

专题 52 定值问题（新高考专用）



目录

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| <b>【真题自测】</b> .....            | 2  |
| <b>【考点突破】</b> .....            | 9  |
| <b>【考点 1】</b> 长度或距离为定值 .....   | 9  |
| <b>【考点 2】</b> 斜率或其表达式为定值 ..... | 19 |
| <b>【考点 3】</b> 几何图形的面积为定值 ..... | 28 |
| <b>【分层检测】</b> .....            | 39 |
| <b>【基础篇】</b> .....             | 39 |
| <b>【能力篇】</b> .....             | 49 |
| <b>【培优篇】</b> .....             | 56 |



## 真题自测

### 一、解答题

1. (2024·全国·高考真题) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 点  $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在  $C$  上, 且  $MF \perp x$  轴.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $P(4, 0)$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点,  $N$  为线段  $FP$  的中点, 直线  $NB$  交直线  $MF$  于点  $Q$ , 证明:  $AQ \perp y$  轴.

2. (2023·全国·高考真题) 已知椭圆  $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , 点  $A(-2, 0)$  在  $C$  上.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $(-2, 3)$  的直线交  $C$  于  $P, Q$  两点, 直线  $AP, AQ$  与  $y$  轴的交点分别为  $M, N$ , 证明: 线段  $MN$  的中点为定点.

3. (2023·北京·高考真题) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $A, C$  分别是  $E$  的上、下顶点,  $B, D$  分别是  $E$  的左、右顶点,  $|AC| = 4$ .

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 设  $P$  为第一象限内  $E$  上的动点, 直线  $PD$  与直线  $BC$  交于点  $M$ , 直线  $PA$  与直线  $y = -2$  交于点  $N$ . 求证:  $MN \parallel CD$ .

4. (2022·全国·高考真题) 设抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $D(p, 0)$ , 过  $F$  的直线交  $C$  于  $M, N$  两点. 当直线  $MD$  垂直于  $x$  轴时,  $|MF| = 3$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 设直线  $MD, ND$  与  $C$  的另一个交点分别为  $A, B$ , 记直线  $MN, AB$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ . 当  $\alpha - \beta$  取得最大值时, 求直线  $AB$  的方程.

### 参考答案:

1. (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

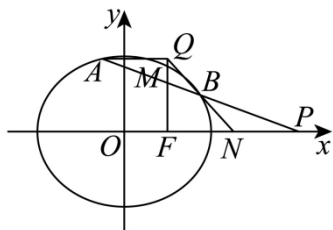
(2) 证明见解析

【分析】(1) 设  $F(c, 0)$ , 根据  $M$  的坐标及  $MF \perp x$  轴可求基本量, 故可求椭圆方程.

(2) 设  $AB: y = k(x-4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 联立直线方程和椭圆方程, 用  $A, B$  的坐标表示  $y_1 - y_Q$ , 结合韦达定理化简前者可得  $y_1 - y_Q = 0$ , 故可证  $AQ \perp y$  轴.

【详解】(1) 设  $F(c, 0)$ , 由题设有  $c = 1$  且  $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $\frac{a^2 - 1}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $a = 2$ , 故  $b = \sqrt{3}$ , 故椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 直线  $AB$  的斜率必定存在, 设  $AB: y = k(x-4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,



由  $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = k(x-4) \end{cases}$  可得  $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$ ,

故  $\Delta = 1024k^4 - 4(3 + 4k^2)(64k^2 - 12) > 0$ , 故  $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ ,

又  $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3 + 4k^2}$ ,  $x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2}$ ,

而  $N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ , 故直线  $BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ , 故  $y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5}$ ,

所以  $y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5} = \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5} = k \frac{2 \times \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3 + 4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{3 + 4k^2} = 0,$$

故  $y_1 = y_Q$ , 即  $AQ \perp y$  轴.

【点睛】方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

(1) 设直线方程, 设交点坐标为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ;

(2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于  $x$  (或  $y$ ) 的一元二次方程, 注意  $\Delta$  的判断;

(3) 列出韦达定理;

(4) 将所求问题或题中的关系转化为  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  (或  $y_1 + y_2$ 、 $y_1y_2$ ) 的形式;

(5) 代入韦达定理求解.

2. (1)  $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$

(2) 证明见详解

**【分析】**(1) 根据题意列式求解  $a, b, c$ , 进而可得结果;

(2) 设直线  $PQ$  的方程, 进而可求点  $M, N$  的坐标, 结合韦达定理验证  $\frac{y_M + y_N}{2}$  为定值即可.

**【详解】**(1) 由题意可得 
$$\begin{cases} b=2 \\ a^2=b^2+c^2 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$$

所以椭圆方程为  $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ .

(2) 由题意可知: 直线  $PQ$  的斜率存在, 设  $PQ: y = k(x+2)+3, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

联立方程 
$$\begin{cases} y = k(x+2)+3 \\ \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得: } (4k^2+9)x^2 + 8k(2k+3)x + 16(k^2+3k) = 0,$$

则  $\Delta = 64k^2(2k+3)^2 - 64(4k^2+9)(k^2+3k) = -1728k > 0$ , 解得  $k < 0$ ,

可得  $x_1 + x_2 = -\frac{8k(2k+3)}{4k^2+9}, x_1x_2 = \frac{16(k^2+3k)}{4k^2+9}$ ,

因为  $A(-2, 0)$ , 则直线  $AP: y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ ,

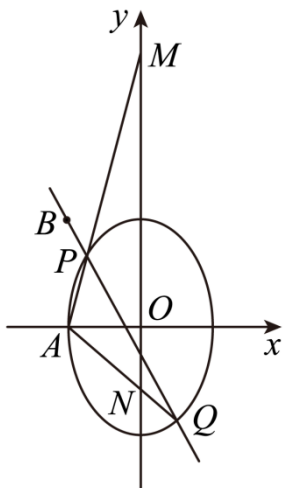
令  $x=0$ , 解得  $y = \frac{2y_1}{x_1+2}$ , 即  $M\left(0, \frac{2y_1}{x_1+2}\right)$ ,

同理可得  $N\left(0, \frac{2y_2}{x_2+2}\right)$ ,

则 
$$\frac{\frac{2y_1}{x_1+2} + \frac{2y_2}{x_2+2}}{2} = \frac{[k(x_1+2)+3]}{x_1+2} + \frac{[k(x_2+2)+3]}{x_2+2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[kx_1 + (2k+3)](x_2+2) + [kx_2 + (2k+3)](x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{2kx_1x_2 + (4k+3)(x_1+x_2) + 4(2k+3)}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \\
&= \frac{\frac{32k(k^2+3k)}{4k^2+9} - \frac{8k(4k+3)(2k+3)}{4k^2+9} + 4(2k+3)}{\frac{16(k^2+3k)}{4k^2+9} - \frac{16k(2k+3)}{4k^2+9} + 4} = \frac{108}{36} = 3,
\end{aligned}$$

所以线段  $MN$  的中点是定点  $(0,3)$ .



**【点睛】**方法点睛：求解定值问题的三个步骤

- (1) 由特例得出一个值，此值一般就是定值；
- (2) 证明定值，有时可直接证明定值，有时将问题转化为代数式，可证明该代数式与参数(某些变量)无关；也可令系数等于零，得出定值；
- (3) 得出结论.

3. (1)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 证明见解析

**【分析】**(1) 结合题意得到  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $2b=4$ ，再结合  $a^2 - c^2 = b^2$ ，解之即可；

(2) 依题意求得直线  $BC$ 、 $PD$  与  $PA$  的方程，从而求得点  $M, N$  的坐标，进而求得  $k_{MN}$ ，再根据题意求得  $k_{CD}$ ，得到  $k_{MN} = k_{CD}$ ，由此得解.

