

第9题 函数的单调性

I. 题源探究·黄金母题

【例1】已知函数 $f(x) = -\frac{2}{x+1}$, $x \in [0, 2]$, 求函数的最大值和最小值.

【答案】 $-\frac{2}{3}, -2$

【解析】设 x_1, x_2 是 $[0, 2]$ 上的任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -\frac{2}{x_1+1} - \left(-\frac{2}{x_2+1}\right) \\ &= -\frac{2(x_2+1-x_1-1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = -\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} \end{aligned}$$

由 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, 得 $x_2 - x_1 > 0$, $(x_1+1)(x_2+1) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是增函数. 因此, 函数 $f(x) = -\frac{2}{x+1}$ 在区间 $[0, 2]$ 的左端点处取得最小值, 右端点处取得最大值, 即最小值是 $f(0) = -2$, 最大值是 $f(2) = -\frac{2}{3}$.

彩解读

【试题来源】人教版 A 版必修一第 31 页例 4.

【母题评析】本题通过对函数的单调性的判断或证明, 进而利用函数的单调性求出函数在某一闭区间上的最大值和最小值. 本类考查方式是近几年高考试题常常采用的命题形式.

【思路方法】

利用函数的单调性的定义或借助函数的图象判断函数的单调性,借助函数的单调性研究函数的极值与最值或比较大小或解不等式等.

【命题意图】本类题通常主要考查一些常见函数的图象与性质,主要利用函数的单调性比较大小.

【考试方向】这类试题在考查题型上,通常基本以选择题或填空题的形式出现,难度较小,往往与不等式的性质同时考

II. 考场精彩·真题回放

【例 2】【2017 高考天津卷】已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-\log_2 5.1)$, $b = g(2^{0.8})$, $c = g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为

A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c$

【答案】 C

【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以在 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $g(x) = xf(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数,

$a = g(-\log_2 5.1) = g(\log_2 5.1)$, $2^{0.8} < 2$, 又 $4 < 5.1 < 8$, 则

$2 < \log_2 5.1 < 3$, 所以即 $0 < 2^{0.8} < \log_2 5.1 < 3$,

$g(2^{0.8}) < g(\log_2 5.1) < g(3)$, 所以 $b < a < c$, 故选 C.

【例 3】【2017 高考山东卷】若函数 $e^x f(x)$ ($e = 2.71828\ldots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义

学必求其心得，业必贵于专精

域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下 查.

列函数中所有具有 M 性质的函数的序号
为_____.

① $f(x) = 2^{-x}$; ② $f(x) = 3^{-x}$; ③ $f(x) = x^3$; ④ $f(x) = x^2 + 2$

【难点中心】

【答案】①④

【解析】试题分析：① $e^x f(x) = e^x \cdot 2^{-x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$

上单调递增，故 $f(x) = 2^{-x}$ 具有M性质；②

$e^x f(x) = e^x \cdot 3^{-x} = \left(\frac{e}{3}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，故 $f(x) = 3^{-x}$ 不

具有M性质；③ $e^x f(x) = e^x \cdot x^3$ ，令 $g(x) = e^x \cdot x^3$ ，则

$g'(x) = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = x^2 e^x (x+2)$ ， $\therefore$ 当 $x > -2$ 时， $g'(x) > 0$ ，

当 $x < -2$ 时， $g'(x) < 0$ ， $\therefore e^x f(x) = e^x \cdot x^3$ 在 $(-\infty, -2)$ 上

单调递减，在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增，故 $f(x) = x^3$ 不

具有M性质；

④ $e^x f(x) = e^x (x^2 + 2)$ ，令 $g(x) = e^x (x^2 + 2)$ ，则

$g'(x) = e^x (x^2 + 2) + e^x \cdot 2x = e^x [(x+1)^2 + 1] > 0$ ，

$\therefore e^x f(x) = e^x (x^2 + 2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，故 $f(x) = x^2 + 2$

具有M性质.

【例4】【2017 高考课标2卷】函数

$f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是

()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【答案】D

【解析】要使函数有意义，则 $x^2 - 2x - 8 > 0$ ，解得：

$x < -2$ 或 $x > 4$

(1) 对于比较大
小问题,简单问题
可直接借助一个
的常见函数的单
调性,利用自变量
的大小关系,推出
函数值的大小关
系,复杂一点的,
有时需要把式子
适当变形,然后再
构造一个适当的
函数,同样借助这
个函数的单调性,
利用自变量的大
小关系,推出函数
值的大小关系.是
基础题.

