

江苏省无锡市天一中学 2024 年高考冲刺押题（最后一卷）数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x^2 + 2ex - a$ （其中 e 为自然对数的底数）有两个零点，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $\left(-\infty, e^2 + \frac{1}{e}\right]$ B. $\left(-\infty, e^2 + \frac{1}{e}\right)$

C. $\left[e^2 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left(e^2 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$

2. 已知 α 是第二象限的角， $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ （ ）

A. $\frac{12}{25}$ B. $-\frac{12}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$

3. 已知实数 x, y 满足线性约束条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $\frac{y+1}{x}$ 的取值范围为（ ）

A. $(-2, -1]$ B. $(-1, 4]$ C. $[-2, 4)$ D. $[0, 4]$

4. 集合 $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\}$ ， $B = \{x | y = \lg(2 - x)\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ C. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 2\}$

5. 已知平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$ ， $AB \perp AD$ ， $CD \perp AD$ ，且 $AB = 3$ ， $AD = CD = 6$ ， $ADEF$ 是正方形，在正方形

$ADEF$ 内部有一点 M ，满足 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角相等，则点 M 的轨迹长度为（ ）

A. $\frac{4}{3}$ B. 16 C. $\frac{4}{3}\pi$ D. 8π

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_8 = 16$ ， $a_6 = 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为（ ）

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 若 $f(x) - ax = 0$ 有且仅有 3 个零点, 则实数 a 的

取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$

8. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$, 则下列判断错误的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称

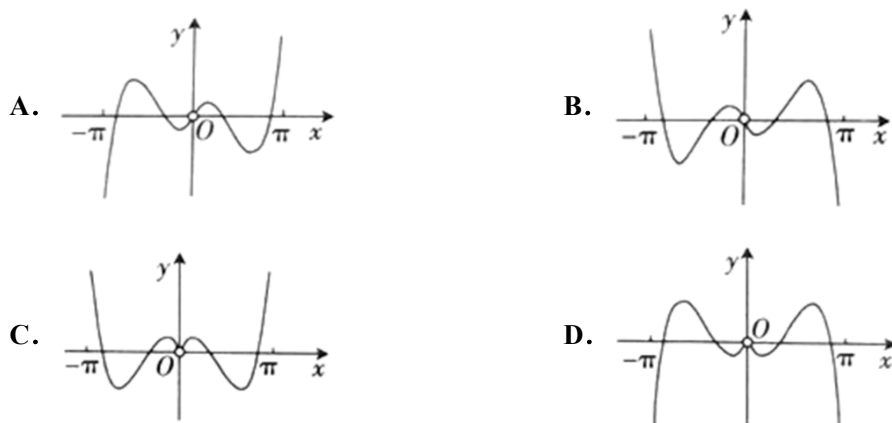
9. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

10. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的最大值为 ()

- A. 10 B. 8 C. 5 D. 3

11. 函数 $f(x) = x^3 \cos x + x \ln |x|$ 在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 的图象大致为 ()



12. 已知 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, 2)$, $\vec{c} = (n, -1)$, 若 $(\vec{a} - \vec{c}) \perp \vec{b}$, 则 n 等于 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 记实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 已知实数 x, y

且三数能构成三角形的三边长，若 $t = \max\left\{\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, y\right\} \cdot \min\left\{\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, y\right\}$ ，则 t 的取值范围是_____.

14. 给出下列等式： $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ ， $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{8}$ ， $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{16}$ ，...请从中归纳出第 n 个等式：

$$\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \text{_____}.$$

$\uparrow$
 $n \geq 2$

15. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c \geq 4$ ， 且 $a + b = 2$ ， 则 $\frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{5}}{c-2}$ 的最小值为_____.

16. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = 2x$ ， 则焦点到这条渐近线的距离为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$ ， 集合 $B = \{x | 2x^2 + (2k + 5)x + 5k < 0\}$ ， $k \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求集合 B ；

(2) 记 $M = A \cap B$ ， 且集合 M 中有且仅有一个整数， 求实数 k 的取值范围。

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， 右焦点为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) O 为坐标原点， 过 O 作两条射线， 分别交椭圆于 M 、 N 两点， 若 OM 、 ON 斜率之积为 $-\frac{4}{5}$ ， 求证 $\triangle MON$ 的面积为定值。

