



陆士嘉实验室
LU SHI JIA LABORATORY

..... 国家级精品课

空气动力学基础

(Fundamentals of Aerodynamics)



北京航空航天大学陆士嘉实验室



第4讲 普朗特升力线理论

1

大展弦比
直机翼气动
模型建立

2

确定环量
 $\Gamma(z)$ 的微分-
积分方程

3

一般平面形状
大展弦比直机翼
的气动特性



大展弦比直机翼气动模型建立



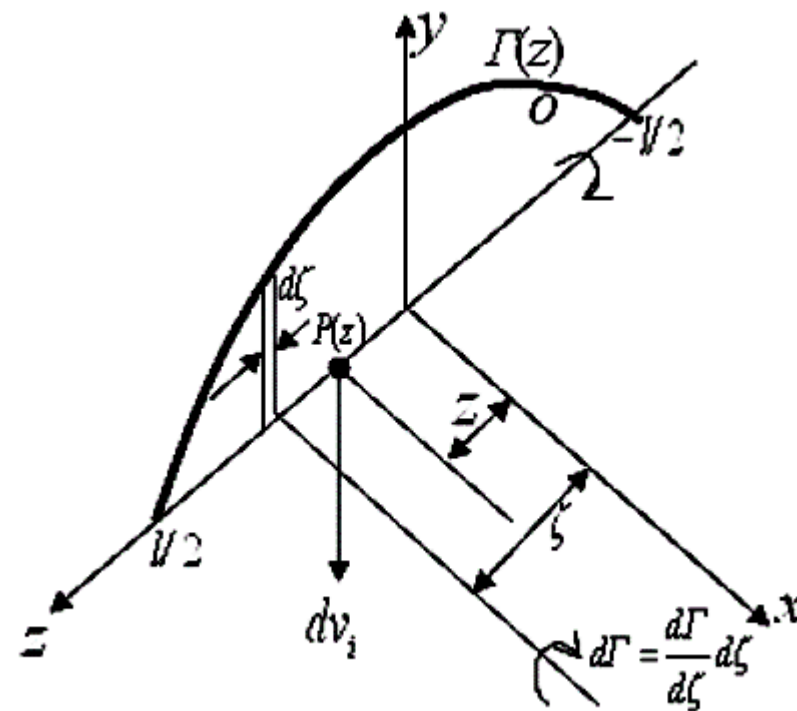
附着涡线在展向位置 ζ 处的强度为 $\Gamma(\zeta)$ ，在 $\zeta + d\zeta$ 处涡强为 $\Gamma(\zeta) + \frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta$ ，根据旋涡定理， $d\zeta$ 微段拖出的自由涡强为 $\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta$ 。此自由涡线在附着涡线上任一点 z 处的下洗速度为

$$dv_i(z) = \frac{|d\Gamma|}{4\pi(\zeta - z)} = \frac{-\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{4\pi(\zeta - z)}$$



整个涡系在 z 点产生的下洗速度为

$$v_i(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{-\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{(\zeta - z)}$$

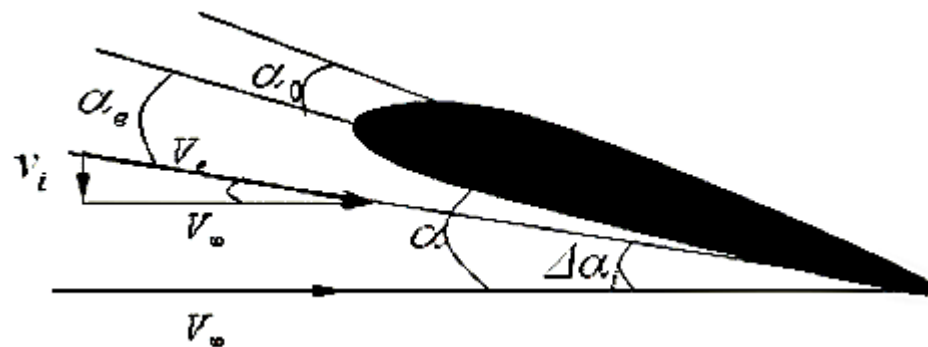




大展弦比直机翼气动模型建立



- 由于下洗速度的存在，机翼展向每个剖面上的实际有效速度 V_e 为无限远处来流速度 V_∞ 与下洗速度的矢量和，有效迎角 α_e 也比几何迎角 α 减小了 $\Delta\alpha_i$ ， $\Delta\alpha_i$ 叫下洗角，如图所示。



