

A. 变量 x 与 y 独立

B. 变量 x 与 y 独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.005

C. 变量 x 与 y 不独立

D. 变量 x 与 y 不独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.005

6. 若直线 $ax + by = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{4}$ 与圆 O ()

A. 外切

B. 相交

C. 内切

D. 没有公共点

7. 已知 $\sqrt{3}\sin \alpha = \cos \alpha$, $\frac{6\pi}{5} < \alpha < \frac{5\pi}{3}$, 则 $\cos \alpha$ ()

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

D. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

8. 设 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \sim U(0, 50)$, 随机变量 ξ_1 取值 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 的概率均为 0.2, 随机变量 ξ_2 取值

$\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{X_2+X_3}{2}, \frac{X_3+X_4}{2}, \frac{X_4+X_5}{2}, \frac{X_5+X_1}{2}$ 的概率也均为 0.2. 若记 D_1, D_2 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差, 则

()

A. $D_1 > D_2$

B. $D_1 < D_2$

C. $D_1 = D_2$

D. D_1 与 D_2 的大小关系与 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 的取值有关

二 多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不重合的平面, 则下列命题为真命题的是 ()

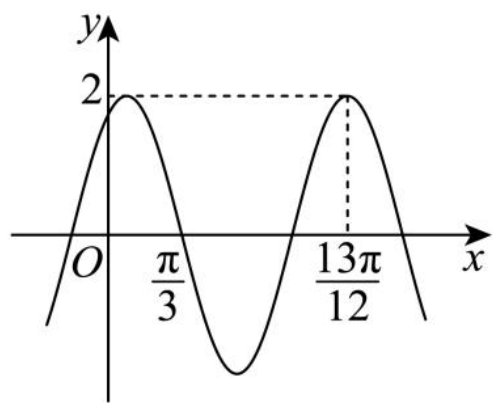
A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$

B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$

C. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \beta$

D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $m \parallel n$

10. 已知函数 $f(x) = 2\cos x$ 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到
- D. 函数 $F(x) = f(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24}) - f(x - \frac{\pi}{6})$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$

11. 双曲线具有如下性质: 双曲线在任意一点处的切线平分该点与两焦点连线的夹角. 设 O 为坐标原点, 双

曲线 $C: \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点 A 到一条渐近线的距离为 2, 右支上一动点 P

处的切线记为 l , 则 ()

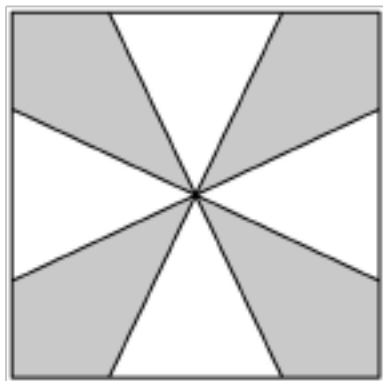
- A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x$
- B. 双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{30}}{5}$
- C. 当 $PF_2 \perp x$ 轴时, $|PF_1| = \frac{9\sqrt{5}}{2}$
- D. 过点 F_1 作 $F_1K \perp l$, 垂足为 K , $|OK| = 2\sqrt{5}$

三 填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若 $1 - i$ (i 为虚数单位) 是关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2 + kx + 2 = 0$ 的一个虚根, 则实数 k _____.

13. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^{ax}$, 若 $f(\ln 2) = \frac{1}{8}$, 则 a _____.

14. 如图, 一块面积为定值的正方形铁片上有四块阴影部分, 将这些阴影部分裁下来, 然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥容器, 当容器的容积最大时, 其侧面与底面所成的二面角的余弦值为 _____.



四 解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明 证明过程或演算步骤.

