第四章 根轨迹法

Chapter 4 ROOT LOCUS

大连民族学院机电信息工程学院
College of Electromechanical & Information Engineering

4.2　绘制根轨迹的基本法则

- 根轨迹的连续性和对称性
- 根轨迹分支数、起点和终点
- 实轴上的根轨迹
- 根轨迹的渐近线
- 根轨迹的分离点和汇合点
- 根轨迹的起始角和终止角
- 根轨迹与虚轴的交点
- 闭环特征方程根之和与根之积

！ 绘制注意点

1） 实轴、虚轴相同的刻度

2） “×”、 “○”

3） 加粗线及箭头

4） 关键点的标注

规则1　根轨迹的对称性

实际系统的开环零极点以及闭环零极点总是实数或共轭复数对。**它们往往在s平面上的分布是关于实轴对称的。**因此根轨迹也是关于实轴对称的。利用对称的特点，只需绘制实轴上半平面的根轨迹就可以了。

规则2 根轨迹的分支数、起点和终点

根轨迹的分支数等于开环极点数目与开环零点数目大者。

系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

系统的闭环传递函数

$$\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)+K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

一般来说，由于n≥m，所以特征方程是n次的。当K取任何数值时，它总有n个根，由此便知根轨迹共有n条分支。

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。若 n ＞ m，还有n-m 条根轨迹终止于s平面无穷远处。

系统的闭环传递函数

$$\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)+K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

根轨迹的起点是指当K=0时，根轨迹的位置。由上式可知，当K=0时，该方程便蜕化为开环特征方程，即

$$\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)=0$$

上式表明了根轨迹的起点 $s=-p_l(l=1,2,\cdots,n)$ 就是开环传递函数的极点。

根轨迹的终点是指当根轨迹增益$K \to \infty$ 时根轨迹的位置。

$$\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)+K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

$$\frac{1}{K}\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)+\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

当 $K \to \infty$时，它将蜕化成为m次方程，而m≤n。

$$\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

通常m ＜ n ，还有n-m 条根轨迹终止在什么地方？

我们在上式中做置换，令 $s=\dfrac{1}{q}$

$$\frac{1}{K}(\frac{1}{q}+p_1)\cdots(\frac{1}{q}+p_n)+(\frac{1}{q}+z_1)\cdots(\frac{1}{q}+z_m)=0$$

将两端同乘以 q^n ，便得

$$\frac{1}{K}(1+qp_1)\cdots(1+pq_n)+q^{n-m}(1+qz_1)\cdots(1+qz_m)=0$$

当 $K\to\infty$ 时，它化为 $q^{n-m}(1+qz_1)\cdots(1+qz_m)=0$

这仍是n次方程，它有n个根：

$$q=0(n-m\text{重}),-\frac{1}{z},\cdots,-\frac{1}{z_m}$$

可见方程(4-13)在时n个根应是

$$s=\infty(n-m\text{重}),-z_1,\cdots,-z_m$$

规则3　根轨迹在实轴上的分布

实轴上的根轨迹只能是其右侧开环实数零、极点总数为奇数的线段。共轭复数开环零、极点对确定实轴上的根轨迹无影响。

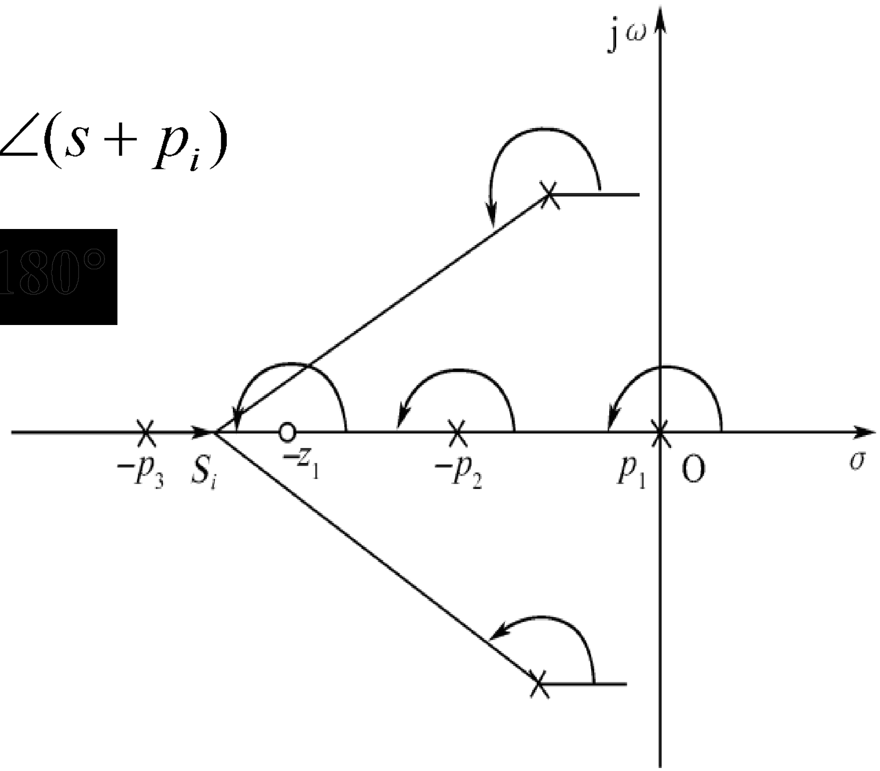
$$\angle G(s_1)H(s_1)=\sum_{i=1}^{1}\angle(s+z_i)-\sum_{i=1}^{5}\angle(s+p_i)$$