**【详解】**(1) 依题意，得  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，则  $c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ ，

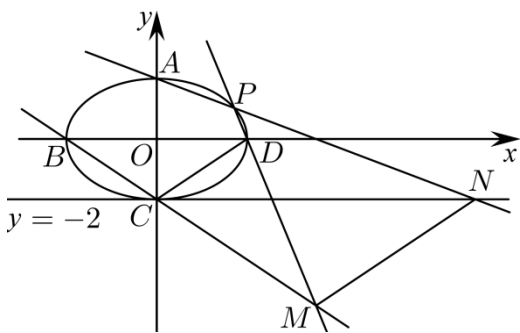
又  $A, C$  分别为椭圆上下顶点， $|AC|=4$ ，所以  $2b=4$ ，即  $b=2$ ，

所以  $a^2 - c^2 = b^2 = 4$ ，即  $a^2 - \frac{5}{9}a^2 = \frac{4}{9}a^2 = 4$ ，则  $a^2 = 9$ ，

所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) 因为椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，所以  $A(0,2), C(0,-2), B(-3,0), D(3,0)$ ，

因为  $P$  为第一象限  $E$  上的动点，设  $P(m,n)(0 < m < 3, 0 < n < 2)$ ，则  $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} = 1$ ，



易得  $k_{BC} = \frac{0+2}{-3-0} = -\frac{2}{3}$ ，则直线  $BC$  的方程为  $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ，

$k_{PD} = \frac{n-0}{m-3} = \frac{n}{m-3}$ ，则直线  $PD$  的方程为  $y = \frac{n}{m-3}(x-3)$ ，

联立  $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{n}{m-3}(x-3) \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = \frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6} \\ y = \frac{-12n}{3n+2m-6} \end{cases}$ ，即  $M\left(\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6}, \frac{-12n}{3n+2m-6}\right)$ ，

而  $k_{PA} = \frac{n-2}{m-0} = \frac{n-2}{m}$ ，则直线  $PA$  的方程为  $y = \frac{n-2}{m}x + 2$ ，

令  $y = -2$ ，则  $-2 = \frac{n-2}{m}x + 2$ ，解得  $x = \frac{-4m}{n-2}$ ，即  $N\left(\frac{-4m}{n-2}, -2\right)$ ，

又  $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} = 1$ ，则  $m^2 = 9 - \frac{9n^2}{4}$ ， $8m^2 = 72 - 18n^2$ ，

所以  $k_{MN} = \frac{\frac{-12n}{3n+2m-6} + 2}{\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6} - \frac{-4m}{n-2}} = \frac{(-6n+4m-12)(n-2)}{(9n-6m+18)(n-2) + 4m(3n+2m-6)}$   
 $= \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{9n^2 + 8m^2 + 6mn - 12m - 36} = \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{9n^2 + 72 - 18n^2 + 6mn - 12m - 36}$   
 $= \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{-9n^2 + 6mn - 12m + 36} = \frac{2(-3n^2 + 2mn - 4m + 12)}{3(-3n^2 + 2mn - 4m + 12)} = \frac{2}{3}$ ，

又  $k_{CD} = \frac{0+2}{3-0} = \frac{2}{3}$ ，即  $k_{MN} = k_{CD}$ ，

显然， $MN$  与  $CD$  不重合，所以  $MN \parallel CD$ 。

4. (1)  $y^2 = 4x$ ;

(2)  $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

【分析】(1) 由抛物线的定义可得  $|MF| = p + \frac{p}{2}$ ，即可得解；

(2) 法一：设点的坐标及直线  $MN: x = my + 1$ ，由韦达定理及斜率公式可得  $k_{MN} = 2k_{AB}$ ，再由差角的正切公式及基本不等式可得  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，设直线  $AB: x = \sqrt{2}y + n$ ，结合韦达定理可解。

【详解】(1) 抛物线的准线为  $x = -\frac{p}{2}$ ，当  $MD$  与  $x$  轴垂直时，点  $M$  的横坐标为  $p$ ，

此时  $|MF| = p + \frac{p}{2} = 3$ ，所以  $p = 2$ ，

所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ ；

(2) 【方法一】：【最优解】直线方程横截式

设  $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$ ，直线  $MN: x = my + 1$ ，

由  $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$  可得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ ， $\Delta > 0, y_1 y_2 = -4$ ，

由斜率公式可得  $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$ ， $k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}$ ，

直线  $MD: x = \frac{x_1 - 2}{y_1} \cdot y + 2$ ，代入抛物线方程可得  $y^2 - \frac{4(x_1 - 2)}{y_1} \cdot y - 8 = 0$ ，

$\Delta > 0, y_1 y_3 = -8$ ，所以  $y_3 = 2y_2$ ，同理可得  $y_4 = 2y_1$ ，

所以  $k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{4}{2(y_1 + y_2)} = \frac{k_{MN}}{2}$

又因为直线  $MN, AB$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ ，所以  $k_{AB} = \tan \beta = \frac{k_{MN}}{2} = \frac{\tan \alpha}{2}$ ，

若要使  $\alpha - \beta$  最大，则  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，设  $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$ ，则

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当  $\frac{1}{k} = 2k$  即  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时，等号成立，

所以当  $\alpha - \beta$  最大时,  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 设直线  $AB: x = \sqrt{2}y + n$ ,

代入抛物线方程可得  $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$ ,

$\Delta > 0, y_3y_4 = -4n = 4y_1y_2 = -16$ , 所以  $n = 4$ ,

所以直线  $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

### [方法二]: 直线方程点斜式

由题可知, 直线  $MN$  的斜率存在.

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$ , 直线  $MN: y = k(x-1)$

由  $\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$  得:  $k^2x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$ ,  $x_1x_2 = 1$ , 同理,  $y_1y_2 = -4$ .

直线  $MD: y = \frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ , 代入抛物线方程可得:  $x_1x_3 = 4$ , 同理,  $x_2x_4 = 4$ .

代入抛物线方程可得:  $y_1y_3 = -8$ , 所以  $y_3 = 2y_2$ , 同理可得  $y_4 = 2y_1$ ,

由斜率公式可得:  $k_{AB} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{2(y_2 - y_1)}{4\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)} = \frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}k_{MN}$ .

(下同方法一) 若要使  $\alpha - \beta$  最大, 则  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

设  $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$ , 则  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

当且仅当  $\frac{1}{k} = 2k$  即  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立,

所以当  $\alpha - \beta$  最大时,  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 设直线  $AB: x = \sqrt{2}y + n$ ,

代入抛物线方程可得  $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$ ,  $\Delta > 0, y_3y_4 = -4n = 4y_1y_2 = -16$ , 所以  $n = 4$ , 所以直线

$AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

### [方法三]: 三点共线

设  $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$ ,

设  $P(t, 0)$ , 若  $P, M, N$  三点共线, 由  $\overline{PM} = \left(\frac{y_1^2}{4} - t, y_1\right), \overline{PN} = \left(\frac{y_2^2}{4} - t, y_2\right)$

所以  $\left(\frac{y_1^2}{4}-t\right)y_2 = \left(\frac{y_2^2}{4}-t\right)y_1$ , 化简得  $y_1y_2 = -4t$ ,

反之, 若  $y_1y_2 = -4t$ , 可得  $MN$  过定点  $(t, 0)$

因此, 由  $M, N, F$  三点共线, 得  $y_1y_2 = -4$ ,

由  $M, D, A$  三点共线, 得  $y_1y_3 = -8$ ,

由  $N, D, B$  三点共线, 得  $y_2y_4 = -8$ ,

则  $y_3y_4 = 4y_1y_2 = -16$ ,  $AB$  过定点  $(4, 0)$

(下同方法一) 若要使  $\alpha - \beta$  最大, 则  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

设  $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$ , 则  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

当且仅当  $\frac{1}{k} = 2k$  即  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立,

所以当  $\alpha - \beta$  最大时,  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以直线  $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

【整体点评】(2) 法一: 利用直线方程横截式, 简化了联立方程的运算, 通过寻找直线  $MN, AB$  的斜率关系, 由基本不等式即可求出直线  $AB$  的斜率, 再根据韦达定理求出直线方程, 是该题的最优解, 也是通性通法;

法二: 常规设直线方程点斜式, 解题过程同解法一;

法三: 通过设点由三点共线寻找纵坐标关系, 快速找到直线  $AB$  过定点, 省去联立过程, 也不失为一种简化运算的好方法.



## 考点突破

### 【考点 1】长度或距离为定值

#### 一、解答题

1. (24-25 高三上·江西九江·开学考试) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 右焦点为  $F$ , 点  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  在  $C$  上.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 已知  $O$  为坐标原点, 点  $A$  在直线  $l: y = kx + m (k \neq 0)$  上, 若直线  $l$  与  $C$  相切, 且  $FA \perp l$ , 求  $|OA|$  的值.