(2)

，结合二次函数的单调性、对数函数的单调性和复合函数同增异减的原则可得函数的单调增区间为 $(4, +\infty)$ 。故选 D。

A. $a^c < b^c$ **B.** $ab^c < ba^c$
C. $a \log_b c < b \log_a c$ **D.** $\log_a c < \log_b c$

【解析】 对于选项 A：由于 $0 < c < 1$ ，所以函数 $y = x^c$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 由 $a > b > 1$ ，得 $a^c > b^c$. 故 A 错误.

对于选项 **B** : 要比较 ab^c 与 ba^c 的大小, 只需比较 $\frac{a}{b}$ 与 $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ 的大小. 构造函数 $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, 因为

$f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$. 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$. 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 因此, 若 $a > b > 1$, 得

新定义问题,属于创新题,符合新高考的走向.它考查学生的阅读理解能力,接受新思维的能力,考查学生分析问题与解决问题的能力,新定义的概念实质上只是一个载体,解决新问题时,只要通过这个载体把问题转化为我们已经熟悉的知识即可.

①定义法和导数法,通过解相应不等式得单调区间;

②图象法,由图象确定函数的单调区间需注意两点:

学必求其心得，业必贵于专精

$\frac{\ln c}{a \ln a} > \frac{\ln c}{b \ln b}$ ，即 $\frac{b \ln c}{\ln a} > \frac{a \ln c}{\ln b}$ ，得 $b \log_a c > a \log_b c$ 。

故选项 C 正确。

一是单调区间必须是函数定义域的子集；二是图象不连续的单调区间要分开写，用“和”或“，”连接，不能用“ $\cup$ ”连接；

学必求其心得，业必贵于专精

对于选项 D:比较 $\log_a c$ 与 $\log_b c$ 的大小, 只需比较 $\frac{\ln c}{\ln a}$ 与 $\frac{\ln c}{\ln b}$ 的大小, 即比较 $\ln a$ 与 $\ln b$ 的大小. 又 $a > b > 1$, 得 $\ln a > \ln b > 0$, 所以 $\frac{1}{\ln a} < \frac{1}{\ln b}$. 又 $\ln c < 0$, 得 $\frac{\ln c}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}$, 即 $\log_a c > \log_b c$. 故选项 D 不正确. 综上可得选 C.

③利用复合函数“同增异减”的原则, 此时需先确定函数的单调性.

III. 理论基础·解题原理

一、函数的单调性的基本概念

1. 函数的单调性

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 区间 $D \subseteq I$, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数;

2. 函数的单调区间

若函数单调 $y = f(x)$ 在区间 D 上是增函数 (或减函数), 则称函数 $y = f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性, 区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.

二、辨明两个易误点

(1)单调区间只能用区间表示, 不能用集合或不等式表示;如有多个单调区间应分别写, 不能用符号“ $\cup$ ”联结, 也不能用“或”联结.

(2)注意函数的定义域为不连续的两个单调性相同的区间,

学必求其心得，业必贵于专精

要分别说明单调区间，不可说成“在其定义域上”单调，如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, +\infty)$ 上递减，而不能说在定义域上递减.

三、判断函数单调性的四种方法

(1) 定义法：取值、作差、变形、定号、下结论；

(2) 复合法：“同增异减”，即内外函数的单调性相同时，为增函数，不同时为减函数；

(3) 图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，可由图象的直观性判断函数单调性.

(4) 导数法：利用导函数的正负判断函数单调性.

四、认识反应函数单调性的陌生函数符号

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，说明函数 $f(x)$ 为减函数；同样若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，说明函数 $f(x)$ 为增函数；类似

$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$ 呢？

IV. 题型攻略·深度挖掘

【考试方向】

这类试题在考查题型上，通常基本以选择题或填空题的形式出现，难度较小，往往与函数的奇偶性、周期有联系，主要考查求值、比较大小、解不等式等.

学必求其心得，业必贵于专精

【技能方法】

学必求其心得，业必贵于专精

解决此类问题一般要把先求函数的定义域,在定义域内研究函数的单调性. 研究函数的单调性时, 可灵活采用定义法、复合法、图象法、导数法, 了解函数再定义域内的区间上的单调性,在此基础上再借助函数的奇偶性、周期性、特殊值等,模拟画出函数的图象,最后利用数形结合思想, 达到求最值、比较大小、解不等式的目的.

