

回顾

光波的基本性质

1.1 介绍麦克斯韦电磁理论的要点。重点要了解麦克斯韦方程组的意义及如何由交变的电场和磁场产生电磁波。

$$\oint_C E \cdot dl = - \iint_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \quad 1-1$$

$$\iint_A D \cdot ds = \iiint_V \rho \cdot dv \quad 1-2$$

$$\iint_A B \cdot ds = 0 \quad 1-3$$

$$\oint_C H \cdot dl = \iint_A (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot ds \quad 1-4$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1-5)$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \quad (1-6)$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \quad (1-7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1-8)$$

回顾

光波的基本性质

—无限扩展的均匀、各向同性、透明、无源介质中传播的电磁波，麦克斯韦方程具有特殊形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array}$$

σ, μ, ϵ 均为标量
 $\vec{J} = 0, \sigma = 0$
 $\rho = 0$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

回顾

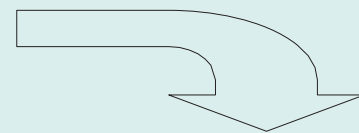
光波的基本性质

证明了光波的波动性

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

对时间求导



$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

回顾

光波的基本性质

$$\nabla^2 E(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$E(z, t) = E_1\left(z - \frac{t}{\sqrt{\mu}}\right) + E_2\left(z + \frac{t}{\sqrt{\mu}}\right)$$

当一维波函数取余弦或正弦函数的形式时称为一维简谐波。复杂波可以分解为简谐波。

此时的波函数可表示为：

$$E(z - vt) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)\right) + \dots$$

补充:

二阶常系数偏微分方程求解

- 二阶常系数齐次偏微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

写出特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

写出特征根

$$r_1 \quad r_2$$

根据特征根的不同情形写出微分方程通解

$$r_1 \neq r_2$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

例题

证明单色平面波的波函数 $E = A\cos(kz - \omega t)$ 是波动微分方程 $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ 的解。

思考一下 %%

回顾

光波的基本性质

1.2 光波的数学描述 平面波和球面波的波函数。

$$E(z - vt) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt) + \phi_0 \right] \longrightarrow \text{一维简谐平面波的复指数形式和复振幅}$$

$$= E_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi \frac{v}{\lambda} t + \phi_0 \right)$$

$$= E_0 \cos(kz - 2\pi vt + \phi_0)$$

$$= E_0 \cos \left(kz - \frac{2\pi}{T} t + \phi_0 \right)$$

$$= E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0)$$

$$E(z, t) = E_0 \exp[j(kz - \omega t + \phi_0)]$$

$$= E_0 \exp[j(kz + \phi_0)] \exp(-j\omega t)$$

$$= \boxed{E(z)} \exp(-j\omega t)$$

$$E(z) = E_0 \exp[j(kz + \phi_0)]$$

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} \Big|_{d\phi=0} = v$$

波的传播实际上就是位相的传播，位相的传播速度=波的传播速度

回顾

光波的数学描述

• 一维简谐平面波的波函数的有关参量

– 时间参量 某考察点处的波的位相随时间的变化

振动

- 时间周期
- 时间频率
- 时间角频率

$$T = \frac{\lambda}{|\nu|} \quad \nu = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

– 空间参量 某时刻波的位相随空间坐标的变化

- 空间周期
- 空间频率
- 空间角频率

$$\lambda \quad f = \frac{1}{\lambda} \quad k = \pm 2\pi f = \pm \frac{2\pi}{\lambda}$$

波形

– 时空参量关系

$$\omega = k\nu$$

第一章 光波的基本性质

- 介绍光波这种电磁波的基本概念、基本性质和数学的描述方法。

- 主要的内容：

- §1.1 介绍麦克斯韦电磁理论的要点。重点要了解麦克斯韦方程组的意义及如何由交变的电场和磁场产生电磁波。

- §1.2 光波的数学描述。平面波和球面波的波函数。

- §1.3 平面电磁波的性质。

- §1.4 平面电磁波在两种均匀、各项同性、透明媒质界面的传播——折反射定律及菲涅耳公式。

思考：当电磁波在三维空间传播，考察点位置坐标需要三个坐标变量，波动方程？

三维波的概念：

电磁波在三维空间中传播，确定空间考察点的位置需要用三维空间位置矢量 $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