15. 某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加.为调查该地区植物覆盖面积与某种野生动物数量的关系，将其分成面积相近的若干个地块，从这些地块中随机抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据 x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 20$), 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量 (单位: 只), 并计算得

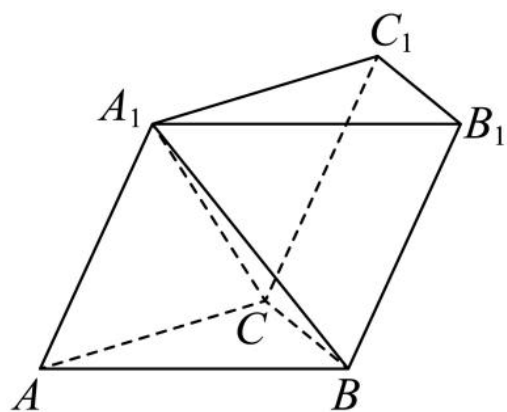
$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 80, \sum_{i=1}^{20} y_i = 9000, \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 800.$$

(1) 求样本 x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 20$) 的相关系数 (精确到 0.01), 并推断这种野生动物的数量 y (单位: 只) 和植物覆盖面积 x (单位: 公顷) 的相关程度;

(2) 已知 20 个样区中有 8 个样区的这种野生动物数量低于样本平均数, 从 20 个样区中随机抽取 2 个, 记抽到这种野生动物数量低于样本平均数的样区的个数为 X , 求随机变量 X 的分布列.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n})(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n})}} = \frac{800 - \frac{80 \times 9000}{20}}{\sqrt{(80^2 - \frac{80^2}{20})(9000^2 - \frac{9000^2}{20})}} = \frac{800 - 3600}{\sqrt{(6400 - 3200)(81000000 - 40500000)}} = \frac{-2800}{\sqrt{3200 \times 40500000}} = \frac{-2800}{\sqrt{13056000000}} = \frac{-2800}{114263.5} \approx -0.0245$

16. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1 B_1 C_1$ 中, 侧面 $ACC_1 A_1$ 是菱形, 且与平面 $A_1 B C$ 垂直, $BC \perp AC$, $AA_1 = AC = 4, BC = 2$.



- (1) 证明: $BC \perp$ 平面 $ACC_1 A_1$;
- (2) 棱 CC_1 上是否存在一点 D , 使得直线 $A_1 D$ 与平面 $ABB_1 A_1$ 所成角为 30° ? 若存在, 请确定点 D 的位置; 若不存在, 请说明理由.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \dots + \frac{1}{n}a_n = a_{n+1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = 2^n a_n$, 记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $n \geq 3$ 时, $T_n > n \cdot 2^{n-1} - 4$.

18. 已知直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x, l_2: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$, 动点 A, B 分别在直线 l_1, l_2 上, $|AB| = 2\sqrt{2}$, M 是线段 AB 的中点, 记点 M 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求曲线 Γ 的方程;

(2) 已知点 $P(2, 1)$, 过点 P 作直线 l 与曲线 Γ 交于不同的两点 C, D , 线段 CD 上一点 Q 满足 $\frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|QC|}{|QD|}$,

求 $|OQ|$ 的最小值.

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2x + b$ ($b > 2$).

(1) 证明: $f(x)$ 恰有一个零点 a , 且 $a > 1, b > 2$;

(2) 我们曾学习过“二分法”求函数零点的近似值, 另一种常用的求零点近似值的方法是“牛顿切线法”任取 $x_1 \in (1, a)$, 实施如下步骤: 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处作 $f(x)$ 的切线, 交 x 轴于点 $x_2 < 0$; 在点 $(x_2, f(x_2))$ 处作 $f(x)$ 的切线, 交 x 轴于点 $x_3 < 0$; 一直继续下去, 可以得到一个数列 $\{x_n\}$, 它的各项是 $f(x)$ 不同精确度的零点近似值.

(i) 设 $x_{n+1} = g(x_n)$, 求 $g(x_n)$ 的解析式;

(ii) 证明: 当 $x_1 \in (1, a)$, 总有 $x_n < x_{n-1} < a$.

