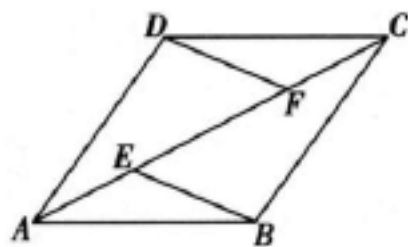


绝密★启用前

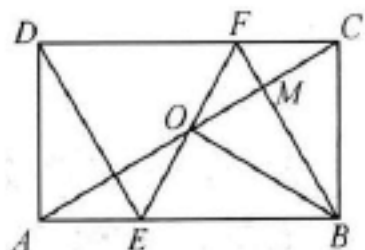
## 乐学教育菱形证明专题训练

1. 已知:如图,在四边形 ABCD 中,  $AB \parallel CD$ , E, F 为对角线 AC 上两点,且  $AE = CF$ ,  $DF \parallel BE$ , AC 平分  $\angle BAD$ . 求证: 四边形 ABCD 为菱形.



【答案】  $\because AB \parallel CD$ ,  
 $\therefore \angle BAE = \angle DCF$ .  
 $\because DF \parallel BE$ ,  
 $\therefore \angle BEF = \angle DFE$ ,  
 $\therefore \angle AEB = \angle CFD$ .  
 又  $\because AE = CF$ ,  
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$ ,  
 $\therefore AB = CD$ .  
 $\because AB \parallel CD$ ,  
 $\therefore$  四边形 ABCD 是平行四边形.  
 $\because AC$  平分  $\angle BAD$ ,  
 $\therefore \angle BAE = \angle DAF$ .  
 又  $\angle BAE = \angle DCF$ ,  
 $\therefore \angle DAF = \angle DCF$ ,  
 $\therefore AD = CD$ ,  
 $\therefore$  四边形 ABCD 是菱形.

2. 如图, 矩形 ABCD 中, 点 O 为 AC 的中点, 过点 O 的直线分别与 AB, CD 交于点 E, F, 连接 BF 交 AC 于点 M, 连接 DE, BO. 若  $\angle COB = 60^\circ$ ,  $FO = FC$ .



求证:

(1) 四边形 EBFD 是菱形;

【答案】连接 OD.∵点 O 为矩形 ABCD 的对角线 AC 的中点，  
 ∴B, D, O 三点共线且  $BD = DO = CO = AO$ .  
 在矩形 ABCD 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = DC$ ，∴ $\angle FCO = \angle EAO$ .  
 在  $\triangle CFO$  和  $\triangle AEO$  中，  
 ∴ $\triangle CFO \cong \triangle AEO$ ，∴ $FO = EO$ .  
 又∵ $BO = DO$ ，∴四边形 BEFD 是平行四边形.  
 ∵ $BO = CO$ ， $\angle COB = 60^\circ$ ，  
 ∴ $\triangle COB$  是等边三角形.∴ $\angle OCB = 60^\circ$ .  
 ∴ $\angle FCO = \angle DCB - \angle OCB = 30^\circ$ .  
 ∵ $FO = FC$ ，∴ $\angle FOC = \angle FCO = 30^\circ$ .  
 ∴ $\angle FOB = \angle FOC + \angle COB = 90^\circ$ .  
 ∴ $EF \perp BD$ .∴平行四边形 EBFD 是菱形.

(2)  $MB : OE = 3 : 2$ .

【答案】∵ $BO = BC$ ，∴点 B 在线段 OC 的垂直平分线上.  
 ∵ $FO = FC$ ，∴点 F 在线段 OC 的垂直平分线上.  
 ∴BF 是线段 OC 的垂直平分线.  
 ∴ $\angle FMO = \angle OMB = 90^\circ$ .  
 ∴ $\angle OBM = 30^\circ$ .∴ $OF = BF$ .

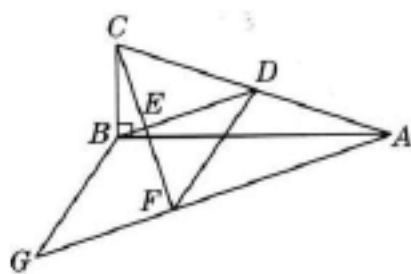
∵ $\angle FOC = 30^\circ$ ，∴ $FM = OF$ .