- 根据速度三角形 可得

$$\Delta\alpha_i(z) = \tan^{-1} \frac{v_i(z)}{V_\infty}, \quad \alpha_e(z) = \alpha(z) - \Delta\alpha_i(z), \quad V_e(z) = \frac{V_\infty}{\cos \Delta\alpha_i(z)}$$



大展弦比直机翼气动模型建立

⚙️ 由于下洗速度远小于来流速度，故可得

$$\Delta\alpha_i(z) = \tan^{-1} \frac{v_i(z)}{V_\infty} \approx \frac{v_i(z)}{V_\infty} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{-\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{\zeta - z}$$

⚙️ 在求作用在机翼微段上升力之前，我们先引入“剖面流动”的假设，假设有限翼展的机翼各剖面所受的气动力与以有效速度 V_e 流过形状与该剖面相同、迎角为 α_e 的二维翼剖面所受的气动力相同。因此，作用在点 $P(z)$ 处机翼微段 dz 上的力 dR 由库塔—儒可夫斯基升力定理确定，即

$$dR = \rho V_e \Gamma(z) dz \approx \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$



大展弦比直机翼气动模型建立



⚙️ dR 的方向垂直于有效速度 V_e , 它在垂直和平行 V_∞ 方向上的分量分别为升力 dL 和阻力 dD_i

$$dL = dR \cos \Delta\alpha_i(z) \approx dR \approx \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$

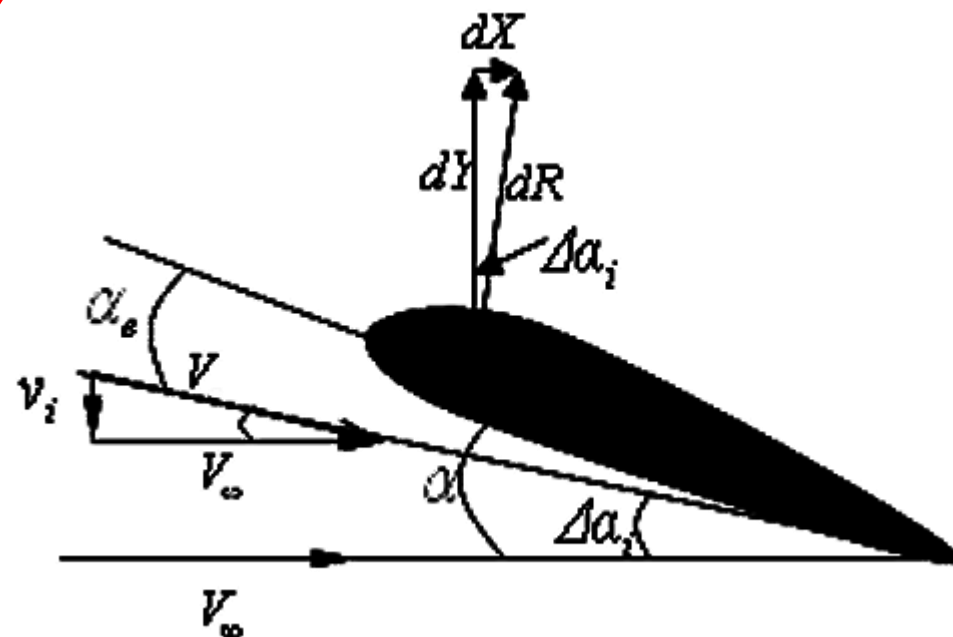
$$dD_i = dR \sin \Delta\alpha_i(z) \approx dL \cdot \Delta\alpha_i(z)$$



⚙️ 沿整个翼展积分, 得到整个机翼的升力和阻力为

$$L = \rho V_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz$$

$$D_i = \rho V_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) \Delta\alpha_i(z) dz$$