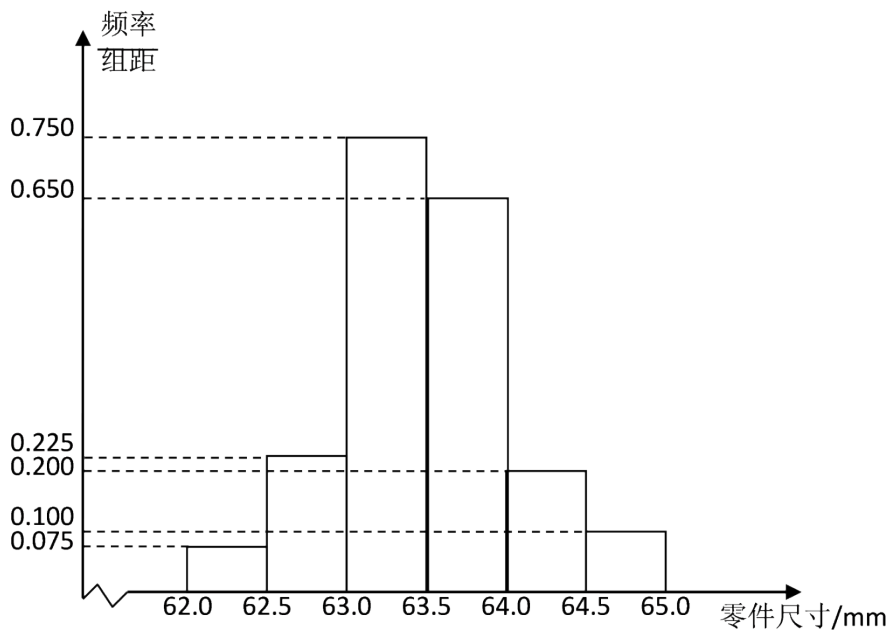
19. (12 分) 已知 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， 动点 P 满足直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ ， 设点 P 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 若过点 $F(1, 0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 M ， N 两点， 过点 F 且与直线 l 垂直的直线与 $x = 4$ 相交于点 T ， 求

$\frac{|TF|}{|MN|}$ 的最小值及此时直线 l 的方程。

20. (12 分) 某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况， 从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量， 根据所测量的零件尺寸 (单位： mm)， 得到如下的频率分布直方图：



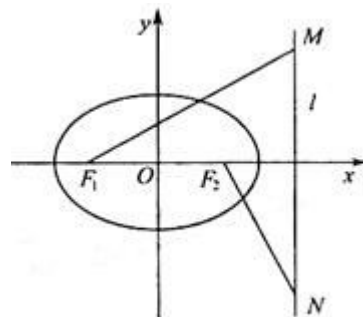
- (1) 根据频率分布直方图，求这80个零件尺寸的中位数（结果精确到0.01）；
- (2) 若从这80个零件中尺寸位于 $[62.5, 64.5)$ 之外的零件中随机抽取4个，设 X 表示尺寸在 $[64.5, 65]$ 上的零件个数，求 X 的分布列及数学期望 EX ；
- (3) 已知尺寸在 $[63.0, 64.5)$ 上的零件为一等品，否则为二等品，将这80个零件尺寸的样本频率视为概率. 现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售，每箱100个. 企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验，已知每个零件的检验费用为99元. 若检验，则将检验出的二等品更换为一等品；若不检验，如果有二等品进入买家手中，企业要向买家对每个二等品支付500元的赔偿费用. 现对一箱零件随机抽检了11个，结果有1个二等品，以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据，该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由.

21. (12分) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，右准线为 l ， M, N 是 l 上的

两个动点， $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$.

(I) 若 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$ ，求 a, b 的值；

(II) 证明：当 $|MN|$ 取最小值时， $\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.



22. (10分) 已知函数 $f(x) = e^x - x \ln x + ax$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值.

(1) 求证： $\ln x_0 + x_0 = 0$ ；

(2) 若 $x \dots x_0$ 时, $f(x) \dots 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

求出导函数 $f'(x)$, 确定函数的单调性, 确定函数的最值, 根据零点存在定理可确定参数范围.

【详解】

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 2(x - e)$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, $\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 只有一个极大值也是最大值 $f(e) = \frac{1}{e} + e^2 - a$, 显然 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时,

$f(x) \rightarrow -\infty$,

因此要使函数有两个零点, 则 $f(e) = \frac{1}{e} + e^2 - a > 0$, $\therefore a < e^2 + \frac{1}{e}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数的零点, 考查用导数研究函数的最值, 根据零点存在定理确定参数范围.

2、D

【解析】

利用诱导公式和同角三角函数的基本关系求出 $\cos^2 \alpha$, 再利用二倍角的正弦公式代入求解即可.