则函数 $f(x) = \log_2(x - x - 1)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 又 $f(1) = 0$, 则

$$f(m) < 0 = f(1) \Rightarrow m < 1 \Rightarrow m < 0.$$

故选: D

5. 根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 7.174$. 依据 0.005 的独立性检验, 结论为()

	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- A. 变量 x 与 y 独立
- B. 变量 x 与 y 独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.005
- C. 变量 x 与 y 不独立
- D. 变量 x 与 y 不独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.005

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据独立性检验的基本思想可得结论.

【详解】 因为 $\chi^2 = 7.174 < 7.879 = \chi_{0.005}^2$,

所以, 依据 0.005 的独立性检验, 我们认为变量 x 与 y 独立,

故选: A.

6. 若直线 $ax + by = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{4}$ 与圆 O ()

- A. 外切
- B. 相交
- C. 内切
- D. 没有公共点

【答案】 B

【解析】

【分析】 由直线 $ax + by = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 得 $a^2 + b^2 = 1$, 则圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{4}$ 的圆心在圆 O 上, 两圆相交.

【详解】 直线 $ax + by = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切,

则圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $ax + by = 1$ 的距离等于圆 O 的半径 1 ,

$$\text{即 } d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1, \text{ 得 } a^2 + b^2 = 1.$$

圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{4}$ 的圆心坐标为 a, b ，半径为 $\frac{1}{2}$ ，

其圆心在圆 O 上，所以两圆相交.

故选：B

7. 已知 $\sqrt{3}\sin\left(\frac{6}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{6}$ ，则 $\cos\left(\frac{5}{6}\right) =$ ()

A. $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$

B. $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

D. $\frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据辅助角公式求得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$ ，结合角的范围可得 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ ，继而利用两角差的余弦公式，即可求得答案.

【详解】因为 $\sqrt{3}\sin\left(\frac{6}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{6}$ ，

故 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{5}$ ，则 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$ ，

而 $\frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$ ，故 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ ，

故 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{4}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$

故选：B

8. 设 10 个 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 服从 50 ，随机变量 ξ_1 取值 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 的概率均为 0.2 ，随机变量 ξ_2 取值

$\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{X_2 + X_3}{2}, \frac{X_3 + X_4}{2}, \frac{X_4 + X_5}{2}, \frac{X_5 + X_1}{2}$ 的概率也均为 0.2 。若记 D_1, D_2 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差，则

()

A. $D_1 > D_2$

B. $D_1 = D_2$

C. $D_1 < D_2$

D. D_1 与 D_2 的大小关系与 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 的取值有关

【答案】C

【解析】

【分析】根据期望的公式推出 E_1, E_2 ，再根据方差的计算公式可得 D_1, D_2 的表达式，结合基本不等式，即可判断 D_1, D_2 的大小，即得答案.

【详解】由题意得 $E_1 = 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$,

$$E_2 = 0.2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_4 + x_5}{2} + \frac{x_5 + x_1}{2} \right) = 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5),$$

故 $E_1 = E_2$,

记 $\bar{x} = E_1 = E_2$

$$\begin{aligned} \text{则 } D_1 &= 0.2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) - 5\bar{x}^2 \\ &= 0.2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 5\bar{x}^2) \end{aligned}$$

$$= 0.2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 5\bar{x}^2)$$

$$\text{同理 } D_2 = 0.2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2}^2 + \frac{x_2 + x_3}{2}^2 + \frac{x_3 + x_4}{2}^2 + \frac{x_4 + x_5}{2}^2 + \frac{x_5 + x_1}{2}^2 \right) - 5\bar{x}^2$$

$$\text{因为 } 10(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) \geq 50\bar{x}^2, \text{ 则 } \frac{x_1 + x_2}{2}^2 + \frac{x_2 + x_3}{2}^2 + \frac{x_3 + x_4}{2}^2 + \frac{x_4 + x_5}{2}^2 + \frac{x_5 + x_1}{2}^2 \geq 5\bar{x}^2,$$

$$\text{故 } \frac{x_1 + x_2}{2}^2 + \frac{x_2 + x_3}{2}^2 + \frac{x_3 + x_4}{2}^2 + \frac{x_4 + x_5}{2}^2 + \frac{x_5 + x_1}{2}^2 \geq 5\bar{x}^2,$$