【易错指导】

(1)求函数的单调区间,必须先求出函数的定义域,函数的单调区间是函数定义域的子集.

(2) 利用函数单调性解不等式时, 要注意函数的定义域, 特别是函数为偶函数时, 注意使用“绝对值”

V. 举一反三·触类旁通

考向 1 判断函数的单调性 (求函数的单调区间)

【例 1】【2018 安徽滁州 9 月联合质量检测】下列函数在 $(0,2)$ 上是增函数的是 ()

A. $y = \sqrt{2-x}$ B. $y = \frac{1}{x-2}$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ D. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

【答案】D

【解析】A. $y = \sqrt{2-x}$ 在 $(0,2)$ 是减函数; B. $y = \frac{1}{x-2}$ 在 $(0,2)$ 是减函数; C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 在 $(0,2)$ 是减函数; D. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$ 在 $(0,2)$ 是增函数. 故选 D.

【例 2】【2017 高考北京卷】已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ()

学必求其心得，业必贵于专精

A. 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

学必求其心得，业必贵于专精

- B. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
- C. 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数 D. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

【答案】A

【解析】 $f(-x) = 3^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x = -f(x)$ ，所以该函数是奇函数，并且 $y = 3^x$ 是增函数， $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是减函数，根据增函数-减函数=增函数，可知该函数是增函数，故选 A.

【名师点睛】本题属于基础题型，根据 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系就可以判断出函数的奇偶性，判断函数单调性的方法：(1)利用平时学习过的基本初等函数的单调性；(2)利用函数图象判断函数的单调性；(3)利用函数的四则运算判断函数的单调性，如：增函数+增函数=增函数，增函数-减函数=增函数；(4)利用导数判断函数的单调性.

【例 3】【2018 辽宁鞍山一中一模】已知函数 $f(x) = \ln(-x^2 - 2x + 3)$ ，则 $f(x)$ 的增区间为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-3, -1)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-1, 1)$

【答案】B

【解析】函数有意义，则： $-x^2 - 2x + 3 > 0$ ，

求解不等式可得函数的定义域为： $-3 < x < 1$ ，

二次函数 $y = -x^2 - 2x + 3$ 在区间 $(-3, -1)$ 上单调递增，在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减，

结合复合函数的单调性可得 $f(x)$ 的增区间为 $(-3, -1)$.

本题选择 B 选项.

学必求其心得，业必贵于专精

点睛:求函数的单调区间:首先应注意函数的单调区间是其定义域的子集;其次掌握一次函数、二次函数等基本初等函数的单调区间. 求函数单调区间的常用方法:根据定义、利用图象、单调函数的性质及利用导数的性质.

【跟踪练习】

1. 下列函数中,定义域是 $\mathbf{R}$ 且为增函数的是()

- A. $y=e^{-x}$ B. $y=x^3$ C. $y=\ln x$
D. $y=|x|$

【答案】B

【解析】首先 $y=e^{-x}=(\frac{1}{e})^x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,排除 A; $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,排除 A; $y=|x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数,排除 D; 则本题选 B.

2. 【2017 江西六校联考】下列函数中,既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y=\frac{1}{x}$ B. $y=\lg|x|$ C. $y=\cos x$ D. $y=x^2+2^x$

【答案】B

【解析】对于 A: 函数在 $(0,+\infty)$ 递减,不合题意;

对于 B: $y=\lg|x|$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 递增,符合题意;

对于 C: $y=\cos x$ 是周期函数,在 $(0,+\infty)$ 不单调,不合题意;

对于 D: 此函数不是偶函数,不合题意; 故选 B.

3. 【2018 河北邢台模拟】函数 $g(x)=|x|$ 的单调递增区间是 ()

- A. $[0,+\infty)$ B. $(-\infty,0]$ C. $(-\infty,-2]$ D. $[-2,+\infty)$

【答案】A

学必求其心得，业必贵于专精

【解析】任取 $x_1 > x_2 > 0$ ，则 $x_1 - x_2 > 0$ ， $g(x_1) - g(x_2) > |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2 > 0$ ， $g(x_1) > g(x_2)$ ，所以函数 $g(x) = |x|$ 的单调递增区间是 $[0, +\infty)$ ，故选 A.

考向 2 函数的单调性与比较大小

【例 4】已知 $x, y \in \mathbf{R}$ ，且 $x > y > 0$ ，则 ().