? ⇔ [redacted]

每对共轭复数极点所提供的幅角之和为360°；

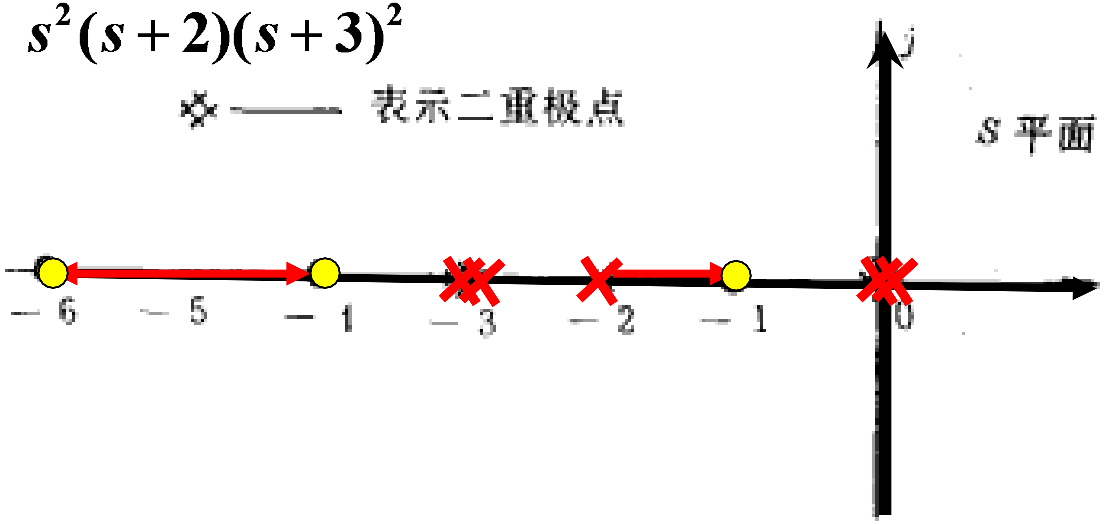
s_1右边所有位于实轴上的每一个极点或零点所提供的幅角为180°；

s_1左边所有位于实轴上的每一个极点或零点所提供的幅角为0°。



已知系统的开环传递函数，试确定实轴上的根轨迹。

$$G(s)=\frac{K(s+1)(s+4)(s+6)}{s^2(s+2)(s+3)^2}$$



[-1，-2] 右侧实零、极点数=3。

[-4，-6] 右侧实零、极点数=7。

规则4 根轨迹的渐近线

若m < n，当 k →∞时有 n-m 条根轨迹沿着 n-m 条渐近线趋于s平面无穷远处。

1. 渐近线的倾角

$$\theta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-m-1)$$

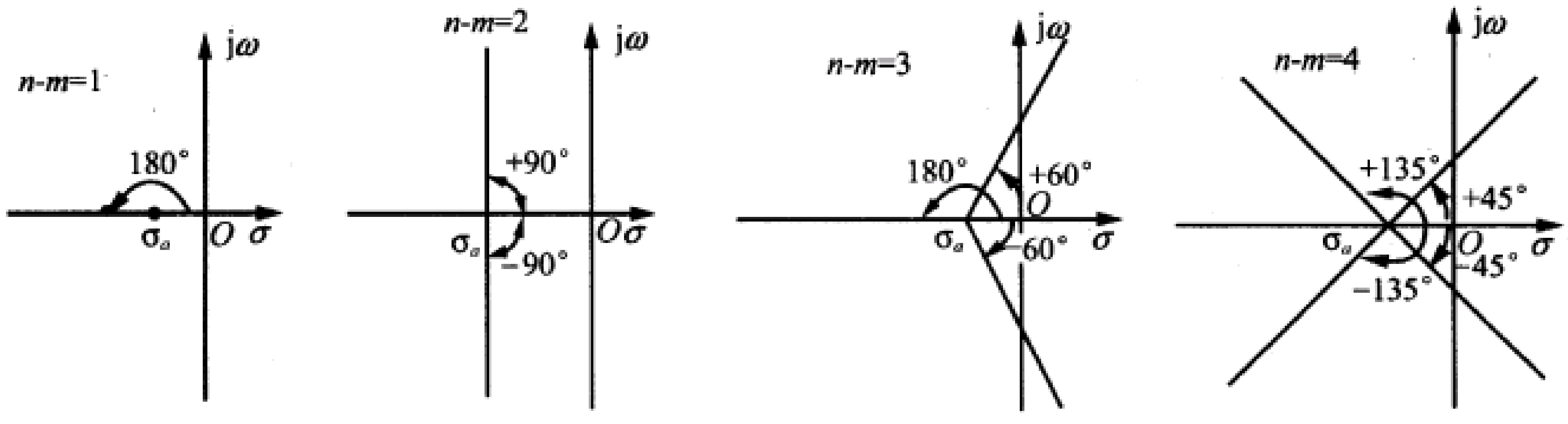
2. 渐近线与实轴的交点

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\sum_{l=1}^{n}(p_l) - \sum_{i=1}^{m}(z_i)}{n-m} \right)$$

$$\theta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} \qquad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