即得 $D_1 \leq D_2$, D_1 与 D_2 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的取值无关,

故选: C

二 多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不重合的平面, 则下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$

B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$

C. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \beta$

D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $m \parallel n$

【答案】BC

【解析】

【分析】对于AD，举反例排除即可；对于B，利用方向向量与法向量判断空间线面的位置关系即可判断；对于C，利用面面平行的性质即可判断。

【详解】对于A，当 $m \parallel n$ 时， m, n 有可能异面，故A错误；

对于B，因为 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ ，

所以 m, n 对应的方向向量 \vec{m}, \vec{n} 分别是 \vec{a}, \vec{b} 的法向量，

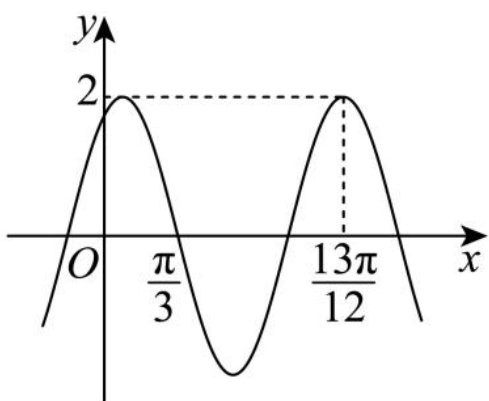
又 $m \parallel n$ ，所以 $\vec{m} \parallel \vec{n}$ ，所以 $\alpha \parallel \beta$ ，故B正确；

对于C，因为 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$ ，由面面平行的性质易知 $m \perp \beta$ ，故C正确；

对于D，当 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, n \perp \beta$ 时， m, n 有可能异面，故D错误。

故选：BC.

10. 已知函数 $f(x) = 2\cos x$ 的部分图象如图所示，则 ()



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到

D. 函数 $F(x) = f(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24}) - f(x - \frac{\pi}{6})$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据周期可得 $\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ ，进而根据函数的不等式即可根据周期，单调性

以及平移求解 ABC，利用换元法，结合二次函数的性质即可求解 D.

【详解】由图可得：A = 2，

$$\text{又 } \frac{3T}{4} - \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = 0,$$

$$T = \pi, \text{ 又 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,$$

$$y = 2\cos(2x),$$

$$\text{将 } \frac{13\pi}{12} \text{ 代入 } y = 2\cos(2x) \text{ 得 } \cos \frac{13\pi}{6} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{13\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } \frac{13\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$f(x) = 2\cos 2x - \frac{13\pi}{6} = 2k\pi = 2\cos 2x - \frac{\pi}{6},$$

对于 A, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故正确;

$$\text{对于 B, 令 } 2k\pi - \pi = 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} = x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z},$$

可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$ 时, 单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$, 故 B

正确;

对于 C, 函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 所得到的函数解析式为:

$$y = 2\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(2x - \frac{2\pi}{3}) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \neq f(x), \text{ 故 C 不正确;}$$

$$\text{对于 D, } F(x) = f(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24}) = f(x - \frac{\pi}{6}) = 2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sin 2x - \sqrt{2} \cos x - \sin x = 4\sin x \cos x,$$

$$\text{令 } t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{ 所以}$$

$$F(x) = \sqrt{2} \cos x - \sin x = 4\sin x \cos x = \sqrt{2}t - 2t^2 = 1 - 2t^2 = \sqrt{2}t - 2t^2 = -2(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{9}{4},$$

故最小值为 $\frac{9}{4}$, D 正确,

故选: ABD

11. 双曲线具有如下性质: 双曲线在任意一点处的切线平分该点与两焦点连线的夹角. 设 O 为坐标原点, 双

曲线 $C: \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点 A 到一条渐近线的距离为 2, 右支上一动点 P

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/206230213242011004>