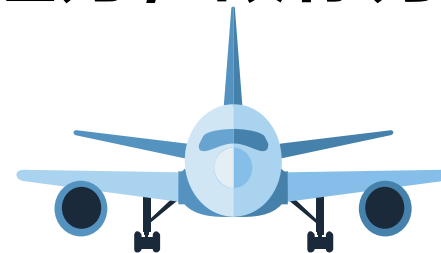


大展弦比直机翼气动模型建立



陆士嘉实验室
LU SHI JIA LABORATORY

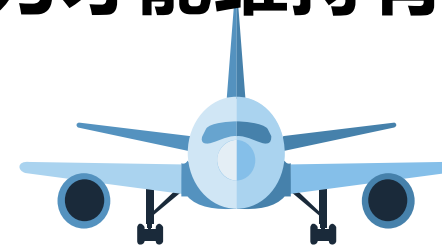
D_i 这个阻力在理想二维翼上是不存在的，它是由于有限翼展机翼后面存在自由涡而产生的，或者说，是因下洗角的出现使剖面有效迎角减小而在来流方向形成的阻力，故称为诱导阻力。此诱导阻力与流体的粘性无关。





大展弦比直机翼气动模型建立

是有限翼展机翼产生升力必须付出的阻力代价。从能量的观点看，机翼后方自由涡面上的流体微团旋转所需的能量，必须由飞机提供一个附加的推力来克服诱导阻力才能维持有升力的飞行。



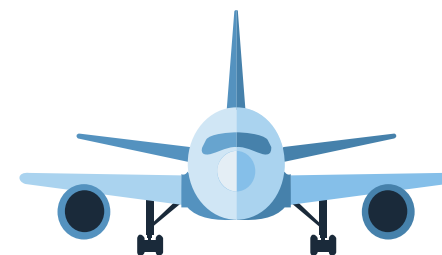
由推进系统所付出的附加功率为

$$\Delta P_w = D_i V_\infty = \rho V_\infty^2 \int_{-L/2}^{L/2} \Gamma(z) \Delta \alpha_i dz$$



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程

由上面可知，求解大展弦比直机翼的升力和阻力问题，归结为确定环量沿展向的分布 $\Gamma(z)$ 。下面推导确定 $\Gamma(z)$ 的方程式。





确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



由翼型理论可知，作用在微段机翼 dz 上的升力 dL 为

$$dL = C'_L(z) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b(z) dz \quad dL = \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$



由剖面流动假设，剖面升力系数可表示为

$$\begin{aligned} C'_L(z) &= C_{L_\infty}^\alpha(z) [\alpha_e(z) - \alpha_{0_\infty}(z)] = C_{L_\infty}^\alpha(z) [\alpha(z) - \Delta\alpha_i(z) - \alpha_{0_\infty}(z)] \\ &= C_{L_\infty}^\alpha(z) [\alpha_a(z) - \Delta\alpha_i(z)] \end{aligned}$$

上式中的 $C_{L_\infty}^\alpha(z)$ 、 $\alpha_{0_\infty}(z)$ 为二维翼剖面的升力线斜率和零升迎角。



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



由上面三式，可以得到

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_{\infty} C_{L\infty}^{\alpha} b(z) [\alpha_a(z) + \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{\zeta - z}]$$

此式即为给定迎角和机翼几何形状(翼型)条件下确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程。这个方程只有在少数特殊情况下才能得到精确的解，椭圆形环量分布是其中最重要的一种。