用 $\mathbf{r}$ 代替 z ，则波函数可写成 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 或 $\mathbf{E}(x, y, z; t)$ ，按照一维标量波动微分方程的推导方式，可从麦克斯韦方程组推导出三维矢量波动微分方程

1. 2. 3 三维简谐平面波

1. 三维波动微分方程

三维波的概念:

电磁波在**三维空间**中传播, 确定空间**考察**点的位置需要用**三维空间**位置矢量 $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk$$

用 r 代替 z , 则波函数可写成 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 或 $\mathbf{E}(x, y, z; t)$, 按照一维标量波动微分方程的推导方式, 可从**麦克斯韦**方程组推导出**三维矢量波动微分方程**为:

$$E(x, y, z, t) = E_0 \exp[i(k \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Laplace微分算符的作用

一个标量函数的拉普拉斯运算（哈密尔顿算符的标量积）

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &\equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

一个矢量函数的拉普拉斯同上，但要对函数的每一分量做运算。

$$\nabla^2 \vec{f} = \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right)$$

拉普拉斯告诉我们一个函数的曲率。

三维简谐平面波

三维标量波的波动微分方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Laplace , :

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

可以证明，以上的方程的解的形式为：

$$E(x, y, z, t) = E(k_x x + k_y y + k_z z - k v t)$$

其中 k_x, k_y, k_z 是常矢量 $k = k_x i + k_y j + k_z k$ 的三个坐标轴分量

三维简谐平面波

- 三维波的波矢

三维波的波矢 k ，又称传播矢，波的传播方向完全由 k 确定

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

k_x, k_y 和 k_z 是波矢 k 的三个直角坐标分量

若 k 矢量的方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ，则：

$$|\vec{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\vec{k} = k(\cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k})$$

$$k_x = k \cos\alpha, k_y = k \cos\beta, k_z = k \cos\gamma$$

三维简谐平面波

- 三维波的波函数

$$E(x, y, z, t) = E(k_x x + k_y y + k_z z - k v t)$$

$$E(r, t) = E(k \cdot r - k v t + \phi_0)$$

$$\phi(r, t) = k \cdot r - k v t + \phi_0 \quad \text{表示三维波的位相}$$

ϕ_0 表示三维平面波在坐标原点处的初相位

三维简谐平面波

三维平面波

回顾

①波面的概念

按波面分类

平面波

球面波

柱面波

某一时刻 t_0 具有相同位相值 ϕ 的点的位置轨迹（或集合）称为光波的**波面或等相面**。

按以上的定义，光波波面形状的方程应为：

ϕ

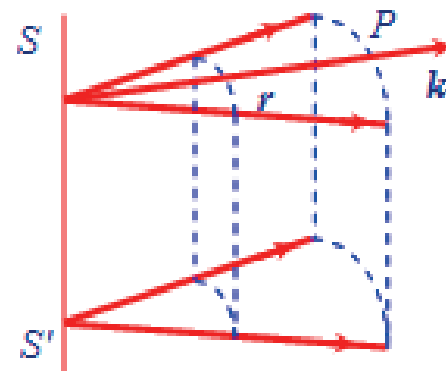
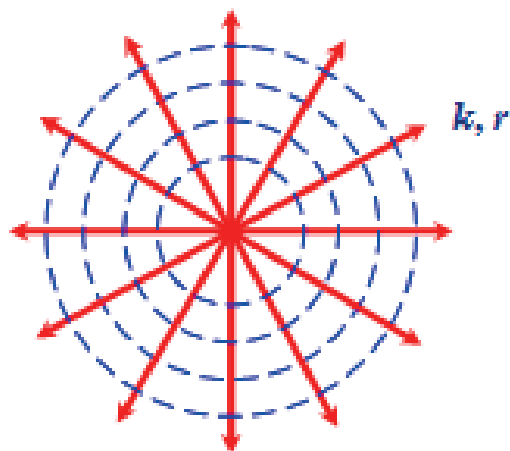
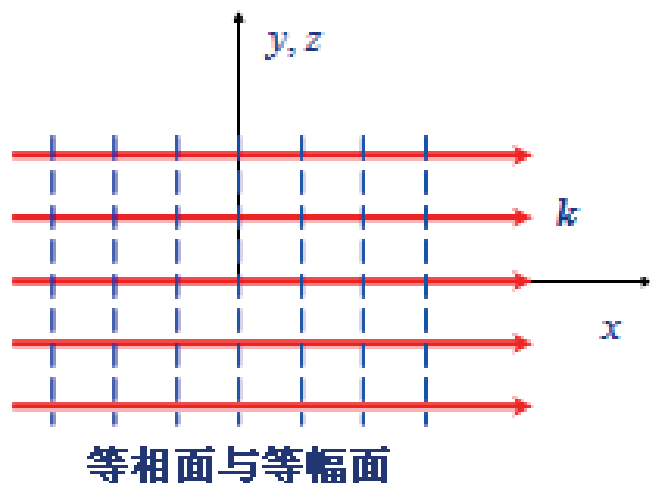
=



