

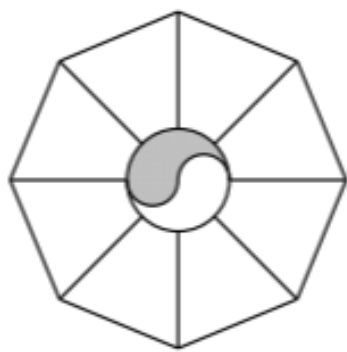
新疆乌鲁木齐市第四中学 2024 届高三上数学期末考试试题

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 《易经》包含着很多哲理，在信息学、天文学中都有广泛的应用，《易经》的博大精深，对今天 的几何学和其它学科仍有深刻的影响．下图就是易经中记载的几何图形——八卦田，图中正八 边形代表八卦，中间的圆代表阴阳太极图，八块面积相等的曲边梯形代表八卦田．已知正八边 形的边长为 $10m$ ， 阴阳太极图的半径为 $4m$ ，则每块八卦田的面积约为（ ）



- A. $47.79m^2$ B. $54.07m^2$
- C. $57.21m^2$ D. $114.43m^2$
2. “ $-1 \leq x + y \leq 1$ 且 $-1 \leq x - y \leq 1$ ”是“ $x^2 + y^2 \leq 1$ ”的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2ax$, $g(x) = \frac{4ax^2}{\ln x} - 2x$, 若方程 $f(x) = g(x)$ 恰有三个不相等的实根, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $(0, e]$ B. $\left(0, \frac{1}{2e}\right]$
- C. $(e, +\infty)$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

4. 设复数 z 满足 $z - iz = 2 + i$ (i 为虚数单位), 则 z 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

5. 设 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi + \beta) = -\frac{4}{5}$ ($\beta \in (0, \pi)$), 则 $\tan(2\alpha - \beta)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{7}{24}$ B. $-\frac{5}{24}$
C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{7}{24}$

6. 已知 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对应的边依次为 a, b, c , 若 $2a = b + 1, c = \sqrt{7}, C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

7. 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大, 则展开式中的常数项是 ()

- A. 180 B. 90 C. 45 D. 360

8. 由曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为 ()

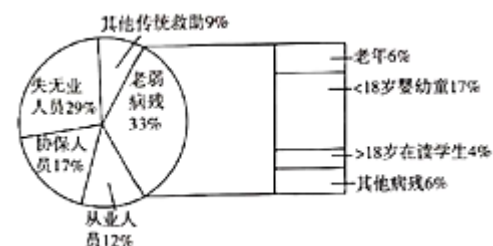
- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 虚轴的两个端点分别为 B_1, B_2 , 若四边

形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π , 则双曲线焦距的最小值为 ()

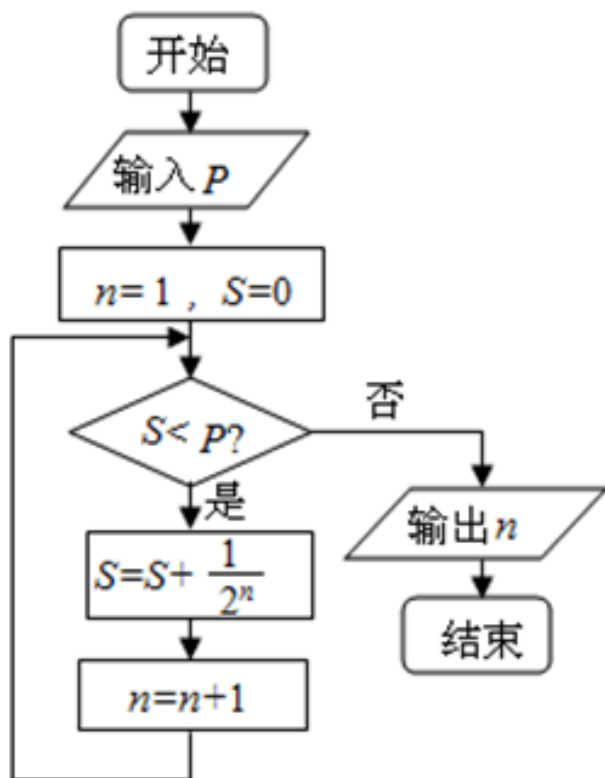
- A. 8 B. 16 C. $6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

10. 为了贯彻落实党中央精准扶贫决策, 某市将其低收入家庭的基本情况经过统计绘制如图, 其中各项统计不重复. 若该市老年低收入家庭共有 900 户, 则下列说法错误的是 ()



- A. 该市总有 15000 户低收入家庭
B. 在该市从业人员中, 低收入家庭共有 1800 户
C. 在该市无业人员中, 低收入家庭有 4350 户
D. 在该市大于 18 岁在读学生中, 低收入家庭有 800 户

11. 执行如图所示的程序框图后, 输出的值为 5, 则 P 的取值范围是 ().