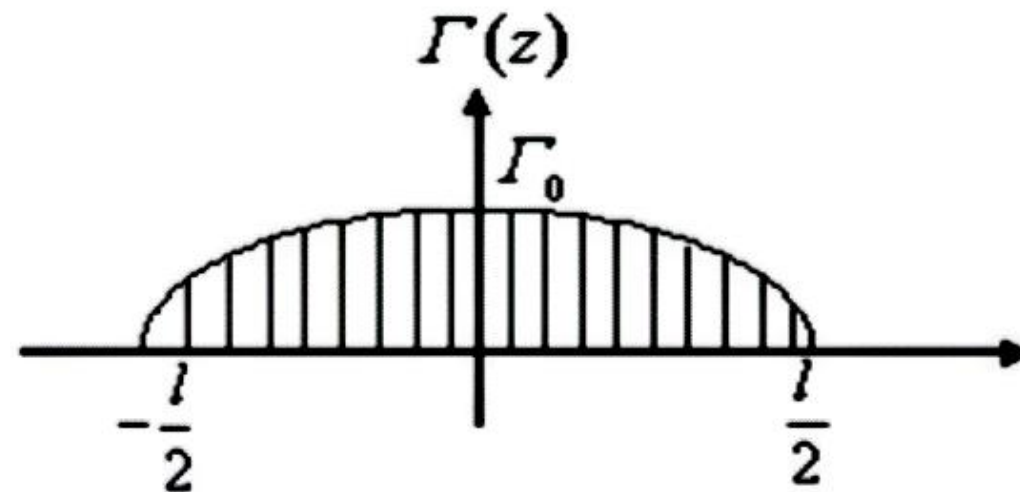
确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



如果机翼的环量分布 $\Gamma(z)$ 是椭圆形分布，则

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}$$

Γ_0 为机翼对称面上的最大环量值。





确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



由环量分布函数可以求得在 z 点处的下洗速度和下洗角为

$$\underline{v_i(z)} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{-\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{(\zeta - z)} = \underline{\frac{\Gamma_0}{2l}}$$

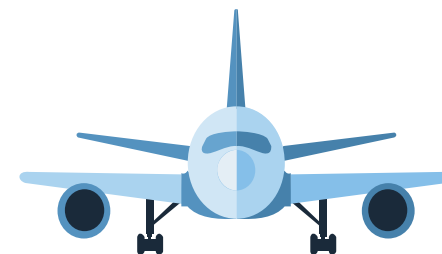
$$\Delta\alpha_i(z) = \text{tg}^{-1} \frac{v_i(z)}{V_\infty} \approx \frac{v_i(z)}{V_\infty} = \underline{\frac{\Gamma_0}{2lV_\infty}}$$

两式说明：椭圆形环量分布的机翼，其下洗速度和下洗角沿展向是不变的常量。



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程

如果机翼是无扭转的，既无几何扭转也无气动扭转，则几何迎角 α 、零升迎角 $\alpha_{0\infty}$ ，剖面升力线斜率 $C_{L\alpha}$ 沿展向也是不变的，所以沿展向有



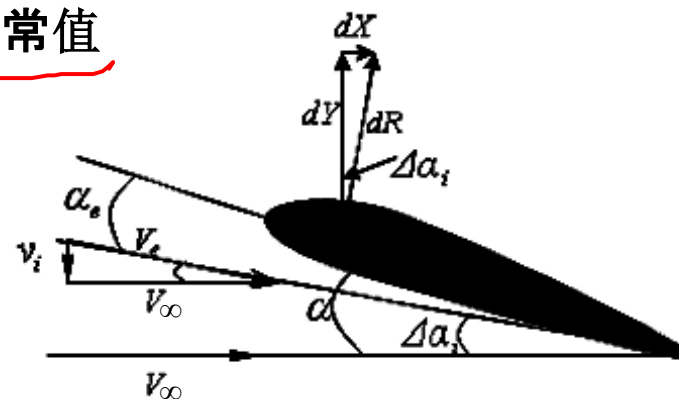


确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程

$$\alpha_e - \alpha_{0\infty} = \alpha - \Delta\alpha_i - \alpha_{0\infty} = \alpha_a - \Delta\alpha_i = \text{常值}$$

$$C'_L = C_{L\infty}^{\alpha} (\alpha_a - \Delta\alpha_i) = \text{常值}$$

$$C'_{Di} = C'_L \Delta\alpha_i = \text{常值}$$



对整个机翼则有

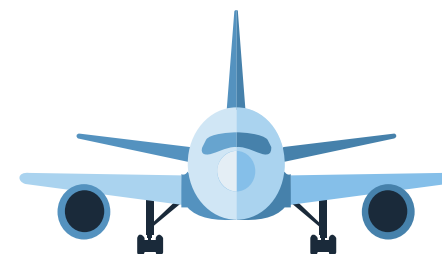
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} C'_L \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b(z) dz}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = C'_L \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} b(z) dz}{S} = C'_L$$