∴ $BM = BF - MF = 2OF - OF = OF$ .

即  $FO = EO$ ，∴ $BM : OE = 3 : 2$ .

3. 如图,在  $\triangle ABC$  中, $\angle ABC = 90^\circ$ , BD 为 AC 边上的中线,过点 C 作  $CE \perp BD$  于点 E,过点 A 作 BD 的平行线,交 CE 的延长线于点 F,在 AF 的延长线上截取  $FG = BD$ ,连接 BG, DF.求证:四边形

BGFD是菱形.



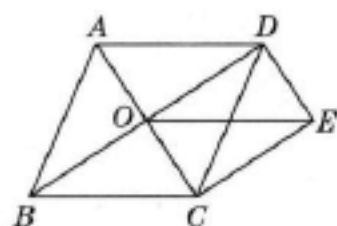
【答案】 $\because FG \parallel BD, BD = FG, \therefore$  四边形 BGFD 是平行四边形.

$\because CF \perp BD, AG \parallel BD, \therefore CF \perp AG$ . 又  $\because \angle ABC = 90^\circ$ , 点 D 是 AC 的中点,  $\therefore BD = DF = AC$ ,

$\therefore$  平行四边形 BGFD 是菱形.

4. 如图,点 O 是菱形 ABCD 对角线的交点,  $DE \parallel AC, CE \parallel BD$ , 连接 OE.

求证:  $OE = BC$ .



【答案】 $\because DE \parallel AC, CE \parallel BD$ ,

$\therefore$  四边形 OCED 是平行四边形.

$\because$  四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore AC \perp BD, OB = OD$ ,

$\therefore \angle BOC = \angle COD = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形 OCED 是矩形,

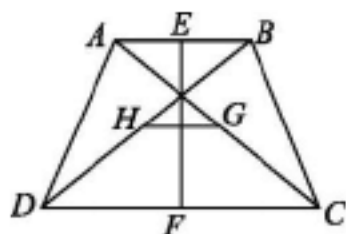
$\therefore \angle ODE = 90^\circ, \because OB = OD, \angle BOC = \angle ODE = 90^\circ$ ,

$\therefore BC = OE$ ,

$\therefore DE = OC$ .

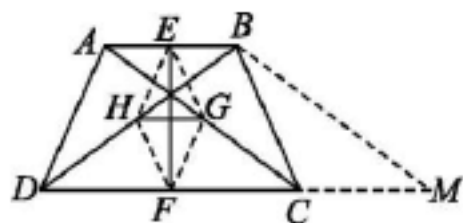
$\therefore OE = BC$ .

5. [2015·兰州中考,25] (9 分)如图,四边形 ABCD 中,  $AB \parallel CD, AB \neq CD, BD = AC$ .



(1)求证:AD=BC;

【答案】作  $BM \parallel AC$ ,  $BM$  交  $DC$  的延长线于点  $M$ , 则  $\angle ACD = \angle BMD$ . 1 分



$\because AB \parallel CD, BM \parallel AC$ ,

$\therefore$  四边形  $ABMC$  为平行四边形. 2 分

$\therefore AC = BM$ .

$\because BD = AC, \therefore BM = BD$ .

$\therefore \angle BDM = \angle BMD$ .

$\therefore \angle BDC = \angle ACD$ .

在  $\triangle BDC$  和  $\triangle ACD$  中,

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle ACD$ . 4 分

$\therefore BC = AD$ . 5 分

(2)若  $E, F, G, H$  分别是  $AB, CD, AC, BD$  的中点.求证:线段  $EF$  与线段  $GH$  互相垂直平分.

【答案】连接  $EG, GF, FH, HE$ . 6 分

$\because E, H$  为  $AB, BD$  的中点,  $\therefore EH = AD$ .

同理  $FG = AD, EG = BC, FH = BC$ .