- A. $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$ B. $\left(\frac{5}{6}, \frac{9}{10}\right]$ C. $\left(\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]$ D. $\left(\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right]$

12. 过直线 $x+y=0$ 上一点 P 作圆 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 2$ 的两条切线 l_1, l_2 , A, B 为切点, 当直线 l_1, l_2 关于直线 $x+y=0$ 对称时, $\angle APB =$ ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, x+1)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 若满足 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 且方向相同, 则 $x =$ _____.

14. $(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____.

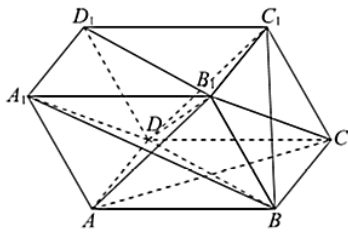
15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则, $a_n =$ _____. 若存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_n \leq \frac{n+1}{n} \cdot \lambda$ 成立,

则实数 λ 的最小值为_____.

16. 若直线 $kx - y - k + 2 = 0$ 与直线 $x + ky - 2k - 3 = 0$ 交于点 P , 则 OP 长度的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

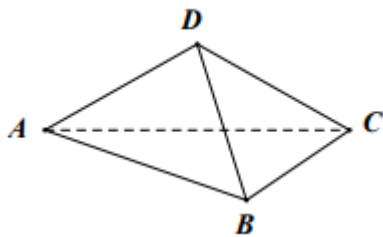
17. (12 分) 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $AB_1 = CB_1$.



(1) 证明: 平面 $BDD_1B_1 \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $\angle DAB = 60^\circ$, $\triangle DB_1B$ 是等边三角形, 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值.

18. (12 分) 如图, 在四面体 $DABC$ 中, $AB \perp BC$, $DA = DC = DB$.



(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ;

(2) 若 $AD = 2$, $AB = 2BC$, $\angle CAD = 30^\circ$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $b = \sqrt{7}$, _____. 求 BC 边上的高.

① $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}$, ② $\sin A = 3\sin C$, ③ $a - c = 2$, 这三个条件中任选一个, 补充在上面问题中并作答.

20. (12 分) 随着小汽车的普及, “驾驶证”已经成为现代人“必考”的证件之一. 若某人报名参加了驾驶证考试, 要顺利地拿到驾驶证, 他需要通过四个科目的考试, 其中科目二为场地考试. 在一次报名中, 每个学员有 5 次参加科目二考试的机会 (这 5 次考试机会中任何一次通过考试, 就算顺利通过, 即进入下一科目考试; 若 5 次都没有通过, 则需重新报名), 其中前 2 次参加科目二考试免费, 若前 2 次都没有通过, 则以后每次参加科目二考试都需要交 200 元的补考费. 某驾校对以往 2000 个学员第 1 次参加科目二考试进行了统计, 得到下表:

考试情况	男学员	女学员
第 1 次考科目二人数	1200	800
第 1 次通过科目二人数	960	600
第 1 次未通过科目二人数	240	200

若以上表得到的男、女学员第 1 次通过科目二考试的频率分别作为此驾校男、女学员每次通过科目二考试的概率, 且每人每次是否通过科目二考试相互独立. 现有一对夫妻同时在此驾校报名参加了驾驶证考试, 在本次报名中, 若这对夫妻参加科目二考试的原则为: 通过科目二考试或者用完所有机会为止.

- (1) 求这对夫妻在本次报名中参加科目二考试都不需要交补考费的概率；
- (2) 若这对夫妻前 2 次参加科目二考试均没有通过，记这对夫妻在本次报名中参加科目二考试产生的补考费用之和为 X 元，求 X 的分布列与数学期望.

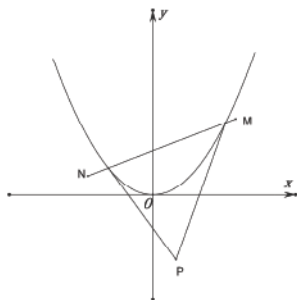
21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}a_n+\frac{1}{2^n}, n \in N^*$.

(I) 证明: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n \geq 2$ ($n \in N^*$);

(II) 证明: $a_{n+1}=\frac{1}{1 \cdot 2} a_1+\frac{1}{2 \cdot 3} a_2+\cdots+\frac{1}{n \cdot (n+1)} a_n+2-\frac{1}{2^n}(n \in N^*)$;

(III) 证明: $a_n < \frac{43}{42} \sqrt{e}-1, e$ 为自然常数.