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} C'_{Di} \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b(z) dz}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = C'_{Di} \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} b(z) dz}{S} = C'_{Di}$$



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程

上两式说明：椭圆形环量分布无扭转平直机翼的升力系数和诱导阻力系数就等于剖面的升力系数和诱导阻力系数。





确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



下面求椭圆形环量分布平直机翼的气动系数表达式。

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz \quad \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}$$

$$C_L = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz = \frac{\Gamma_0 \pi l}{2 V_{\infty} S} \quad \therefore \Gamma_0 = C_L \frac{2 V_{\infty} S}{\pi l}$$



$$\Delta \alpha_i = \frac{v_i(z)}{V_{\infty}} = \frac{\Gamma_0}{2 l V_{\infty}} = \frac{C_L}{\pi \lambda}$$



$$C_L = C'_L = C_{L\infty}^{\alpha} (\alpha_a - \Delta \alpha_i) = C_{L\infty}^{\alpha} \left(\alpha_a - \frac{C_L}{\pi \lambda} \right)$$



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



陆士嘉实验室
LU SHI JIA LABORATORY



从而可以得到

$$C_L = \frac{C_{L\infty}^\alpha}{1 + \frac{C_{L\infty}^\alpha}{\pi\lambda}} \cdot \alpha_a \quad \boxed{C_L^\alpha} = \frac{C_{L\infty}^\alpha}{1 + \frac{C_{L\infty}^\alpha}{\pi\lambda}} < C_{L\infty}^\alpha$$



诱导阻力系数为

$$C_{Di} = C_L \cdot \Delta\alpha_i = \frac{C_L^2}{\pi\lambda}$$



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



⚙ 上两式说明椭圆环量分布的平直机翼在气动特性上与无限翼展机翼有以下两点重要的差别：

- ① 有限翼展机翼的升力线斜率小于无限翼展机翼，而且随着 λ 值的减小而减小。
- ② 有限翼展机翼有诱导阻力产生，诱导阻力系数与升力系数的平方成正比，与展弦比 λ 成反比。