1）当k值取不同值时，θ_a 有（n—m）个值，而σ_a不变；

2）根轨迹在$s \to \infty$时的渐近线为（n—m）条与实轴交点为σ_a 、倾角ϕ_a为的一组射线。



例 已知系统的开环传递函数，试确定根轨迹的渐近线。

$$G(s)=\frac{K(0.25s+1)}{s(s+1)(0.2s+1)}=\frac{K^*(s+4)}{s(s+1)(s+5)}$$

三个开环极点：0、−1、−5　　一个开环零点：−4

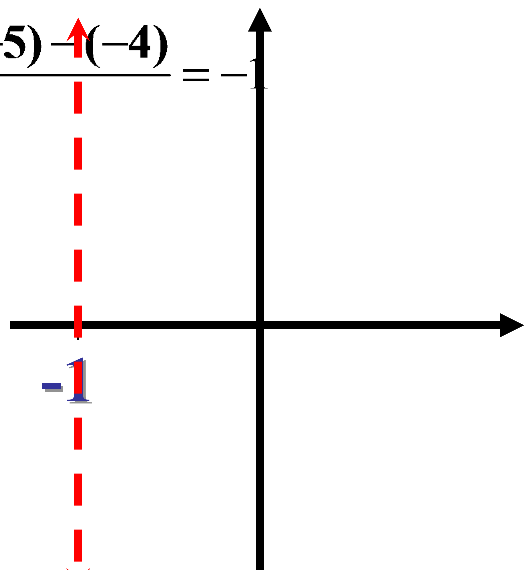
n−m=3−1=2

渐近线与实轴交点：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{(0)+(-1)+(-5)-(-4)}{3-1}=-1$$

渐近线与实轴正方向的夹角：

$$\phi_a=\frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m}\qquad \phi_a=90^\circ、270^\circ$$



例 已知系统的开环传递函数，试确定根轨迹的渐近线。

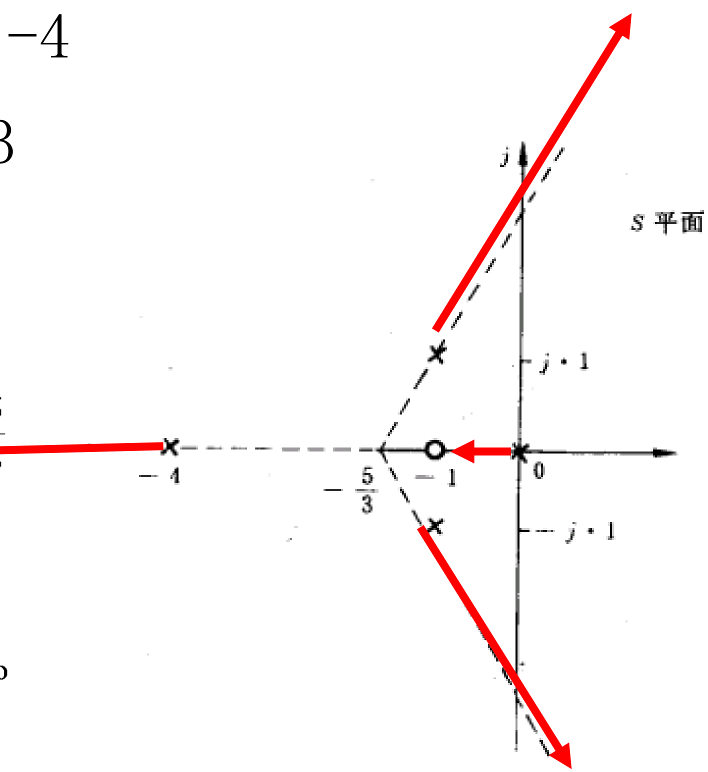
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