【详解】

因为 $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$,

由诱导公式可得, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$,

$$\text{即 } \sin \alpha = -\frac{3}{4} \cos \alpha,$$

$$\text{因为 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha = \frac{16}{25},$$

由二倍角的正弦公式可得,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2} \cos^2 \alpha,$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{25} = -\frac{24}{25}.$$

故选:D

【点睛】

本题考查诱导公式、同角三角函数的基本关系和二倍角的正弦公式;考查运算求解能力和知识的综合运用能力;属于中档题.

3、B

【解析】

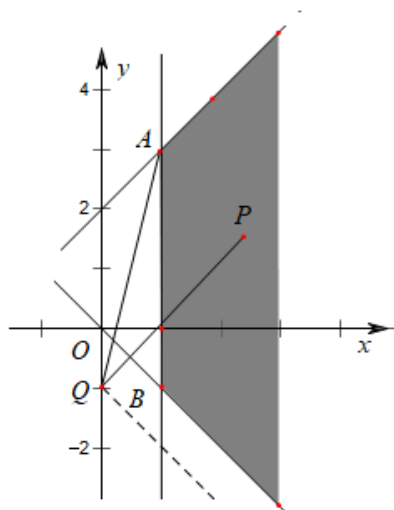
作出可行域, $\frac{y+1}{x}$ 表示可行域内点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(0, -1)$ 连线斜率, 观察可行域可得最小值.

【详解】

作出可行域, 如图阴影部分 (含边界), $\frac{y+1}{x}$ 表示可行域内点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(0, -1)$ 连线斜率, $A(1, 3)$,

$$k_{QA} = \frac{3 - (-1)}{1 - 0} = 4, \text{ 过 } Q \text{ 与直线 } x + y = 0 \text{ 平行的直线斜率为 } -1, \therefore -1 < k_{PQ} \leq 4.$$

故选: B.



【点睛】

本题考查简单的非线性规划. 解题关键是理解非线性目标函数的几何意义, 本题 $\frac{y+1}{x}$ 表示动点 $P(x, y)$ 与定点

$Q(0, -1)$ 连线斜率，由直线与可行域的关系可得结论.

4、A

【解析】

解一元二次不等式化简集合 A，再根据对数的真数大于零化简集合 B，求交集运算即可.

【详解】

由 $x^2 - 3x \leq 0$ 可得 $0 \leq x \leq 3$ ，所以 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ ，由 $2 - x > 0$ 可得 $x < 2$ ，所以 $B = \{x | x < 2\}$ ，所以

$A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查了集合的交集运算，涉及一元二次不等式解法及对数的概念，属于中档题.

5、C

【解析】

根据 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角相等，判断出 $MD = 2AM$ ，建立平面直角坐标系，求得 M 点的轨迹方程，由此求得点 M 的轨迹长度.

【详解】

由于平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$ ，且交线为 AD ， $AB \perp AD, CD \perp AD$ ，所以 $AB \perp$ 平面 $ADEF$ ， $CD \perp$ 平面 $ADEF$. 所以 $\angle BMA$ 和 $\angle CMD$ 分别是直线 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角，所以 $\angle BMA = \angle CMD$ ，所以

$\tan \angle BMA = \tan \angle CMD$ ，即 $\frac{AB}{AM} = \frac{CD}{MD}$ ，所以 $MD = 2AM$. 以 A 为原点建立平面直角坐标系如下图所示，则

$A(0, 0)$ ， $D(6, 0)$ ，设 $M(x, y)$ (点 M 在第一象限内)，由 $MD = 2AM$ 得 $MD^2 = 4AM^2$ ，即

$(x - 6)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$ ，化简得 $(x + 2)^2 + y^2 = 4^2$ ，由于点 M 在第一象限内，所以 M 点的轨迹是以 $G(-2, 0)$ 为

圆心，半径为 4 的圆在第一象限的部分. 令 $x = 0$ 代入原的方程，解得 $y = \pm 2\sqrt{3}$ ，故 $H(0, 2\sqrt{3})$ ，由于 $GA = 2$ ，所以

$\angle HGA = \frac{\pi}{3}$ ，所以点 M 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$.