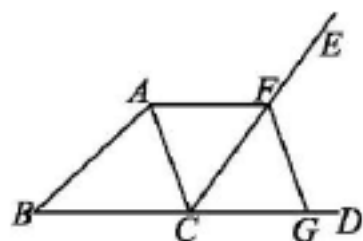
$\because BC = AD, \therefore EG = FG = FH = EH$ . 8 分

$\therefore$  四边形  $EGFH$  为菱形,

$\therefore EF$  与  $GH$  互相垂直平分. 9 分

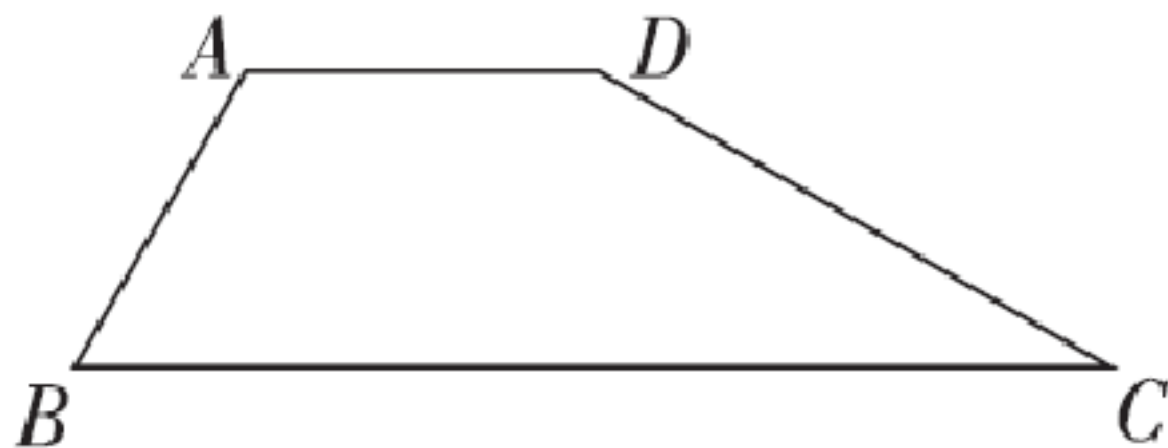
6.

[2015·长春中考,18] (7 分)如图,  $CE$  是  $\triangle ABC$  外角  $\angle ACD$  的平分线,  $AF \parallel CD$  交  $CE$  于点  $F$ ,  $FG \parallel AC$  交  $CD$  于点  $G$ , 求证: 四边形  $ACGF$  是菱形.



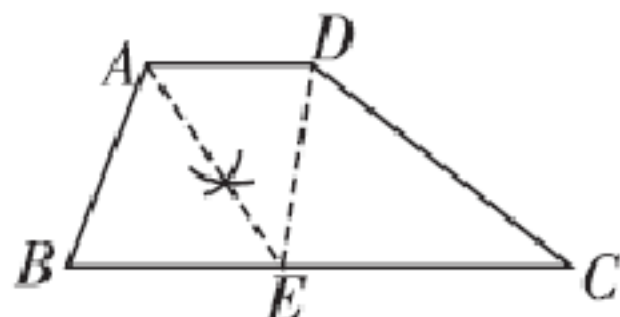
【答案】因为  $AF \parallel CD, FG \parallel AC$ ,  
所以四边形  $ACGF$  是平行四边形①,  
又因为  $\angle ACE = \angle ECG, \angle ECG = \angle AFC$ ,  
所以  $\angle ACE = \angle AFC$ , 所以  $AC = AF$ ②,  
由①②得四边形  $ACGF$  是菱形.

7. [2010·上海中考, 23] 已知梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = AD$  (如图所示),  $\angle BAD$  的平分线  $AE$  交  $BC$  于点  $E$ , 连结  $DE$ .