2. (24-25 高三上·江西·开学考试) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  其左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 若

$|F_1F_2|=12$ , 点  $F_1$  到其渐近线的距离为  $4\sqrt{2}$ .

(1)求双曲线  $C$  的标准方程;

(2)设过点  $F_2$  的直线  $l$  与双曲线  $C$  的左、右两支分别交于  $A, B$  两点, 且  $|AF_1|=|BF_1|$ , 若  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等比数列, 则称该双曲线为“黄金双曲线”, 判断双曲线  $C$  是否为“黄金双曲线”, 并说明理由.

3. (24-25 高三上·青海西宁·开学考试) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 点  $P$  在椭圆  $E$  上运动, 且  $\triangle PF_1F_2$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ .

(1)求椭圆  $E$  的方程;

(2)设  $A, B$  分别是椭圆  $E$  的右顶点和上顶点, 不过原点的直线  $l$  与直线  $AB$  平行, 且与  $x$  轴,  $y$  轴分别交于点  $M, N$ , 与椭圆  $E$  相交于点  $C, D, O$  为坐标原点.

(i) 求  $\triangle OCM$  与  $\triangle ODN$  的面积之比;

(ii) 证明:  $|CM|^2 + |MD|^2$  为定值.

4. (24-25 高三上·山东德州·开学考试) 已知双曲线  $E$  焦点在  $x$  轴上, 离心率为  $\sqrt{17}$ , 且过点  $(\sqrt{2}, 4)$ , 直线  $l_1$  与双曲线  $E$  交于  $M, N$  两点,  $l_1$  的斜率存在且不为 0, 直线  $l_2$  与双曲线  $E$  交于  $P, Q$  两点.

(1)若  $MN$  的中点为  $H$ , 直线  $OH, MN$  的斜率分别为  $k_1, k_2, O$  为坐标原点, 求  $k_1 \cdot k_2$ ;

(2)若直线  $l_1$  与直线  $l_2$  的交点  $T$  在直线  $x = \frac{1}{2}$  上, 且直线  $l_1$  与直线  $l_2$  的斜率和为 0, 证明:  $\frac{|TP|}{|TM|} = \frac{|TN|}{|TQ|}$ .

5. (24-25 高三上·安徽·开学考试) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右顶点分别为  $A, B, R$  是椭圆  $C$  上异于  $A, B$  的动点, 满足  $k_{RA} \cdot k_{RB} = -\frac{1}{4}$ , 当  $R$  为上顶点时,  $\triangle ABR$  的面积为 8.

(1)求椭圆  $C$  的标准方程;

(2)过点  $M(-6, -2)$  的直线与椭圆  $C$  交于不同的两点  $D, E$  ( $D, E$  与  $A, B$  不重合), 直线  $AD, AE$  分别与直线  $x = -6$  交于  $P, Q$  两点, 求  $|MP| \cdot |MQ|$  的值.

6. (24-25 高三上·广西·阶段练习) 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 过点  $P(a, b)$  的直线  $l$  与椭圆  $E$  交于  $M, N$  两点. 当直线  $l$  过坐标原点  $O$  时,  $|MN| = 2\sqrt{5}$ .

(1)求椭圆  $E$  的方程.

(2)设  $A, B$  分别是椭圆  $E$  的右顶点和上顶点, 过点  $M$  作  $x$  轴的平行线分别与直线  $AB, NB$  交于  $C, D$  两

点. 试探究  $D, C, M$  三点的横坐标是否构成等差数列, 并说明理由.

**参考答案:**

1. (1)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2)  $|OA| = \sqrt{2}$

**【分析】**(1) 根据椭圆离心率定义和椭圆上的点以及  $a, b, c$  的关系式列出方程组, 解之即得;

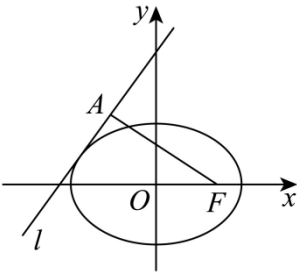
(2) 将直线与椭圆方程联立, 消元, 根据题意, 由  $\Delta = 0$  推得  $m^2 = 2k^2 + 1$ , 又由  $FA \perp l$ , 写出直线  $FA$  的方程, 与直线  $l$  联立, 求得点  $A$  坐标, 计算  $|OA|^2$ , 将前式代入化简即得.

**【详解】**(1) 设  $F(c, 0)$ , 依题意, 
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得  $a^2 = 2, b^2 = 1$ ,

故  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

(2)



如图, 依题意  $F(1, 0)$ , 联立 
$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$$
 消去  $y$ , 可得  $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$ ,

依题意, 需使  $\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 2) = 0$ , 整理得  $m^2 = 2k^2 + 1$  (\*).

因为  $FA \perp l$ , 则直线  $FA$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ , 则其方程为  $y = -\frac{1}{k}(x - 1)$ ,

联立 
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x - 1), \\ y = kx + m \end{cases}$$
, 解得 
$$\begin{cases} x = \frac{1 - km}{1 + k^2}, \\ y = \frac{k + m}{1 + k^2}, \end{cases}$$
 即  $A\left(\frac{1 - km}{1 + k^2}, \frac{k + m}{1 + k^2}\right)$

$$\text{故 } |OA|^2 = \frac{(1-km)^2 + (k+m)^2}{(1+k^2)^2} = \frac{k^2m^2 + k^2 + m^2 + 1}{(1+k^2)^2} = \frac{(k^2+1)(m^2+1)}{(1+k^2)^2} = \frac{m^2+1}{1+k^2},$$

将 (\*) 代入得,  $\frac{m^2+1}{1+k^2} = \frac{2k^2+2}{1+k^2} = 2$ , 故  $|OA| = \sqrt{2}$ .

2. (1)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$

(2) 是, 理由见详解

【分析】(1) 根据焦距可得  $c=6$ , 再根据点  $F_1$  到其渐近线的距离可得  $b=4\sqrt{2}$ , 即可得方程;

(2) 设  $AB: y=k(x-2)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 根据  $|AF_1| = |BF_1|$  结合韦达定理可得  $k^2 = \frac{4}{5}$ , 进而求

$|AB|, |AF_2| \cdot |BF_2|$ , 结合等比中项分析判断.

【详解】(1) 由题意可知:  $|F_1F_2| = 2c = 12$ , 即  $c=6$ ,

则  $F_1(-6, 0)$ , 其中一条渐近线为  $y = \frac{b}{a}x$ , 即  $bx - ay = 0$ ,

因为点  $F_1$  到其渐近线的距离为  $\frac{6b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b = 4\sqrt{2}$ , 则  $a^2 = c^2 - b^2 = 4$ ,

所以双曲线  $C$  的标准方程  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ .

(2) 双曲线  $C$  为“黄金双曲线”, 理由如下:

设  $P(x_0, y_0)$  为双曲线  $C$  的上一点, 则  $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{32} = 1$ , 即  $y_0^2 = 8x_0^2 - 32$ ,

可得  $|PF_1| = \sqrt{(x_0+6)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + 12x_0 + 36 + 8x_0^2 - 32} = \sqrt{9x_0^2 + 12x_0 + 4} = |3x_0 + 2|$ ,

若  $P$  为双曲线  $C$  的上左支一点, 则  $x_0 \leq -2$ , 则  $|PF_1| = -3x_0 - 2$ ,

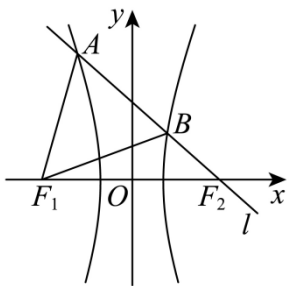
且  $|PF_2| - |PF_1| = 4$ , 可得  $|PF_2| = 4 + |PF_1| = 2 - 3x_0$ ;

若  $P$  为双曲线  $C$  的上右支一点, 则  $x_0 \geq 2$ , 则  $|PF_1| = 3x_0 + 2$ ,

且  $|PF_1| - |PF_2| = 4$ , 可得  $|PF_2| = |PF_1| - 4 = 3x_0 - 2$ ;