故选：C

当 $3 \leq x < 4$ 时, $[x] = 3$,

若 $f(x) - ax = 0$ 有且仅有 3 个零点,

则等价于 $f(x) = ax$ 有且仅有 3 个根,

即 $f(x)$ 与 $g(x) = ax$ 有三个不同的交点,

作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图,

当 $a=1$ 时, $g(x) = x$ 与 $f(x)$ 有无数多个交点,

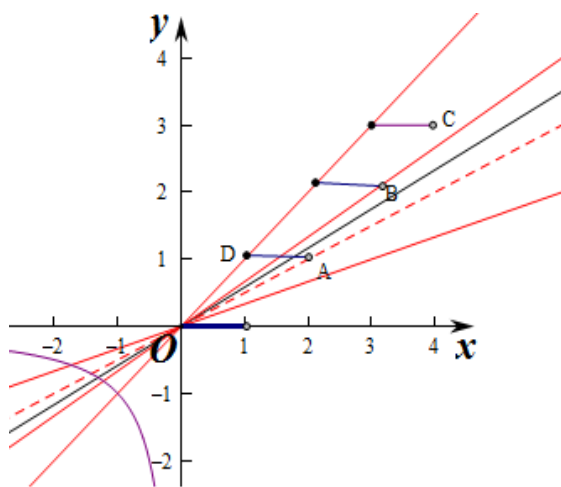
当直线 $g(x)$ 经过点 $A(2,1)$ 时, 即 $g(2) = 2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有两个交点,

当直线 $g(x)$ 经过点 $B(3,2)$ 时, 即 $g(3) = 3a = 2$, $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点,

要使 $f(x)$ 与 $g(x) = ax$ 有三个不同的交点, 则直线 $g(x)$ 处在过 $y = \frac{1}{2}x$ 和 $y = \frac{2}{3}x$ 之间,

即 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$,

故选: A.



【点睛】

利用函数零点的情况求参数值或取值范围的方法

(1)直接法: 直接根据题设条件构建关于参数的不等式, 再通过解不等式确定参数的范围; (2)分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数的值域(最值)问题加以解决;

(3)数形结合法: 先对解析式变形, 在同一平面直角坐标系中, 画出函数的图象, 然后数形结合求解.

8、D

【解析】

先将函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$ 化为 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

，再由三角函数的性质，逐项判断，即可得出结果.

【详解】

$$Q \quad f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

$$\text{可得 } f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x \right) + 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$$

$$\text{对于 A, } f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 由 } -1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1, \text{ 可得 } -1 \leq f(x) \leq 3, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, Q 正弦函数对称轴可得: } 2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in Z)$$

$$\text{解得: } x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}, (k \in Z),$$

$$\text{当 } k = 0, x_0 = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, Q 正弦函数对称中心的横坐标为: } 2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi, (k \in Z)$$

$$\text{解得: } x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}, (k \in Z)$$

$$\text{若图象关于点 } \left(-\frac{\pi}{4}, 0 \right) \text{ 对称, 则 } \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{解得: } k = -\frac{2}{3}, \text{ 故 D 错误;}$$

故选: D.

【点睛】

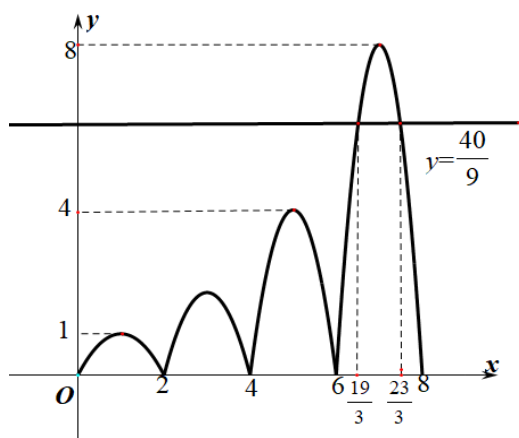
本题考查三角恒等变换, 三角函数的性质, 熟记三角函数基本公式和基本性质, 考查了分析能力和计算能力, 属于基础题.

9、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式, 作出函数图象, 数形结合即可得到答案.

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x-2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x-2n) = -2^n(x-2n)(x-2n-2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x-6)(x-8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x-6)(x-8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

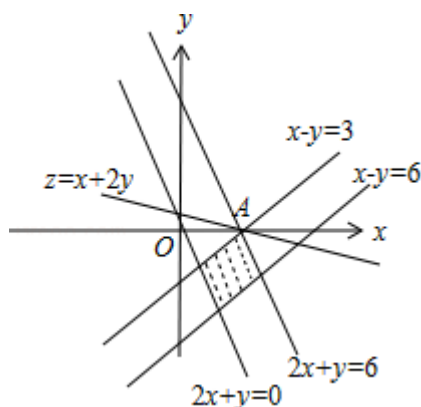
10、D

【解析】

画出可行域, 将 $z = x + 2y$ 化为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$, 通过平移 $y = -\frac{1}{2}x$ 即可判断出最优解, 代入到目标函数, 即可求出最值.

【详解】

解: 由约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ 作出可行域如图,



化目标函数 $z = x + 2y$ 为直线方程的斜截式, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$. 由图可知

当直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ 过 $A(3,0)$ 时, 直线在 y 轴上的截距最大, z 有最大值为 3.

故选: D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/206230055010010123>