(1) 在图中, 用尺规作  $\angle BAD$  的平分线  $AE$  (保留作图痕迹, 不写作法), 并证明四边形  $ABED$  是菱形;

【答案】



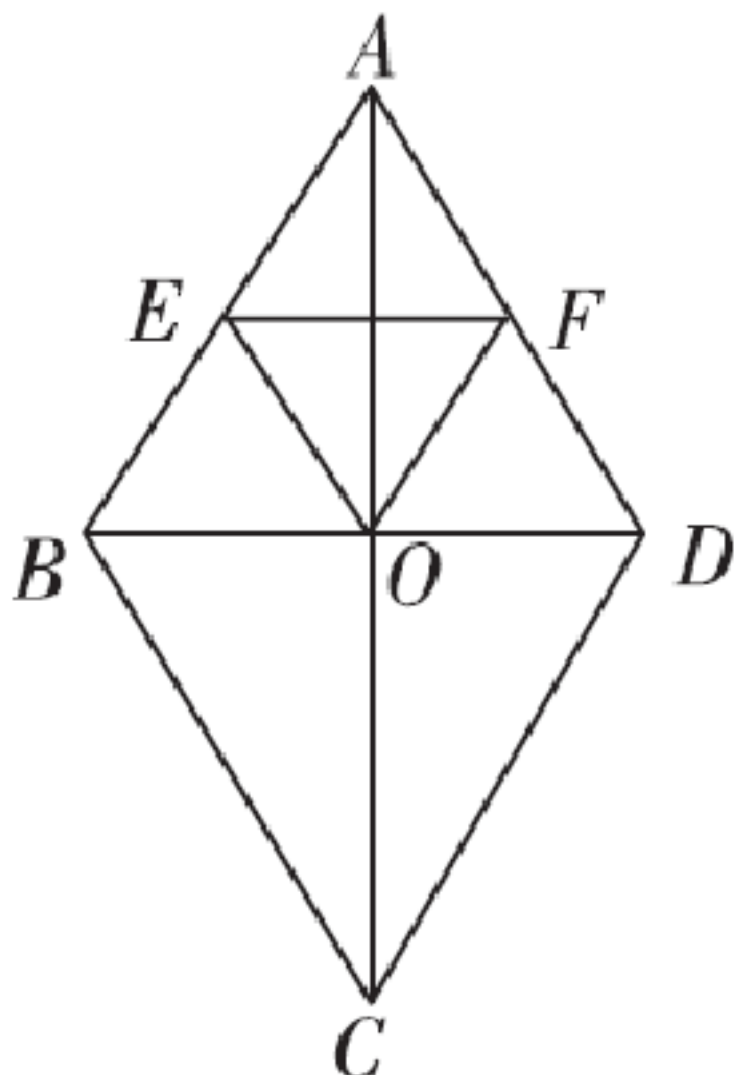
$\because \angle BAE = \angle DAE$ ,  
 $\angle DAE = \angle BEA$ ,  
 $\therefore \angle BAE = \angle BEA$ ,  $AB = BE = AD$ ,  
 $AD \parallel BE$ ,  $\therefore$  四边形  $ABED$  的平行四边形, 又  $AB = AD$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABED$  为菱形

(2)  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $EC = 2BE$ , 求证:  $ED \perp DC$ .

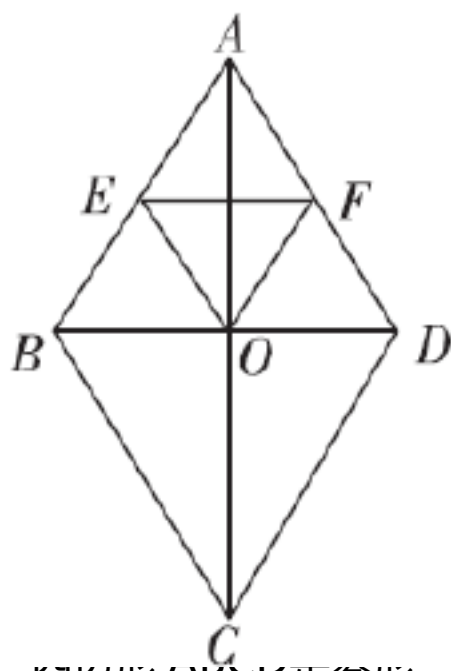
【答案】过  $D$  作  $DF \parallel AE$ , 则  $DF = CF = 1$ ,  
 $\therefore \angle C = 30^\circ$ , 而  $\angle DEC = 60^\circ$ ,  
 $\therefore \angle EDC = 90^\circ$ ,  $\therefore ED \perp DC$ .