在 C_L 值一定时，增大 λ 可减小 C_{Di} 值，要增大机翼的升力线斜率值应尽量采用大 λ 值。



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



下面来求具有椭圆形环量分布机翼的平面形状。



作用在微段机翼 dz 上的升力 dL 为

$$dL = C'_L(z) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b(z) dz$$

$$dL = \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$

$$\therefore \Gamma(z) = \frac{1}{2} V_\infty C'_L(z) b(z)$$

$$\because z = 0, \quad b(z) = b_0, \quad \Gamma(z) = \Gamma_0$$

$$\therefore \Gamma_0 = \frac{1}{2} V_\infty C'_L(0) b_0$$

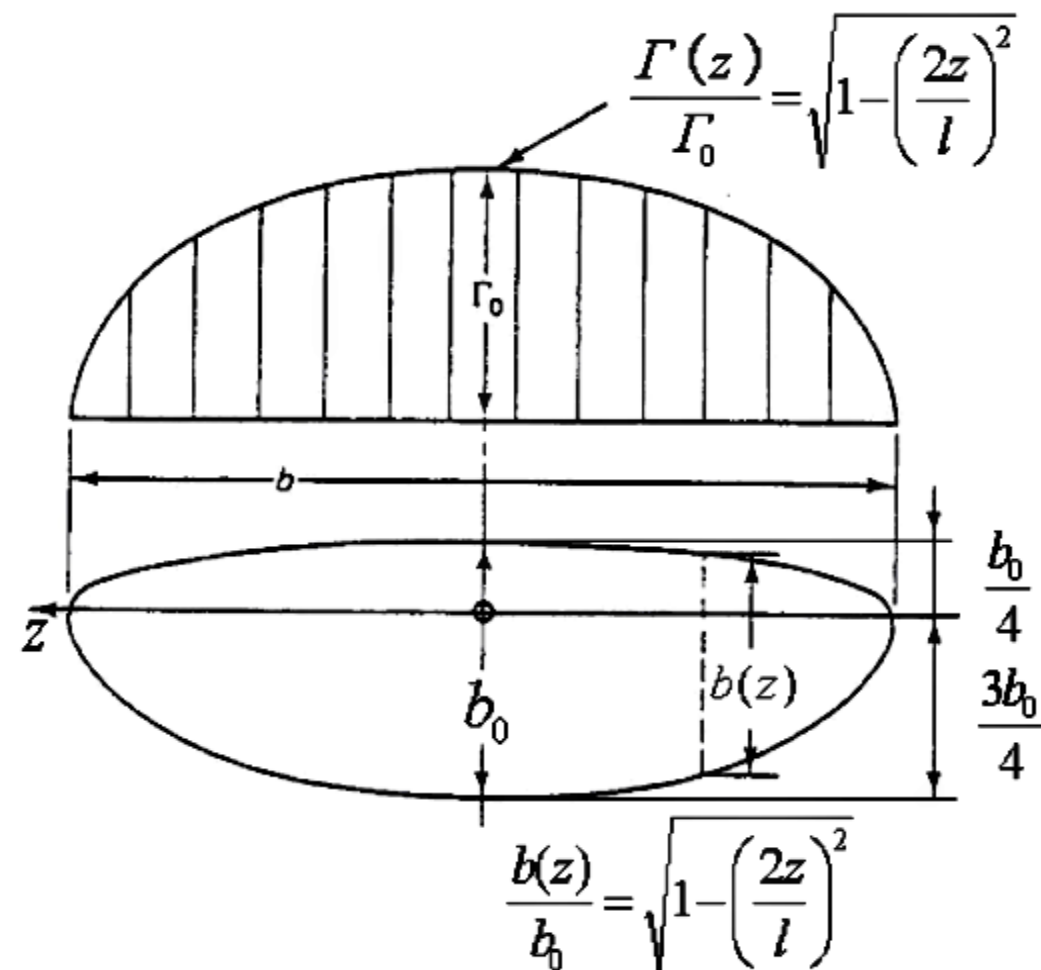
$$\because C'_L(z) = C'_L(0) = \text{常值}$$

$$\therefore \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0} = \frac{b(z)}{b_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}$$



确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程

上式表明，具有椭圆形环量分布的机翼展向弦长分布也是椭圆形的，称为椭圆形机翼。





确定环量 $\Gamma(z)$ 的微分-积分方程



陆士嘉实验室
LU SHI JIA LABORATORY



椭圆机翼

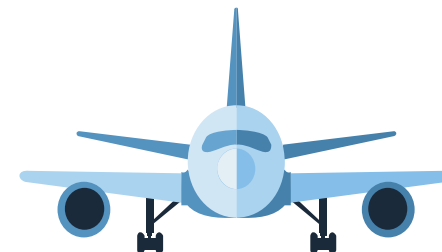


梯形机翼



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性

椭圆形机翼的环量分布是椭圆形的，这是升力线理论中最简单的解析解。虽然升力线理论可以证明椭圆翼是相同展弦比下具有最佳升阻特性的平面形状，但因结构和工艺上的复杂性现已极少采用，目前广泛采用矩形翼和梯形翼。





一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性

使用升力线理论在给定迎角下求解这些非椭圆的
 $\Gamma(z)$ 可使用三角级数法。

1. 基本微分—积分方程的三角级数解

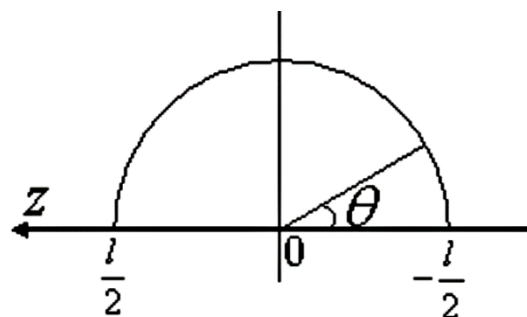
$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_{\infty} C_{L\infty}^{\alpha} b(z) [\alpha_a(z) + \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{d\zeta} d\zeta}{\zeta - z}]$$



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性



先进行变量置换，令 $z = -\frac{l}{2} \cos \theta$, $\zeta = -\frac{l}{2} \cos \theta_1$



则
$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{2} V_{\infty} C_{L\infty}^{\alpha} b(\theta) [\alpha_a(\theta) + \frac{1}{2\pi V_{\infty} l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{d\theta_1} d\theta_1}{\cos \theta - \cos \theta_1}]$$