确定面形

通过以上的波的位相函数可知，波面的形状可以为：平面（波）、球面（波）、锥面（波），复杂（波）等。

三维简谐平面波



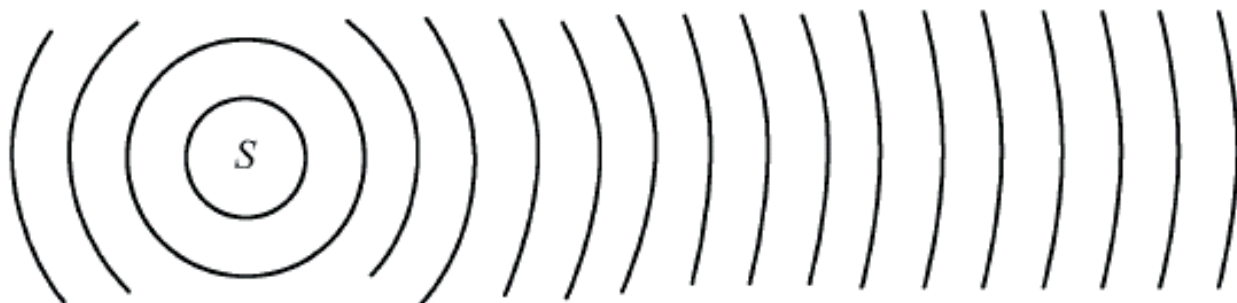
平面波的波面

发散球面波的波面

发散柱面波的波面

某一时刻 t_0 具有相同位相值 ϕ 的点的位置轨迹（或集合）称为光波的波面或等相面。

球面波可以转变为平面波：



球面波波面的一部分随距离增大而变为平面

特征：

平面波对应于无限远处理想点源发出的波；

球面波对应于有限远处理想点源发出的波；

柱面波对应无限长线波源发出的波；

平面波是波面曲率半径趋于无限大时的球面波或柱面波。