由题意可知:  $F_2(6, 0)$ , 渐近线方程为  $y = \pm 2\sqrt{2}x$ ,

则直线  $l$  的斜率存在,  $|k| < 2\sqrt{2}$ ,



设  $AB: y = k(x-2), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

联立方程  $\begin{cases} y = k(x-2) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1 \end{cases}$ , 消去  $y$  可得  $(k^2 - 8)x^2 - 12k^2x + 36k^2 + 32 = 0$ ,

则  $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{k^2 - 8}, x_1x_2 = \frac{36k^2 + 32}{k^2 - 8}$ ,

因为  $|AF_1| = |BF_1|$ , 则  $-3x_1 - 2 = 3x_2 + 2$ , 可得  $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$ ,

即  $\frac{12k^2}{k^2 - 8} = -\frac{4}{3}$ , 解得  $k^2 = \frac{4}{5}$ ,

此时  $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, x_1x_2 = -\frac{76}{9}$ ,

且  $|AF_2| = 2 - 3x_1, |BF_2| = 3x_2 - 2, |AB| = |AF_2| - |BF_2| = 4 - 3(x_1 + x_2) = 8$ ,

因为  $|AF_2| \cdot |BF_2| = (2 - 3x_1)(3x_2 - 2) = -9x_1x_2 + 6(x_1 + x_2) - 4 = -9\left(-\frac{76}{9}\right) + 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 4 = 64$ ,

即  $|AF_2| \cdot |BF_2| = |AB|^2$ , 则  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等比数列,

所以该双曲线为“黄金双曲线”.

**【点睛】**方法点睛: 求解定值问题的三个步骤

- (1) 由特例得出一个值, 此值一般就是定值;
- (2) 证明定值, 有时可直接证明定值, 有时将问题转化为代数式, 可证明该代数式与参数(某些变量)无关; 也可令系数等于零, 得出定值.

3. (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) (i) 1; (ii) 证明见解析

**【分析】**(1) 根据离心率及三角形的面积列出方程组求解即可;

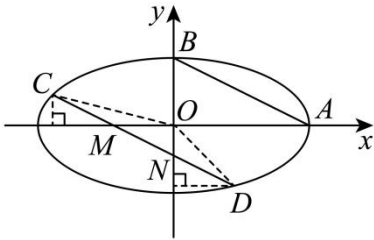
(2) 设出直线方程, 直线与椭圆交点坐标, 联立直线方程与椭圆方程, 可得出根与系数的关系, (i) 表示出三角形的面积, 由根与系数的关系化简可得解, (ii) 直接由两点间的距离公式及根与系数的关系化简

即可得证.

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \times 2c \times b = \sqrt{3}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 如图所示:



由椭圆方程知,  $A(2,0), B(0,1)$ , 故  $k_{AB} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ ,

设直线  $l$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x + m (m \neq 0)$ , 则  $M(2m,0), N(0,m)$ ,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0,$$

$\Delta = 4m^2 - 8(m^2 - 1) = 8 - 4m^2 > 0$ , 得  $m^2 < 2$  且  $m \neq 0$ ,

设  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 2m^2 - 2$ .

$$(i) S_{\triangle OCM} = \frac{1}{2} |2m| |y_1|, S_{\triangle ODN} = \frac{1}{2} |m| |x_2|,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OCM}}{S_{\triangle ODN}} = \frac{|2y_1|}{|x_2|} = \frac{|2m - x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_2|}{|x_2|} = 1,$$

$\therefore \triangle OCM$  与  $\triangle ODN$  的面积之比为 1.

$$\begin{aligned} (ii) \text{ 证明: } |CM|^2 + |MD|^2 &= (x_1 - 2m)^2 + y_1^2 + (x_2 - 2m)^2 + y_2^2 \\ &= x_1^2 - 4mx_1 + 4m^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + m\right)^2 + x_2^2 - 4mx_2 + 4m^2 + \left(-\frac{1}{2}x_2 + m\right)^2 \\ &= \frac{5}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{5}{2}x_1 \cdot x_2 - 5m(x_1 + x_2) + 10m^2 \end{aligned}$$

$$= 5m^2 - \frac{5}{2}(2m^2 - 2) - 10m^2 + 10m^2 = 5.$$

综上,  $|CM|^2 + |MD|^2 = 5$ .

#### 4. (1)16

(2)证明见解析

【分析】(1) 根据离心率和 $(\sqrt{2}, 4)$ , 得到方程组, 求出双曲线方程, 利用点差法进行求解 $k_1 \cdot k_2 = 16$ ;

(2) 设 $T\left(\frac{1}{2}, n\right)$ , 设直线 $MN$ 的方程为 $y - n = k\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 联立双曲线方程, 得到两根之

和, 两根之积, 利用弦长公式得到 $|TM|, |TN|$ , 得到 $|TM| \cdot |TN| = \frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2-16|}$ , 由 $k_{PQ} + k_{MN} = 0$ , 所以 $k_{PQ} = -k$ ,

从而 $|TP| \cdot |TQ| = \frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2-16|}$ , 证明出结论.

【详解】(1) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{c}{a} = \sqrt{17} \\ \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1, \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases},$$

所以 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ ,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), H(x_0, y_0)$

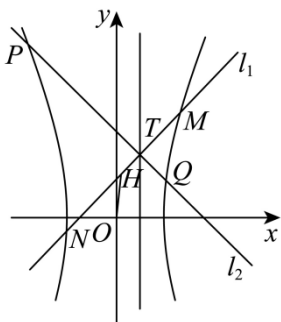
因为 $M, N$ 两点都在双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ 上,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{16} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{16} = 1 \end{cases},$$

两式作差得 $x_1^2 - x_2^2 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{16}$ ,

整理得 $x_0(x_1 - x_2) = \frac{y_0(y_1 - y_2)}{16}$ ,

则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0(y_1 - y_2)}{x_0(x_1 - x_2)} = 16$ ;



(2) 设  $T\left(\frac{1}{2}, n\right)$ , 设直线  $MN$  的方程为  $y - n = k\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

联立 
$$\begin{cases} y - n = k\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases},$$

化简得  $(16 - k^2)x^2 + (k^2 - 2kn)x - \frac{1}{4}k^2 - n^2 + kn - 16 = 0$ ,

$$\Delta = 16(4n^2 - 4kn - 3k^2 + 64),$$

则  $x_1 + x_2 = -\frac{k^2 - 2kn}{16 - k^2}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-\frac{1}{4}k^2 - n^2 + kn - 16}{16 - k^2}$ ,

故  $|TM| = \sqrt{1+k^2} \left| x_1 - \frac{1}{2} \right|$ ,  $|TN| = \sqrt{1+k^2} \left| x_2 - \frac{1}{2} \right|$ ,

$$\begin{aligned} |TM| \cdot |TN| &= (1+k^2) \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| = (1+k^2) \left| x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \right| \\ &= (1+k^2) \left| \frac{-\frac{1}{4}k^2 - n^2 + kn - 16}{16 - k^2} + \frac{1}{2} \frac{k^2 - 2kn}{16 - k^2} + \frac{1}{4} \right| = \frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2 - 16|}, \end{aligned}$$

由  $k_{PQ} + k_{MN} = 0$ , 所以  $k_{PQ} = -k$ ,

从而  $|TP| \cdot |TQ| = \frac{(1+(-k)^2)(12+n^2)}{|(-k)^2 - 16|} = \frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2 - 16|}$ ,

$\therefore |TM| \cdot |TN| = |TP| \cdot |TQ|$ , 即  $\frac{|TP|}{|TM|} = \frac{|TN|}{|TQ|}$ .

【点睛】定值问题常见方法：(1) 从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

(2) 直接推理计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

5. (1)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;

(2) 9.

【分析】(1) 根据给定条件，取椭圆上顶点列式求出  $a, b$  即可得解.

(2) 设出直线  $DE$  的方程，与椭圆方程联立，借助韦达定理计算即得.