8.

[2010·沈阳中考，19]如图，菱形ABCD的对角线AC与BD相交于O，点E，F分别为边AB，AD的中点，连接EF，OE，OF，求证：四边形AEOF是菱形.



【答案】 $\because$ 点E，F分别为AB，AD的中点  
 $\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ ， $AF = \frac{1}{2}AD$ (2分)



又 $\because$ 四边形ABCD是菱形

$\therefore AB = AD$

$\therefore AE = AF$ (4分)

又 $\because$ 菱形ABCD的对角线AC与BD相交于点O

$\therefore O$ 为BD的中点

$\therefore OE, OF$  是  $\triangle ABD$  的中位线(6 分)

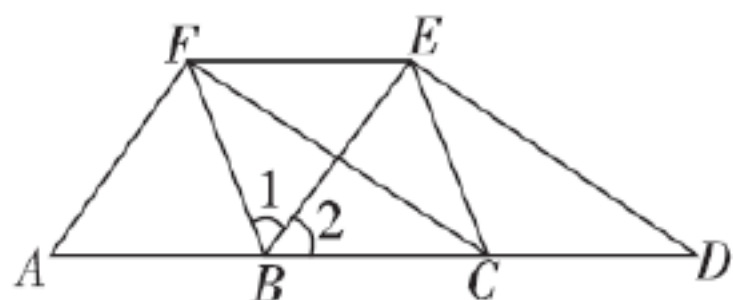
$\therefore OE \parallel AD, OF \parallel AB$

$\therefore$  四边形  $AEOF$  是平行四边形(8 分)

$\therefore AE = AF$

$\therefore$  四边形  $AEOF$  是菱形(10 分)

9. [2010·安徽中考, 20]如图,  $AD \parallel FE$ , 点  $B, C$  在  $AD$  上,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $BF = BC$ .



(1) 求证: 四边形  $BCEF$  是菱形;

【答案】  $\because AD \parallel FE, \therefore \angle FEB = \angle 2$ .

$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle FEB = \angle 1$ .

$\therefore BF = EF$

$\because BF = BC, \therefore BC = EF$ .

$\therefore$  四边形  $BCEF$  是平行四边形

$\because BF = BC,$

$\therefore$  四边形  $BCEF$  是菱形(5 分)

(2) 若  $AB = BC = CD$ , 求证:  $\triangle ACF \cong \triangle BDE$ .

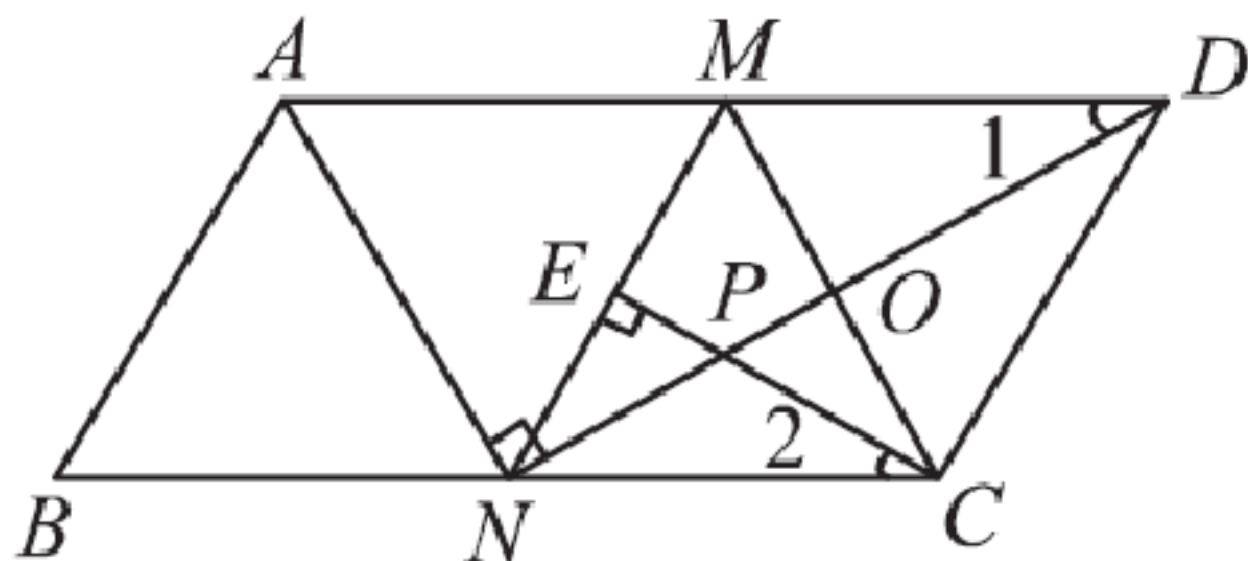
【答案】  $\because EF = BC, AB = BC = CD, AD \parallel FE,$