22. (10 分) 已知直线 l 与抛物线 $C: x^2=4y$ 交于 M, N 两点.



- (1) 当点 M, N 的横坐标之和为 4 时，求直线 l 的斜率；
- (2) 已知点 $P(1, -2)$ ，直线 l 过点 $Q(0, 1)$ ，记直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，当 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 取最大值时，求直线 l 的方程.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由图利用三角形的面积公式可得正八边形中每个三角形的面积，再计算出圆面积的 $\frac{1}{8}$ ，两面积作差即可求解.

【详解】

由图，正八边形分割成8个等腰三角形，顶角为 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，

设三角形的腰为 a ，

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin \frac{135^\circ}{2}} = \frac{10}{\sin 45^\circ}$ ，解得 $a = 10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2}$ ，

所以三角形的面积为：

$$S = \frac{1}{2} \times \left(10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2} \right)^2 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos 135^\circ}{2} = 25(\sqrt{2} + 1),$$

所以每块八卦田的面积约为： $25(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{8} \times \pi \times 4^2 \approx 54.07$ 。

故选：B

【点睛】

本题考查了正弦定理解三角形、三角形的面积公式，需熟记定理与面积公式，属于基础题。

2、A

【解析】

画出“ $-1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$ ”所表示的平面区域,即可进行判断。

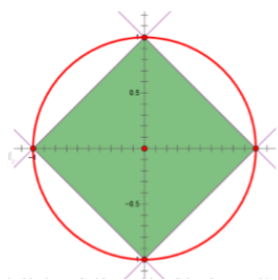
【详解】

如图，“ $-1 \leq x + y \leq 1$ 且 $-1 \leq x - y \leq 1$ ”表示的区域是如图所示的正方形，

记为集合P，“ $x^2 + y^2 \leq 1$ ”表示的区域是单位圆及其内部，记为集合Q，

显然P是Q的真子集,所以答案是充分非必要条件，

故选：A。



【点睛】

本题考查了不等式表示的平面区域问题,考查命题的充分条件和必要条件的判断,难度较易。

3、B

【解析】

由题意可将方程转化为 $\frac{\ln x}{x} - 2a = \frac{4ax}{\ln x} - 2$ ，令 $t(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ，进而将方程转化为 $[t(x)+2][t(x)-2a]=0$ ，即 $t(x)=-2$ 或 $t(x)=2a$ ，再利用 $t(x)$ 的单调性与最值即可得到结论。

【详解】

由题意知方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(0,1) \cup (1,+\infty)$ 上恰有三个不相等的实根，

$$\text{即 } \ln x - 2ax = \frac{4ax^2}{\ln x} - 2x, \quad \textcircled{1}.$$

因为 $x > 0$ ， $\textcircled{1}$ 式两边同除以 x ，得 $\frac{\ln x}{x} - 2a = \frac{4ax}{\ln x} - 2$ 。

所以方程 $\frac{\ln x}{x} - 2a - \frac{4ax}{\ln x} + 2 = 0$ 有三个不等的正实根。

$$\text{记 } t(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty), \text{ 则上述方程转化为 } t(x) - 2a - \frac{4a}{t(x)} + 2 = 0.$$

$$\text{即 } [t(x)+2][t(x)-2a]=0, \text{ 所以 } t(x)=-2 \text{ 或 } t(x)=2a.$$

因为 $t'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ，当 $x \in (0,1) \cup (1,e)$ 时， $t'(x) > 0$ ，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ ， $(1,e)$ 上单调递增，且 $x \rightarrow 0$ 时， $t(x) \rightarrow -\infty$ 。

当 $x \in (e,+\infty)$ 时， $t'(x) < 0$ ， $t(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $x \rightarrow +\infty$ 时， $t(x) \rightarrow 0$ 。

所以当 $x=e$ 时， $t(x)$ 取最大值 $\frac{1}{e}$ ，当 $t(x)=-2$ ，有一根。

所以 $t(x)=2a$ 恰有两个不相等的实根，所以 $0 < a < \frac{1}{2e}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查了函数与方程的关系，考查函数的单调性与最值，转化的数学思想，属于中档题。

4、A

【解析】

由复数的除法运算可整理得到 z ，由此得到对应的点的坐标，从而确定所处象限。

【详解】

$$\text{由 } z - iz = 2 + i \text{ 得： } z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,$$

$\therefore z$ 对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，位于第一象限.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数对应的点所在象限的求解，涉及到复数的除法运算，属于基础题.