【详解】(1) 不妨设椭圆上顶点  $R_0(0, b)$ ，此时  $k_{R_0A} \cdot k_{R_0B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{-a} = \frac{b^2}{-a^2} = -\frac{1}{4}$ ，

因为  $\triangle ABR_0$  的面积为 8，所以  $\frac{1}{2} \times 2ab = 8$ ，联立解得  $a = 4, b = 2$ ，

所以椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) 依题意，直线  $DE$  的斜率存在，设斜率为  $k$ ，则直线  $DE$  的方程为  $y = k(x+6) - 2$ ，

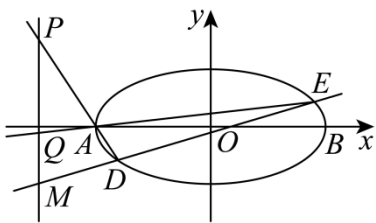
$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+6) - 2 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (4k^2 + 1)x^2 + (48k^2 - 16k)x + 144k^2 - 96k = 0,$$

$$\text{设 } D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-48k^2 + 16k}{4k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{144k^2 - 96k}{4k^2 + 1},$$

$$\text{直线 } AD \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 4}(x + 4), \text{ 令 } x = -6, \text{ 得点 } P \text{ 的纵坐标 } y_P = \frac{-2y_1}{x_1 + 4},$$

$$\text{则 } |MP| = \left| -2 + \frac{2y_1}{x_1 + 4} \right| = \left| \frac{(2k-2)(x_1+6)}{x_1+4} \right|, \text{ 同理得 } |MQ| = \left| \frac{(2k-2)(x_2+6)}{x_2+4} \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |MP| \cdot |MQ| &= \left| \frac{(2k-2)^2(x_1+6)(x_2+6)}{(x_1+4)(x_2+4)} \right| = (2k-2)^2 \cdot \left| \frac{x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2) + 36}{x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16} \right| \\ &= (2k-2)^2 \cdot \left| \frac{144k^2 - 96k + 6(-48k^2 + 16k) + 36(4k^2 + 1)}{144k^2 - 96k + 4(-48k^2 + 16k) + 16(4k^2 + 1)} \right| = (2k-2)^2 \cdot \left| \frac{36}{4(2k-2)^2} \right| = 9. \end{aligned}$$



6. (1)  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2)  $D, C, M$  三点的横坐标构成等差数列，证明见解析

【分析】(1) 由题意，得直线  $l$  的方程，根据直线  $l$  与椭圆相交弦长  $|MN|$ ，求出  $M$  的坐标，从而由离心率与  $M$  的坐标列出等式求出  $a$  和  $b$  的值，进而可得椭圆的方程；

(2) 设出直线  $MN$  的方程，将直线  $MN$  的方程与椭圆方程联立，将问题转化成求证  $x_1 + x_D = 2x_C$ ，按部就班

求解即可.

【详解】(1) 由于离心率  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 所以  $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ ,

当过点  $P(a, b)$  的直线  $l$  过坐标原点  $O$  时, 直线斜率为  $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ ,

则此时直线  $l$  的方程为  $y = \frac{1}{3}x$ ,

设直线  $l$  与椭圆  $E$  交点  $M(x_0, y_0)$ , 不妨取  $x_0 > 0$ , 则  $N(-x_0, -y_0)$ , 且  $y_0 = \frac{1}{3}x_0$  ①,

因为  $|MN| = 2\sqrt{5}$ , 所以  $x_0^2 + y_0^2 = 5$  ②,

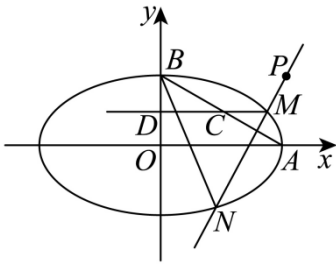
由①②可得  $x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,

所以可得  $\begin{cases} \frac{9}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$ ,

故椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2)  $D, C, M$  三点的横坐标构成等差数列, 理由如下:

不妨设直线  $MN$  的方程为  $x = my + n$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  ( $y_1 \neq 1, y_2 \neq 1$ ),



因为直线  $MN$  经过点  $P(3, 1)$ , 所以  $m + n = 3$ ,

联立  $\begin{cases} x = my + n \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$ , 消去  $x$  并整理得  $(m^2 + 9)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0$ ,

由韦达定理得  $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 9}$ ,  $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 9}{m^2 + 9}$ ,

所以  $\frac{x_1}{y_1 - 1} + \frac{x_2}{y_2 - 1} = \frac{x_1(y_2 - 1) + x_2(y_1 - 1)}{(y_1 - 1)(y_2 - 1)} = \frac{2my_1 y_2 + (n - m)(y_1 + y_2) - 2n}{y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1} = \frac{-18(m + n)}{(m + n)^2} = -6$ ,

因为  $B, D, N$  三点共线,

所以  $\frac{x_2}{y_2 - 1} = \frac{x_D}{y_1 - 1}$ , 而  $k_{AB} = \frac{y_1 - 1}{x_C} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 1}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$ ,

即  $\frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_D}{y_1-1} = -6 = \frac{2}{k_{AB}} = 2 \cdot \frac{x_C}{y_1-1}$ , 则  $x_1 + x_D = 2x_C$ ,

故  $D, C, M$  三点的横坐标成等差数列.

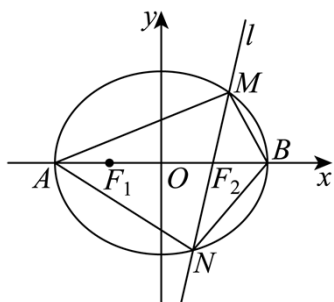
### 反思提升:

探求圆锥曲线中的定线段的长的问题, 一般用直接求解法, 即先利用弦长公式把要探求的线段表示出来, 然后利用题中的条件(如直线与曲线相切等)得到弦长表达式中的相关量之间的关系式, 把这个关系式代入弦长表达式中, 化简可得弦长为定值.

### 【考点 2】斜率或其表达式为定值

#### 一、解答题

1. (24-25 高三上·北京·开学考试) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 左、右顶点分别为  $A, B$ , 左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 过右焦点  $F_2$  的直线  $l$  交椭圆于点  $M, N$ , 且  $\triangle F_1MN$  的周长为 16.



(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

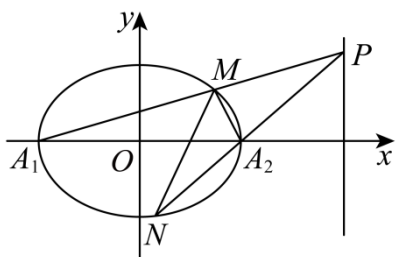
(2) 记直线  $AM, BN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明:  $\frac{k_1}{k_2}$  为定值.

2. (24-25 高三上·陕西·开学考试) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 左顶点为  $E$ , 虚轴的上端点为  $P$ , 且  $|PF| = 3, |PE| = \sqrt{5}$ .

(1) 求双曲线  $C$  的标准方程;

(2) 设  $M, N$  是双曲线  $C$  上不同的两点,  $Q$  是线段  $MN$  的中点,  $O$  是原点, 直线  $MN, OQ$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明:  $k_1 \cdot k_2$  为定值.

3. (24-25 高三上·辽宁鞍山·开学考试) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 右焦点为  $F(2, 0)$  且离心率为  $\frac{2}{3}$ , 直线  $l: x = 6$ , 椭圆  $C$  的左右顶点分别为  $A_1, A_2, P$  为  $l$  上任意一点, 且不在  $x$  轴上,  $PA_1$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $M, PA_2$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $N$ .



(1) 直线  $MA_1$  和直线  $MA_2$  的斜率分别记为  $k_{MA_1}, k_{MA_2}$ , 求证:  $k_{MA_1} \cdot k_{MA_2}$  为定值;

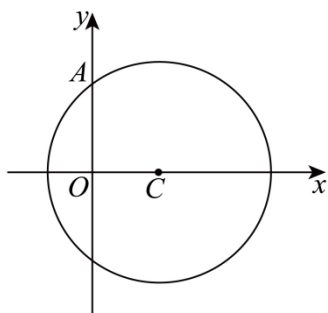
(2) 求证: 直线  $MN$  过定点.

4. (23-24 高二上·云南昆明·阶段练习) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$ , 左、右顶点分别为  $M, N$ , 且经过点  $P\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 动点  $A$  在圆  $x^2 + y^2 = a^2$  上, 动点  $B$  在双曲线  $C$  上, 设直线  $MA, MB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $N, A, B$  三点共线, 试探索  $k_1, k_2$  之间的关系.