再将上式展成如下的三角级数
$$\Gamma(\theta) = 2lV_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)$$

由于翼尖环量为零 $\Gamma(0)=\Gamma(\pi)=0$ ，所以上式只能取正弦项。



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性

此外，机翼上环量分布左右对称， $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$ ，所以 n 为偶数时 A_n 为0， $A_2 = A_4 = A_6 = \dots = A_{2n} = \dots = 0$ 。



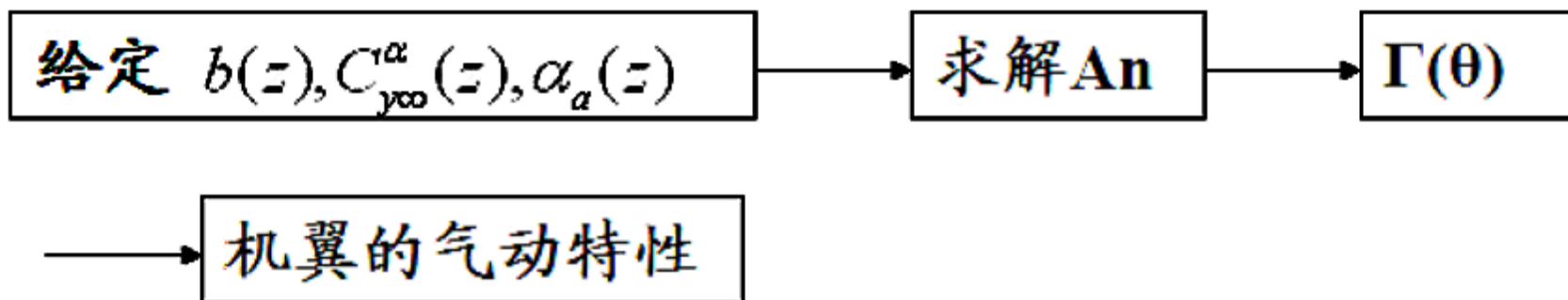
由上两式可得到
$$\mu \alpha_a(\theta) \sin \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) (\mu n + \sin \theta)$$

► 其中
$$\mu = \frac{C_{L\infty}^{\alpha}(\theta)b(\theta)}{4L}$$

只要保留足够多的项数 n 和选取相应的系数 A_n ，可近似表示实际的环量分布。所以最后的求解问题变为在给定机翼弦长、翼型和绝对迎角分布的情况下，求解 $A_1, A_3, A_5, \dots$ 。



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性



实际上只需要求解时保留前几项级数即可。
取三角级数的四项已可近似表示实际的环量分布。



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性

在 $\theta = 0 \sim \frac{\pi}{2}$ 之间取四个 θ 值（对应右半机翼4个剖面），

例如取 $\theta_1 = 22.5^\circ, \theta_2 = 45^\circ, \theta_3 = 67.5^\circ, \theta_4 = 90^\circ$,

代入 $\mu \alpha_a(\theta) \sin \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)(\mu n + \sin \theta)$ 。即可得到 A_1, A_3, A_5, A_7 的四个代数方程。

$$z = -\frac{l}{2} \cos \theta$$

$$z / (l / 2) = -0.92388 \quad -0.70711 \quad -0.38268 \quad 0.0$$



一般平面形状大展弦比直机翼的气动特性

- 椭圆形机翼的环量分布是环量三角级数表达式中的一个特例。在环量三角级数表达式中只取一项时，椭圆形机翼的环量分布是环量三角级数表达式中的一个特例。在环量三角级数表达式中只取一项时，

$$\Gamma(\theta) = 2lV_{\infty}A_1 \sin \theta$$

- 把变量 θ 还原为 z ，则 $\Gamma(z) = 2lV_{\infty}A_1 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}$

- 在 $z=0$ 时， $\Gamma=\Gamma_0$ ，可得 $A_1 = \frac{\Gamma_0}{2V_{\infty}l}$ ▶ 所以有 $\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/205242223312011133>