得出**.**

【详解】

$\because b<a<0$，$\therefore \log_2|b|>\log_2|a|$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^b>\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$，$b^3<a^3$，$ab<b^2$ **.**

故选：**D.**

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性比较大小，考查不等式的性质，属于基础题**.**

9．**A**

【解析】

根据复合函数的单调性，同增异减以及采用排除法，可得结果**.**

【详解】

当 $x>1$ 时， $f\left(x\right)=\ln(x-\dfrac{1}{x})$，

由 $y=-\dfrac{1}{x}, y=x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 递增，

所以 $t=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 递增

又 $y=\ln t$ 是增函数，

所以 $f\left(x\right)=\ln(x-\dfrac{1}{x})$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 递增，故排除 **B**、**C**

当 $x\le 1$ 时 $f\left(x\right)=e^{\cos\pi x}$，若 $x\in\left(0,1\right)$，则 $\pi x\in\left(0,\pi\right)$

所以 $t=\cos\pi x$ 在 $\left(0,1\right)$ 递减，而 $y=e^t$ 是增函数

所以 $f\left(x\right)=e^{\cos\pi x}$ 在 $\left(0,1\right)$ 递减，所以 **A** 正确，**D** 错误

故选：**A**

【点睛】

本题考查具体函数的大致图象的判断，关键在于对复合函数单调性的理解，记住常用的结论：增+增=增，增-减=增，减+减=减，复合函数单调性同增异减，属中档题.

10．**A**

【解析】

根据向量的线性运算可得$\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,利用$|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2$及$|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=120^\circ$计算即可.

【详解】

因为$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

所以$|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2=\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$

$=\frac{9}{16}\times1^2-\frac{3}{8}\times1\times2\times(-\frac{1}{2})+\frac{1}{16}\times2^2$

$=\frac{19}{16}$,

所以$|\overrightarrow{EB}|=\frac{\sqrt{19}}{4}$，

故选：*A*

【点睛】

本题主要考查了向量的线性运算，向量数量积的运算，向量数量积的性质，属于中档题.

11．**C**

【解析】

求出点$(1,2)$关于直线$x-y-1=0$的对称点C的坐标，进而可得出圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$关于直线$x-y-1=0$的对称圆C的方程，利用二次函数的基本性质求出$|MC|$的最小值，由此可得出$|MN|_{\min}=|MC|_{\min}-1$，即可得解.

【详解】

如下图所示：