5. (2024 高二上·江苏·专题练习) 已知圆  $C$  的圆心坐标为  $C(3, 0)$ , 且该圆经过点  $A(0, 4)$ .



(1) 求圆  $C$  的标准方程;

(2) 直线  $m$  交圆  $C$  于  $M, N$  两点, 若直线  $AM, AN$  的斜率之和为 0, 求证: 直线  $m$  的斜率是定值, 并求出该定值.

6. (2024·广东佛山·模拟预测) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{2}$ , 右焦点到双曲线  $C$  的一条渐近线的距离为 1, 两动点  $A, B$  在双曲线  $C$  上, 线段  $AB$  的中点为  $M(2m, m) (m \neq 0)$ .

(1) 证明: 直线  $AB$  的斜率  $k$  为定值;

(2)  $O$  为坐标原点, 若  $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{2}{3}$ , 求直线  $AB$  的方程.

**参考答案:**

1. (1)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(2)  $\frac{1}{3}$

【分析】(1) 由已知条件结合椭圆定义、离心率公式，确定 $a, b, c$ 的值，得出椭圆的标准方程.

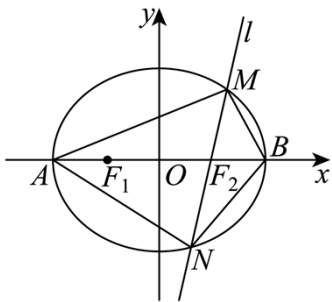
(2) 设直线 $l$ 的方程为： $x = my + 2$ ，与椭圆方程联立，消去 $x$ 得到关于 $y$ 的一元二次方程，由韦达定理得到 $y_1 + y_2$ ， $y_1 y_2$ ，再把 $\frac{k_1}{k_2}$ 用 $y_1 + y_2$ ， $y_1 y_2$ 表示出来，化简即可得解.

【详解】(1) 由 $\triangle F_1 M N$ 的周长为16，及椭圆的定义，可知： $4a = 16$ ，即 $a = 4$ ，

又离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 所以 $c = 2$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12.$$

所以椭圆 $C$ 的方程为： $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .



(2) 依题意，直线 $l$ 与 $x$ 轴不重合，

设 $l$ 的方程为： $x = my + 2$  .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ x = my + 2 \end{cases} \text{得: } (3m^2 + 4)y^2 + 12my - 36 = 0,$$

因为 $F_2$ 在椭圆内，所以 $\Delta > 0$ ，

即 $(12m)^2 + 4(3m^2 + 4) \times 36 > 0$ ，易知该不等式恒成立，

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{-12m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-36}{3m^2 + 4}$  .

又 $A(-4, 0), B(4, 0)$ ，则

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 4}}{\frac{y_2}{x_2 - 4}} = \frac{y_1(x_2 - 4)}{y_2(x_1 + 4)} = \frac{y_1(my_2 - 2)}{y_2(my_1 + 6)} = \frac{my_1 y_2 - 2y_1}{my_1 y_2 + 6y_2}$$

注意到  $\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{-12m}{-36} = \frac{m}{3}$ , 即:  $my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2)$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{my_1 y_2 - 2y_1}{my_1 y_2 + 6y_2} = \frac{3(y_1 + y_2) - 2y_1}{3(y_1 + y_2) + 6y_2} = \frac{y_1 + 3y_2}{3y_1 + 9y_2} = \frac{1}{3}.$$

**【点睛】**方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于  $x$  (或  $y$ ) 的一元二次方程, 必要时计算  $\Delta$ ;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为  $x_1 + x_2$ 、 $x_1 x_2$  (或  $y_1 + y_2$ 、 $y_1 y_2$ ) 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

2. (1)  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 证明见解析

**【分析】**(1) 设双曲线  $C$  的半焦距为  $c$ , 利用双曲线的定义结合勾股定理计算即可;

(2) 设  $M$ 、 $N$  的坐标, 利用中点坐标公式表示  $Q$ , 再利用点差法计算即可.

**【详解】**(1) 不妨设双曲线  $C$  的半焦距为  $c(c > 0)$ ,

$$\because |PF| = 3, |PE| = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sqrt{b^2 + c^2} = 3, \sqrt{b^2 + a^2} = c = \sqrt{5},$$

解得  $b = 2, c = \sqrt{5}$ ,

则  $a^2 = c^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$ ,

故双曲线  $C$  的标准方程为  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ ;

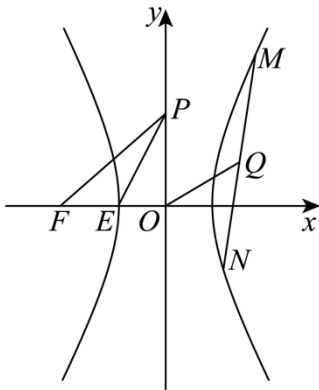
(2) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), x_1 \neq x_2, x_1 + x_2 \neq 0$ , 则  $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ,

$$\because M, N \text{ 为双曲线 } C \text{ 上的两点}, \therefore \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1, \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1, \end{cases}$$

两式相减得  $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{4}$ , 整理得  $\frac{4(x_1 + x_2)}{y_1 + y_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ,

$$\text{则 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = 4,$$

故  $k_1 \cdot k_2$  为定值，定值为 4.



3. (1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 根据离心率列式求  $a, b$ ，即可得椭圆方程，结合斜率公式分析证明；

(2) 解法一：设  $MN: x = my + t$ ，联立方程可得韦达定理，根据斜率关系列式求得  $t = \frac{3}{2}$ ，即可得结果；解

法二：设  $P(6, y_P)$ ，联立方程求  $M, N$  坐标，进而根据直线方程分析定点.

$$\text{【详解】(1) 由题意 } \begin{cases} c = 2 \\ \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{5} \end{cases},$$

所以椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ，且  $A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$

设  $M(x_1, y_1)$ ，则  $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{5} = 1$ ，即  $y_1^2 = 5 - \frac{5}{9}x_1^2$ ，

$$\text{可得 } k_{MA_1} \cdot k_{MA_2} = \frac{y_1}{x_1 + 3} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 3} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 9} = \frac{5 - \frac{5}{9}x_1^2}{x_1^2 - 9} = -\frac{5}{9},$$

所以  $k_{MA_1} \cdot k_{MA_2}$  为定值  $-\frac{5}{9}$ .

(2) 解法一：设  $P(6, y_P)$ ，则  $k_{A_1P} = k_{MA_1} = \frac{y_P}{9}, k_{A_2P} = k_{A_2N} = \frac{y_P}{3}, k_{A_2N} = 3k_{MA_1}$ ，

$$\text{可得 } k_{A_2M} \cdot k_{A_2N} = k_{A_2M} \cdot 3k_{A_1M} = -\frac{5}{3},$$

设直线  $MN: x = my + t, t \neq \pm 3$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = my + t \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 可得 } (5m^2 + 9)y^2 + 10mty + 5t^2 - 45 = 0,$$

则  $\Delta = 100m^2t^2 - 4(5m^2 + 9)(5t^2 - 45) > 0$ , 解得  $5m^2 + 9 > t^2$ ,

$$\text{且 } y_1 + y_2 = \frac{-10mt}{5m^2 + 9}, y_1y_2 = \frac{5t^2 - 45}{5m^2 + 9},$$

$$\text{则 } k_{A_2M} \cdot k_{A_2N} = \frac{y_1}{x_1 - 3} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 3} = \frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2 + m(t-3)(y_1 + y_2) + (t-3)^2} = -\frac{5}{3},$$

整理可得  $(5m^2 + 3)y_1y_2 + 5m(t-3)(y_1 + y_2) + 5(t-3)^2 = 0$ ,

$$\text{则 } (5m^2 + 3)\frac{5t^2 - 45}{5m^2 + 9} + 5m(t-3)\frac{-10mt}{5m^2 + 9} + 5(t-3)^2 = 0,$$

因为  $t \neq \pm 3$ , 则  $(5m^2 + 3)\frac{t+3}{5m^2 + 9} + \frac{-10m^2t}{5m^2 + 9} + t - 3 = 0$ , 解得  $t = \frac{3}{2}$ ,