四个开环极点：0、-1+j、-1-j、-4

一个开环零点：-1　　n-m=4-1=3

渐近线与实轴交点：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{(0)+(-1+j)+(-1-j)+(-4)-(-1)}{4-1}=-\frac{5}{3}$$



渐近线与实轴正方向的夹角：

$$\phi_a=\frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m}\qquad \phi_a=60^\circ、180^\circ、300^\circ$$

规则5　根轨迹的分离点和汇合点

分离点（或会合点）：根轨迹在S平面某一点相遇后又立即分开。

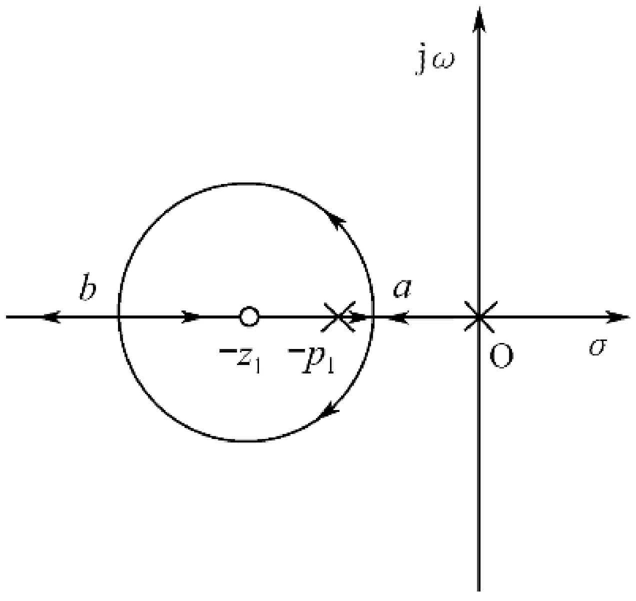
分离点必然是为D(s)某一数值时的重根点。

1、d坐标值由分式方程解出

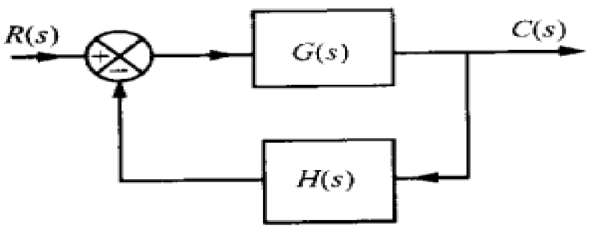
$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d+z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d+p_i}$$

解析法

试凑法



坐标值d由分式方程解出



$$G(s)H(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \qquad D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)+K'\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

根轨迹在S平面上相遇并有重根，设重根为s_1，根据代数中的重根条件，有

$$\begin{cases} D(s_1)=\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)+K'\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0 \\ \dfrac{d}{ds_1}D(s_1)=\dfrac{d}{ds_1}\left[\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)+K'\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)\right]=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)=-K'\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i) \\ \dfrac{d}{ds_1}\left[\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)\right]=-K'\dfrac{d}{ds_1}\left[\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)\right] \end{cases}$$

两式相除

$$\frac{\dfrac{d}{ds_1}\left[\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)\right]}{\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)}=\frac{\dfrac{d}{ds_1}\left[\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)}$$

$$\frac{d}{ds_1}\ln\left[\prod_{i=1}^{n}(s_1+p_i)\right]=\frac{d}{ds_1}\ln\left[\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)\right]$$

或

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{d}{ds_1}\ln(s_1+p_i)=\prod_{i=1}^{m}\frac{d}{ds_1}\ln(s_1+z_i)$$

即得 $$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s_1+z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_1+p_i}$$

解出s_1，即为分离点d