$\therefore$  四边形  $ABEF$ 、四边形  $CDEF$  均为平行四边形,  $\therefore AF = BE, FC = ED$ .(8 分)

又  $\because AC = 2BC = BD,$  (9 分)

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BDE$ .(10 分)

10. [2013·长沙中考，24]如图，在  $ABCD$  中， $M$ ， $N$  分别是  $AD$ ， $BC$  的中点， $\angle AND = 90^\circ$ ，连接  $CM$  交  $DN$  于点  $O$ 。



(1) 求证： $\triangle ABN \cong \triangle CDM$ ；

【答案】 $\because \angle ABN = \angle CDM$ ， $AB = CD$ ，  
 $BN = BC = AD = DM$ ，

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM$  (SAS).

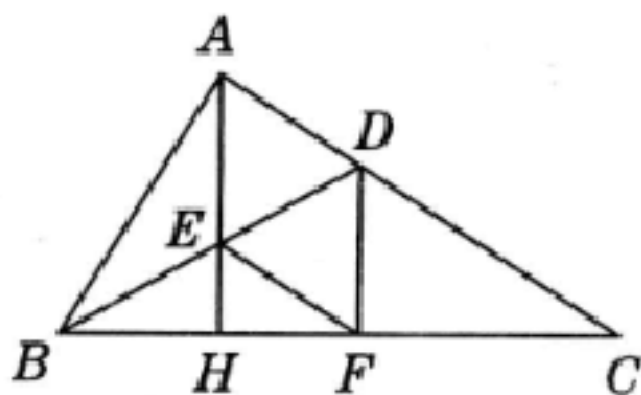
(2) 过点  $C$  作  $CE \perp MN$  于点  $E$ ，交  $DN$  于点  $P$ ，若  $PE = 1$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，求  $AN$  的长。

【答案】 $\because M$ ， $O$  分别为  $AD$ ， $ND$  的中点，  
 $\therefore AN \parallel MO$  且  $AN = 2MO$ ，  
 $\therefore \angle MOD = \angle AND = 90^\circ$ ，即平行四边形  $CDMN$  是菱形，  
在  $Rt\triangle MOD$  与  $Rt\triangle NEC$  中，  
 $\because \angle 1 = \angle 2$ ， $MD = NC$ ， $\therefore Rt\triangle MOD \cong Rt\triangle NEC$ ，  
 $\therefore MO = NE$ 。

根据菱形的性质可知， $\angle MND = \angle CND$ ， $\angle 1 = \angle CND$ ，所以  $\angle MND = \angle CND = \angle 2 = 30^\circ$ ，  
所以在  $Rt\triangle ENP$  中  $NE = PE \div \tan 30^\circ =$ ，

即  $AN = 2$ 。

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$ , $AH \perp BC$ 于点 $H$ , $\angle B$ 的平分线交 $AC$ 于点 $D$ ,交 $AH$ 于点 $E$ , $DF \perp BC$ 于点 $F$ ,求证:四边形 $AEFD$ 是菱形.