所以直线  $MN: x = mt + \frac{3}{2}$  过定点  $(\frac{3}{2}, 0)$

解法二: 设  $P(6, y_p)$ , 则  $k_{A_1P} = k_{MA_1} = \frac{y_p}{9}, k_{A_2P} = k_{A_2N} = \frac{y_p}{3}, k_{A_2N} = 3k_{MA_1}$ ,

直线  $A_1P: y = \frac{y_p}{9}(x+3)$ , 可知  $A_1P$  与椭圆必相交,

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = \frac{y_p}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 可得 } (45 + y_p^2)x^2 + 16y_p^2x + 9y_p^2 - 405 = 0,$$

$$\text{则 } -3x_M = \frac{9y_p^2 - 405}{45 + y_p^2}, \text{解得 } x_M = \frac{-3y_p^2 + 135}{45 + y_p^2}, y_M = \frac{30y_p}{45 + y_p^2},$$

$$\text{同理 } x_N = \frac{3y_p^2 - 15}{5 + y_p^2}, y_N = \frac{-10y_p}{5 + y_p^2},$$

直线  $MN$  的斜率存在时,  $k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{20y_p(y_p^2 + 15)}{-3y_p^4 + 675} = \frac{20y_p}{-3(y_p^2 - 15)}$ ,

$$\text{则 } MN: y + \frac{10y_p}{5 + y_p^2} = \frac{20y_p}{-3(y_p^2 - 15)} \left( x - \frac{3y_p^2 - 15}{5 + y_p^2} \right),$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{3y_p^2 - 15}{5 + y_p^2} - \frac{3(y_p^2 - 15)}{2(5 + y_p^2)} = \frac{3y_p^2 + 15}{2(5 + y_p^2)} = \frac{3}{2};$$

当  $MN$  的斜率不存在时, 则  $\frac{-3y_p^2 + 135}{45 + y_p^2} = \frac{3y_p^2 - 15}{5 + y_p^2}$ , 解得  $y_p^2 = 15, x_M = x_N = \frac{3}{2}$ ;

综上所述：直线  $MN$  过定点  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

**【点睛】**方法点睛：1. 过定点问题的两大类型及解法

(1) 动直线  $l$  过定点问题. 解法：设动直线方程（斜率存在）为  $y = kx + t$  由题设条件将  $t$  用  $k$  表示为  $t = mk + n$ ，得  $y = k(x + m) + n$ ，故动直线过定点  $(-m, n)$ ；

(2) 动曲线  $C$  过定点问题. 解法：引入参变量建立曲线  $C$  的方程，再根据其参变量恒成立，令其系数等于零，得出定点.

2. 求解定值问题的三个步骤

(1) 由特例得出一个值，此值一般就是定值；

(2) 证明定值，有时可直接证明定值，有时将问题转化为代数式，可证明该代数式与参数（某些变量）无关；也可令系数等于零，得出定值；

(3) 得出结论.

4. (1)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(2)  $k_1 = -4k_2$

**【分析】**(1) 借助双曲线定义计算即可得；

(2) 设  $B(x_0, y_0)$ ，则有  $\frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1$ ，即可得  $k_2 \cdot k_{MB}$ ，结合  $MA \perp NA$  得到  $k_1 \cdot k_{MA} = -1$ ，即可得解.

**【详解】**(1) 由题意知， $c = \sqrt{5}$ ，由双曲线定义得  $2a = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{5})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = 4$ ，

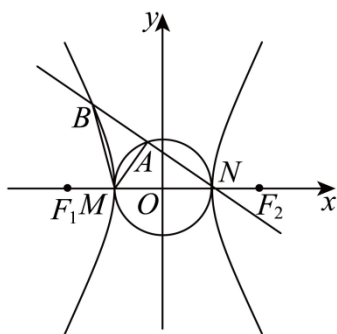
所以  $a = 2, b^2 = 1$ ，所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ .

(2) 设点  $B(x_0, y_0)$ ，则  $\frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1$ ，即  $x_0^2 - 4 = 4y_0^2$ ，

由  $MA \perp NA$ ，则  $k_{NA} \cdot k_{MA} = k_{NA} \cdot k_1 = -1$  ①，

又  $k_2 \cdot k_{NB} = \frac{y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4} = \frac{y_0^2}{4y_0^2} = \frac{1}{4}$  ②，

因为  $N, A, B$  三点共线，所以  $k_{NA} = k_{NB}$ ，由 ①  $\div$  ② 得  $\frac{k_1}{k_2} = -4$ ，即  $k_1 = -4k_2$ .



5. (1)  $(x-3)^2 + y^2 = 25$ ;

(2) 证明见解析,  $-\frac{3}{4}$ .

【分析】(1) 根据给定条件, 求出圆  $C$  的半径即可作答.

(2) 设出直线  $AM$ ,  $AN$  的方程, 与圆  $C$  的方程联立, 求出点  $M$ ,  $N$  的坐标, 再用斜率坐标公式计算作答.

【详解】(1) 依题意, 圆  $C$  的半径  $|CA| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

所以圆  $C$  的标准方程是:  $(x-3)^2 + y^2 = 25$ .

(2) 设直线  $AM$  方程为:  $y = rx + 4$ , 由  $\begin{cases} y = rx + 4 \\ (x-3)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$  消去  $y$  并整理得:  $(r^2 + 1)x^2 + 2(4r - 3)x = 0$ ,

则有点  $M(\frac{6-8r}{r^2+1}, \frac{-4r^2+6r+4}{r^2+1})$ , 而直线  $AN$ :  $y = -rx + 4$ , 同理  $N(\frac{6+8r}{r^2+1}, \frac{-4r^2-6r+4}{r^2+1})$ ,

于是得直线  $MN$  的斜率  $k_{MN} = \frac{\frac{-4r^2+6r+4}{r^2+1} - \frac{-4r^2-6r+4}{r^2+1}}{\frac{6-8r}{r^2+1} - \frac{6+8r}{r^2+1}} = -\frac{3}{4}$ ,

所以直线  $m$  的斜率是定值, 该定值为  $-\frac{3}{4}$ .

6. (1) 证明见解析

(2)  $y = 2x \pm 2$

【分析】(1) 由题意可得  $a, b, c$  的关系, 求解即可.

(2) 设  $y = 2x + t$ , 求得弦长  $|AB|$  与原点到直线  $AB$  的距离, 由面积可求直线  $AB$  的方程.

【详解】(1) 由已知可得 
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \sqrt{2} \\ \frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \\ a^2+b^2 = c^2 \end{cases}$$
, 解得  $a=b=1, c=\sqrt{2}$ ,

所以双曲线方程为  $x^2 - y^2 = 1$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

所以  $\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = 1 \\ x_2^2 - y_2^2 = 1 \end{cases}$ , 两式相减, 可得  $(x_1+x_2)(x_1-x_2) - (y_1+y_2)(y_1-y_2) = 0$ ,

又线段  $AB$  的中点为  $M(2m, m)(m \neq 0)$ , 所以  $x_1+x_2 = 4m, y_1+y_2 = 2m$ ,

所以  $4m(x_1-x_2) - 2m(y_1-y_2) = 0$ , 解得  $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 2$ ,

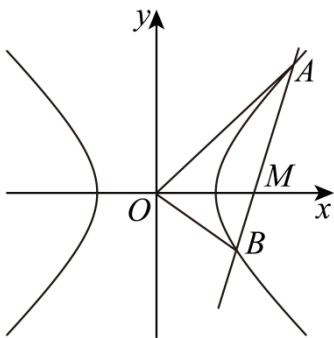
所以直线  $AB$  的斜率  $k$  为定值:

(2) 由 (1) 设直线  $AB$  的方程为  $y = 2x + t$ ,

由  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = 2x + t \end{cases}$ , 所以  $x^2 - (2x+t)^2 = 1$ , 整理可得  $3x^2 + 4tx + t^2 + 1 = 0$ ,

所以  $\Delta = 16t^2 - 12t^2 - 12 > 0$ , 解得  $t < -\sqrt{3}$  或  $t > \sqrt{3}$ ,

所以  $x_1+x_2 = -\frac{4t}{3}, x_1x_2 = \frac{t^2+1}{3}$ ,



所以  $|AB| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{[(-\frac{4t}{3})^2 - 4(\frac{t^2+1}{3})]} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{4t^2-12}{9}}$ ,

又原点到直线  $AB$  的距离为  $d = \frac{|t|}{\sqrt{5}}$ ,

所以  $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{4t^2-12}{9}} \times \frac{|t|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$ ,

化简可得  $|t|\sqrt{4t^2-12} = 4$ , 解得  $t = \pm 2$ ,

所以直线  $AB$  的方程  $y = 2x \pm 2$ .