- A. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0$ B. $\sin x - \sin y > 0$
- C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$ D. $\ln x + \ln y > 0$

【答案】C

【解析】选项 A 错误：因为 $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$ ；选项 B 错误：三角函数 $y = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调的，所以不一定有 $\sin x > \sin y$ ．举反例如，当 $x = y + 2\pi > y > 0$ 时， $\sin x - \sin y = 0$ ；选项 C 正确：由指数函数 $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 是减函数，可得： $x > y > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$ ；选项 D 错误：举一个反例如， $x = e$ ， $y = \frac{1}{e}$ ． x, y 满足 $x > y > 0$ ，但 $\ln x + \ln y = 0$ ．故选 C.

【点评】利用函数的单调性比较大小是函数的最基本问题，选择一个适当的函数，利用函数在一个单调区间上的单调性，根据自变量的大小关系，判断函数值的大小关系，显然，掌握所学的基本函数的单调性就显得非常必要了．

【例 5】【2018 河南天一大联考】已知 $m > n > 0$ ，则下列说法错误的是 ()

- A. $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$ B. $\frac{m}{n+1} > \frac{n}{m+1}$ C. $\sqrt{m} > \sqrt{n}$ D. $\frac{m}{m^2+1} > \frac{n}{n^2+1}$

【答案】D

【解析】 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 为减函数，所以 $m > n > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$;

学必求其心得，业必贵于专精

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{m+1} \Rightarrow \frac{m}{n+1} > \frac{m}{m+1} > \frac{n}{m+1};$$

$y = \sqrt{x}$ 为增函数，所以 $m > n > 0 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{n}, 4 > 3 \Rightarrow \frac{4}{4^2+1} < \frac{3}{3^2+1}$ ，选 D.

【跟踪练习】

1. 【2018 河北省衡水模拟】 已知函数 $f(x)$ 为 R 内的奇函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = -e^x + 1 - m \cos x$ ，记 $a = -2f(-2)$ ， $b = -f(-1)$ ， $c = 3f(3)$ ，则 a ， b ， c 间的大小关系是()

- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0) = -e^0 + 1 - m \cos 0 = 0, \therefore m = 0$ ，即当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = -e^x + 1$ ，构造函数 $g(x) = xf(x)$ ，满足 $g(-x) = g(x)$ ，则函数 $g(x)$ 是偶函数，则 $g'(x) = 1 - e^x(x+1)$ ，当 $x \geq 0$ 时， $e^x \geq 1, x+1 \geq 1$ ，据此可得： $g'(x) \leq 0$ ，即偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减，且： $a = g(-2) = g(2), b = g(-1) = g(1), c = g(3)$ ，结合函数的单调性可得： $g(1) > g(2) > g(3)$ ，即： $c < a < b$ 。故选 D.

2. 【2018 河北武邑中学第二次调研】 已知 $0 < a < b < 1 < c$ ， $m = \log_a c$ ， $n = \log_b c$ ， $r = a^c$ ，则 m, n, r 的大小关系是()

- A. $n < m < r$ B. $m < r < n$ C. $r < m < n$ D. $m < n < r$

【答案】 A

【解析】 $\because 0 < a < b < 1 < c$ ， $\therefore m = \log_a c < 0$ ， $n = \log_b c < 0$ ， $r = a^c > 0$ ，且 $\log_c a < \log_c b < 0$ ，又 $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ ， $\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$ ， $\therefore \log_b c < \log_a c < 0 < a^c$ ， $\therefore n < m < r$ ，故选 A.

3. 【201 天津滨海八校联考】 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 ，都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，记 $a = \frac{f(4.1^{0.2})}{4.1^{0.2}}$ ， $b = \frac{f(0.4^{2.1})}{0.4^{2.1}}$ ，

$c = \frac{f(\log_{0.2} 4.1)}{\log_{0.2} 4.1}$ ，则 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

学必求其心得，业必贵于专精

【答案】 A

【解析】 设 $0 < x_1 < x_2$ ，则 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$ ，所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，因此 $a = \frac{f(4.1^{0.2})}{4.1^{0.2}} = g(4.1^{0.2}) < g(1)$ ， $b = \frac{f(0.4^{2.1})}{0.4^{2.1}} = g(0.4^{2.1}) > g(0.4^2) > g(0.5)$ ， $c = \frac{f(\log_{0.2} 4.1)}{\log_{0.2} 4.1} = g(\log_{0.2} 4.1) = g(\log_5 4.1) \in \left(g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ，即 $a < c < b$ ，选 A.