5、D

【解析】

利用倍角公式求得 $\tan 2\alpha$ 的值，利用诱导公式求得 $\cos \beta$ 的值，利用同角三角函数关系式求得 $\sin \beta$ 的值，进而求得 $\tan \beta$ 的值，最后利用正切差角公式求得结果.

【详解】

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{1}{2}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}, \\ \cos(\pi + \beta) &= -\frac{4}{5} = -\cos \beta, \quad (\beta \in (0, \pi)), \\ \therefore \cos \beta &= \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \tan \beta = \frac{3}{4}, \\ \tan(2\alpha - \beta) &= \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{24},\end{aligned}$$

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关三角函数求值问题，涉及到的知识点有诱导公式，正切倍角公式，同角三角函数关系式，正切差角公式，属于基础题目.

6、A

【解析】

由余弦定理可得 $a^2 + b^2 - ab = 7$ ，结合 $2a = b + 1$ 可得 a, b ，再利用面积公式计算即可.

【详解】

由余弦定理，得 $7 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab$ ，由 $\begin{cases} 7 = a^2 + b^2 - ab \\ 2a = b + 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ ，

$$\text{所以, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查利用余弦定理解三角形，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

7、A

【解析】

试题分析：因为 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，所以 $n = 10$ ，

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (\sqrt{x})^{10-r} \cdot (\frac{2}{x^2})^r = 2^r C_{10}^r x^{5-\frac{5}{2}r}, \text{ 令 } 5 - \frac{5}{2}r = 0, \text{ 则 } r = 2, T_3 = 4C_{10}^2 = 180.$$

考点：1.二项式定理；2.组合数的计算.

8、B

【解析】

首先求得两曲线的交点坐标，据此可确定积分区间，然后利用定积分的几何意义求解面积值即可.

【详解】

联立方程： $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ 可得： $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$,

结合定积分的几何意义可知曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为：

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

本题选择 B 选项.

【点睛】

本题主要考查定积分的概念与计算，属于中等题.

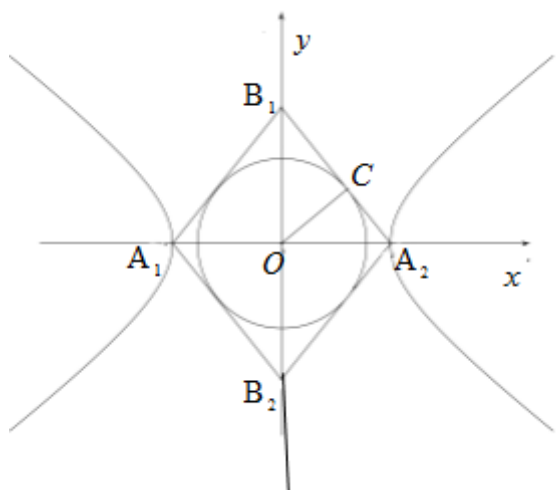
9、D

【解析】

根据题意画出几何关系，由四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积求得半径，结合四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积关系求得 c 与 ab 等量关系，再根据基本不等式求得 c 的取值范围，即可确定双曲线焦距的最小值.

【详解】

根据题意，画出几何关系如下图所示：



设四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆半径为 r ，双曲线半焦距为 c ，

$$\text{则 } |OA_2| = a, |OB_1| = b,$$

$$\text{所以 } |A_2B_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = c,$$

四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ，

$$\text{则 } 18\pi = \pi r^2, \text{ 解得 } |OC| = r = 3\sqrt{2},$$

$$\text{则 } S_{\text{四边形}A_1B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |B_1B_2| = 4 \times \frac{1}{2} \cdot |A_2B_1| \cdot |OC|,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4 \times \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3\sqrt{2}$$

$$\text{故由基本不等式可得 } c = \frac{ab}{3\sqrt{2}} \leq \frac{\frac{a^2 + b^2}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{c^2}{6\sqrt{2}}, \text{ 即 } c \geq 6\sqrt{2},$$

当且仅当 $a = b$ 时等号成立.

故焦距的最小值为 $12\sqrt{2}$.

故选：D

【点睛】

本题考查了双曲线的定义及其性质的简单应用，圆锥曲线与基本不等式综合应用，属于中档题.

10、D

【解析】

根据给出的统计图表，对选项进行逐一判断，即可得到正确答案.

【详解】

解：由题意知，该市老年低收入家庭共有 900 户，所占比例为 6%，

则该市总有低收入家庭 $900 \div 6\% = 15000$ （户），A 正确，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/206135022011010105>