反思提升:

第一步 求圆锥曲线的方程

第二步 特殊情况分类讨论

第三步 联立直线和圆锥曲线的方程

第四步 应用根与系数的关系用参数表示点的坐标

第五步 根据相关条件计算推证

第六步 明确结论

**【考点3】几何图形的面积为定值**

一、解答题

1. (2024 高二上·江苏·专题练习) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 右焦点为  $F$ , 连接  $BF$  并延长交椭圆  $C$  于点椭圆  $P$ .

(1) 若  $P\left(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$ ,  $|BP| = \frac{16}{5}$ , 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $AB$  与直线  $AP$  的斜率之比是  $-2$ , 证明:  $\frac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle APF}}$  为定值, 并求出定值.

2. (2024·江苏苏州·模拟预测) 已知椭圆  $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $\gamma$  与圆  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$  在第一、第二象限分别交于  $Q$ 、 $P$  两点, 且满足  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ ,  $PQ = 1$ ,

(1) 求椭圆  $\gamma$  的标准方程;

(2)  $A$  是椭圆上的一点, 若存在椭圆的弦  $BC$  使得  $OA \parallel BC, OA = BC$ , 求证: 四边形  $OABC$  的面积为定值.

3. (23-24 高二上·福建泉州·期中) 已知圆  $A_1: (x+1)^2 + y^2 = 16$ , 直线  $l_1$  过点  $A_2(1,0)$  且与圆  $A_1$  交于点  $B, C$ ,  $BC$  中点为  $D$ , 过  $A_2C$  中点  $E$  且平行于  $A_1D$  的直线交  $A_1C$  于点  $P$ , 记  $P$  的轨迹为  $\Gamma$ .

(1) 求  $\Gamma$  的方程;

(2) 坐标原点  $O$  关于  $A_1, A_2$  的对称点分别为  $B_1, B_2$ , 点  $A_1, A_2$  关于直线  $y = x$  的对称点分别为  $C_1, C_2$ , 过  $A_1$  的直线  $l_2$  与  $\Gamma$  交于点  $M, N$ , 直线  $B_1M, B_2N$  相交于点  $Q$ . 请从下列结论中, 选择一个正确的结论并给予证明.

①  $\triangle QBC$  的面积是定值; ②  $\triangle BB_1B_2$  的面积是定值; ③  $\triangle QC_1C_2$  的面积是定值.

4. (2024·全国·模拟预测) 已知双曲线  $C$  的中心是坐标原点, 对称轴为坐标轴, 且过  $A(-2,0), B(-4,3)$  两

点.

(1)求  $C$  的方程;

(2)设  $P, M, N$  三点在  $C$  的右支上,  $BM \parallel AP, AN \parallel BP$ , 证明:

(i) 存在常数  $\lambda$ , 满足  $\overline{OM} + \overline{ON} = \lambda \overline{OP}$ ;

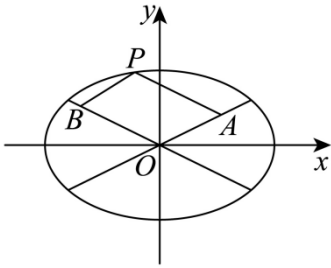
(ii)  $\triangle MNP$  的面积为定值.

5. (2024·全国·模拟预测) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ,  $A_1, A_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右顶点,  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点, 斜率存在的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $P, Q$  两点, 记直线  $A_1P, PA_2, A_2Q, QA_1$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

(1)证明:  $k_3 \cdot k_4 = -\frac{3}{4}$ ;

(2)若  $k_1 + k_4 = \frac{5}{3}(k_2 + k_3)$ , 求  $S_{\triangle F_2PQ}$  的取值范围.

6. (2024 高三·全国·专题练习) 如图所示, 已知椭圆系方程  $C_n: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = n$  ( $a > b > 0, n \in \mathbf{N}^+$ ),  $F_1, F_2$  是椭圆  $C_6$  的焦点,  $A(\sqrt{6}, \sqrt{3})$  是椭圆  $C_6$  上一点, 且  $\overline{AF_2} \cdot \overline{F_1F_2} = 0$ .



(1)求  $C_n$  的离心率, 求出  $C_1$  的方程.

(2) $P$  为椭圆  $C_3$  上任意一点, 过  $P$  且与椭圆  $C_3$  相切的直线  $l$  与椭圆  $C_6$  交于  $M, N$  两点, 点  $P$  关于原点的对称点为  $Q$ , 求证:  $\triangle QMN$  的面积为定值.

**参考答案:**

1. (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2)证明见解析,  $\frac{5}{16}$ .

**【分析】**(1) 由  $|BP| = \frac{16}{5}$  和  $P(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$  在椭圆上求出  $a, b$  即可.

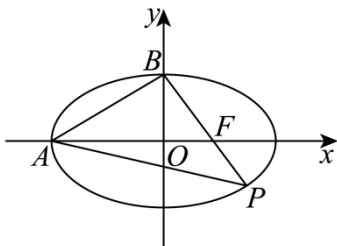
(2) 求出直线  $BF$  的方程, 并与椭圆方程联立求得点  $P$  坐标, 再由给定条件结合面积公式求解即可.

**【详解】**(1) 由  $B(0, b)$ ,  $P(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$ ,  $|BP| = \frac{16}{5}$  得:  $(\frac{8}{5})^2 + (b + \frac{3\sqrt{3}}{5})^2 = (\frac{16}{5})^2$ , 解得  $b = \sqrt{3}$ ,

又点  $P(\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5})$  在椭圆上, 则  $\frac{(\frac{8}{5})^2}{a^2} + \frac{(\frac{-3\sqrt{3}}{5})^2}{b^2} = 1$ , 解得  $a=2$ ,

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2)



证明:依题意, 令  $F(c,0)$ , 直线  $BF: \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$ , 由  $\begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ , 得  $P(\frac{2a^2c}{a^2+c^2}, -\frac{b^3}{a^2+c^2})$ ,

直线  $AB$  的斜率  $k_{AB} = \frac{b}{a}$ , 直线  $AP$  的斜率  $k_{AP} = \frac{-\frac{b^3}{a^2+c^2}}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2} - (-a)} = \frac{-b^3}{2a^2c + a^3 + ac^2}$ ,

则  $\frac{2b^3}{2a^2c + a^3 + ac^2} = \frac{b}{a}$ , 即  $2b^2 = 2ac + a^2 + c^2$ , 有  $2(a^2 - c^2) = (a+c)^2$ , 得  $a=3c$ ,  $b=2\sqrt{2}c$ ,

于是得点  $P(\frac{9c}{5}, -\frac{8\sqrt{2}c}{5})$ ,  $S_{\triangle APF} = \frac{1}{2}|AF| \cdot |-\frac{8\sqrt{2}c}{5}| = \frac{16\sqrt{2}c^2}{5}$ ,  $S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2}|OF| \cdot |OB| = \sqrt{2}c^2$ ,

所以  $\frac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle APF}} = \frac{\sqrt{2}c^2}{\frac{16\sqrt{2}}{5}c^2} = \frac{5}{16}$  为定值.

2. (1)  $\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

(2)证明见解析

【分析】(1) 根据椭圆和圆的对称性可得  $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ , 再代入椭圆和圆的方程中, 解方程组求出  $a^2$  和  $b^2$  的值即可;

(2) 设  $A(m,n)$ ,  $mn \neq 0$ , 易知四边形  $OABC$  是平行四边形, 设直线  $BC$  的方程为  $y = \frac{n}{m}(x-t)$ , 将其与椭圆方程联立, 结合韦达定理, 弦长公式以及椭圆的方程, 推出  $|nt| = \frac{3}{4}$ , 再利用点到直线的距离公式, 表示出四边形  $OABC$  的面积, 然后化简即可得定值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/20621004100011042>