点睛：利用函数性质比较两个函数值或两个自变量的大小，首先根据函数的性质构造某个函数，然后根据函数的奇偶性转化为单调区间上函数值，最后根据单调性比较大小，要注意转化在定义域内进行

考向 3 函数的单调性与解不等式

【例 6】【2017 高考新课标 I 卷】 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，且为奇函数. 若 $f(1) = -1$ ，则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

【答案】 D

【解析】

试题分析：因为 $f(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，要使 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 成立，则 x 满足 $-1 \leq x \leq 1$ ，从

而由 $-1 \leq x-2 \leq 1$ 得 $1 \leq x \leq 3$ ，即满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 成立的 x 的取值范围为 $[1, 3]$ ，选 D.

【考点】 函数的奇偶性、单调性

【名师点睛】 奇偶性与单调性的综合问题，要重视利用奇、偶函数与单调性解决不等式和比较大小问题，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增的奇函数，且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$ ，则 $x_1 + x_2 > 0$ ，反之亦成立.

学必求其心得，业必贵于专精

【例 7】【2017 江苏， 11】 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$ ，其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$ ，则实数 a 的取值范围是 **▲**.

【答案】 $[-1, \frac{1}{2}]$

【解析】 因为 $f(-x) = -x^3 + 2x + \frac{1}{e^x} - e^x = -f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，

因为 $f'(x) = 3x^2 - 2 + e^x + e^{-x} \geq 3x^2 - 2 + 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} \geq 0$ ，所以数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

又 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$ ，即 $f(2a^2) \leq f(1-a)$ ，所以 $2a^2 \leq 1-a$ ，即 $2a^2 + a - 1 \leq 0$ ，

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$ ，故实数 a 的取值范围为 $[-1, \frac{1}{2}]$.

【考点】 利用函数性质解不等式

【名师点睛】 解函数不等式：首先根据函数的性质把不等式转化为 $f(g(x)) > f(h(x))$ 的形式，然后根据函数的单调性去掉“ f ”，转化为具体的不等式(组)，此时要注意 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的取值应在外层函数的定义域内.

【例 8】【2018 河南林州一中 10 月调研】 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(2) = 0$ ，则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 ()

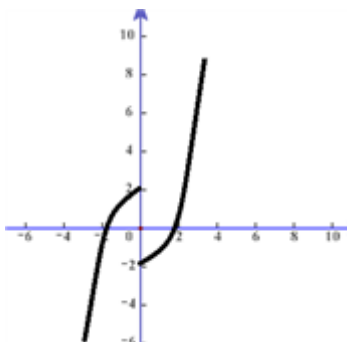
A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【答案】 D



【解析】 函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ， $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ ，化为 $\frac{2f(x)}{x} < 0$ ，

等价于 $xf(x) < 0$ ，当 $x > 0$ 时，解得 $0 < x < 2$ ，当 $x < 0$ 时， $-2 < x < 0$ ，不等式的解集为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$ ，故选 D.

【跟踪练习】

1. 【2018 河北邢台模拟】函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(2m) > f(m+9)$ ，则实数 m 的取值范围是()

- A. $(9, +\infty)$ B. $[9, +\infty)$ C. $(-\infty, -9)$ D. $(-\infty, 9]$

【答案】A

【解析】∵函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(2m) > f(m+9)$ ， $\therefore 2m > m+9$ ，解得 $m > 9$ ，故选 A.

【方法点睛】本题主要考查抽象函数的单调性及抽象函数解不等式，属于难题. 根据抽象函数的单调性解不等式应注意以下三点：(1)一定注意抽象函数的定义域(这一点是同学们容易疏忽的地方，不能掉以轻心)；(2)注意应用函数的奇偶性（往往需要先证明是奇函数还是偶函数）；(3)化成 $f(g(x)) \geq f(h(x))$ 后再利用单调性和定义域列不等式组.

2. 【2016 高考天津卷】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

【解析】由题意 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减，又 $f(x)$ 是偶函数，则不等式 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ 或化为 $f(2^{|a-1|}) > f(\sqrt{2})$ ，则 $2^{|a-1|} < \frac{1}{2}$ ， $|a-1| < \frac{1}{2}$ ，解得 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ ，即答案为 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

【点评】利用函数的单调性解不等式就是根据函数值的大小判断自变量的大小关系，进而解出不等式，解答时也要注意函数的定义域的要求. 另外解不等式时经常利用数形结合思想，在解题时既要想形又要以形助数.

学必求其心得，业必贵于专精

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/206213120221010110>