【答案】 $\because \angle ABD = \angle FBD, BD = BD, \angle BAD = \angle DFB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD, \therefore AD = DF, AB = FB$ .  
 又 $\angle ABE = \angle FBE, BE = BE$ ,  
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE$ .  
 $\therefore \angle BAE = \angle BFE$ .  
 又 $\angle BAE = 90^\circ - \angle ABC = \angle C$ ,  
 $\therefore \angle BFE = \angle C, \therefore EF \parallel AD$ .  
 $\because DF \perp BC, AH \perp BC, \therefore AE \parallel DF$ .  
 $\therefore$  四边形 $AEFD$ 是平行四边形.  
 又 $AD = DF, \therefore$  四边形 $AEFD$ 是菱形.

12. [2012·南宁中考,25]如图,已知矩形纸片 $ABCD$ , $AD = 2, AB = 4$ ,将纸片折叠,使顶点 $A$ 与边 $CD$ 上的点 $E$ 重合,折痕 $FG$ 分别与 $AB, CD$ 交于点 $G, F$ , $AE$ 与 $FG$ 交于点 $O$ .

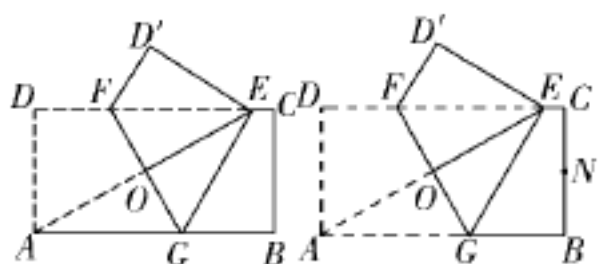
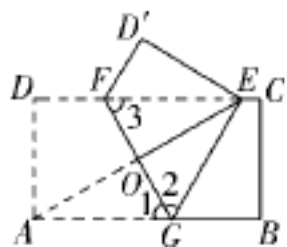


图 1 图 2

(1)如图 1,求证: $A, G, E, F$  四点围成的四边形是菱形;

【答案】证法一:



证明:在矩形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$   
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$ (1 分)  
 由折叠可知: $AG = EG, \angle 1 = \angle 2$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3$$

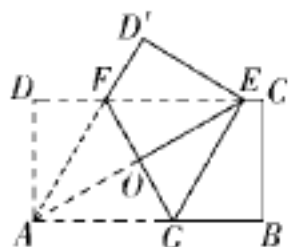
$$\therefore EF = EG \text{ (2 分)}$$

$$\therefore EF = AG$$

$\therefore$  四边形 AGEF 是菱形 (3 分)

证法二：

证明：连接 AF, 由折叠可知



$$OA = OE, AG = EG \text{ (1 分)}$$

在矩形 ABCD 中,  $AB \parallel CD$

$$\therefore \angle AEF = \angle EAG$$

$$\therefore \angle AOG = \angle EOF$$

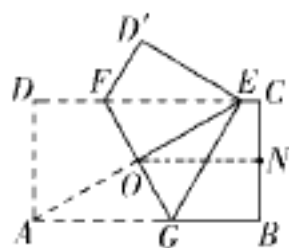
$$\therefore \triangle AOG \cong \triangle EOF \text{ (ASA) (2 分)}$$

$$\therefore AG = EF$$

$\therefore$  四边形 AGEF 是菱形 (3 分)

(2) 如图 2, 当  $\triangle AED$  的外接圆与 BC 相切于点 N 时, 求证, 点 N 是线段 BC 的中点;

【答案】证明：连接 ON, O 是  $\text{Rt}\triangle ADE$  外接圆圆心.



$\therefore \odot O$  与 BC 相切于点 N

$$\therefore ON \perp BC \text{ (4 分)}$$

在矩形 ABCD 中,  $DC \perp BC, AB \perp BC$

$$\therefore CD \parallel ON \parallel AB$$

$$\therefore = \text{ (5 分)}$$

$$\therefore OA = OE \quad \therefore CN = NB$$

即 N 为 BC 的中点 (6 分)

(3) 如图 2, 在第 2 问的条件下, 求折痕 FG 的长.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/205223221120011132>