说明：讨论球面波和平面波问题具有普遍意义； 任何一个波源，都可以看成是由若干点波源组成的集合； 构成任何复杂波面的基元是球面波或平面波。

② 平面波：等相面为平面、且等相面上各点的扰动大小时刻相等的光波

(1-24) 式表示的一维简谐平面波是平面波：

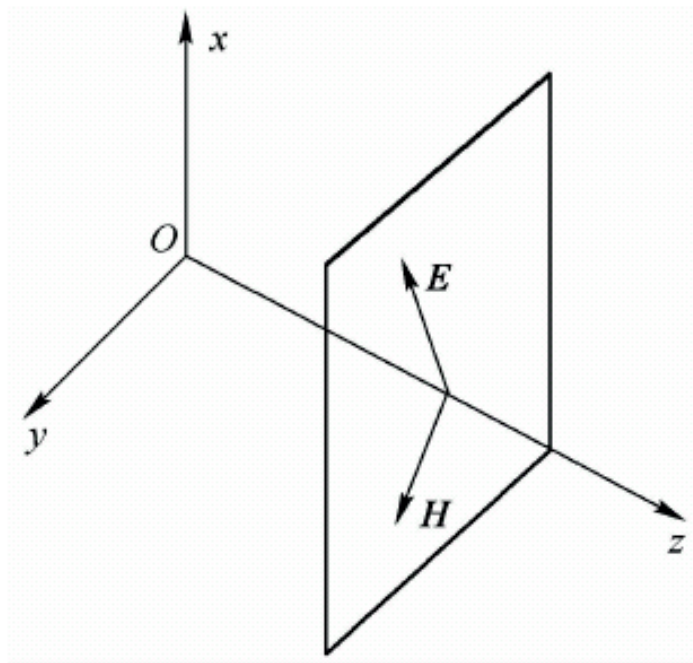
$$E(z-vt) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z-vt) + \phi_0 \right]$$

因为 $\phi(z, t_0) = (kz - kvt_0) + \phi_0 = C$ 的等相面
即为 $z = C'$ 的面

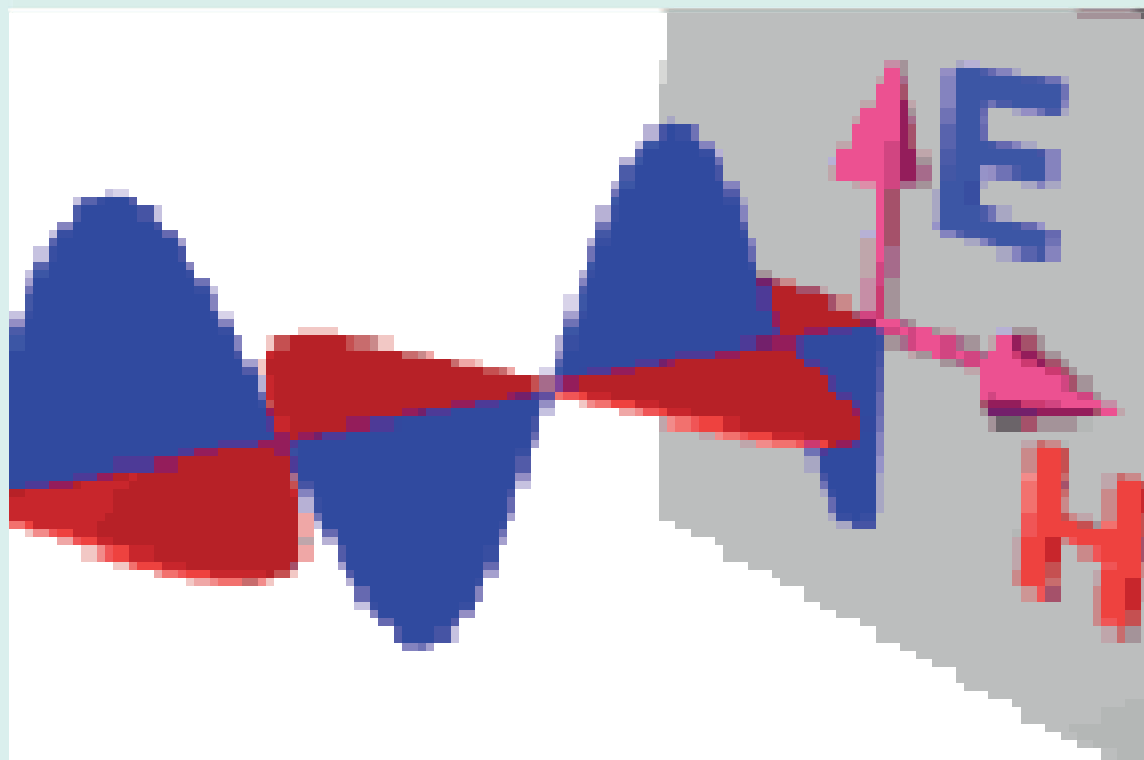
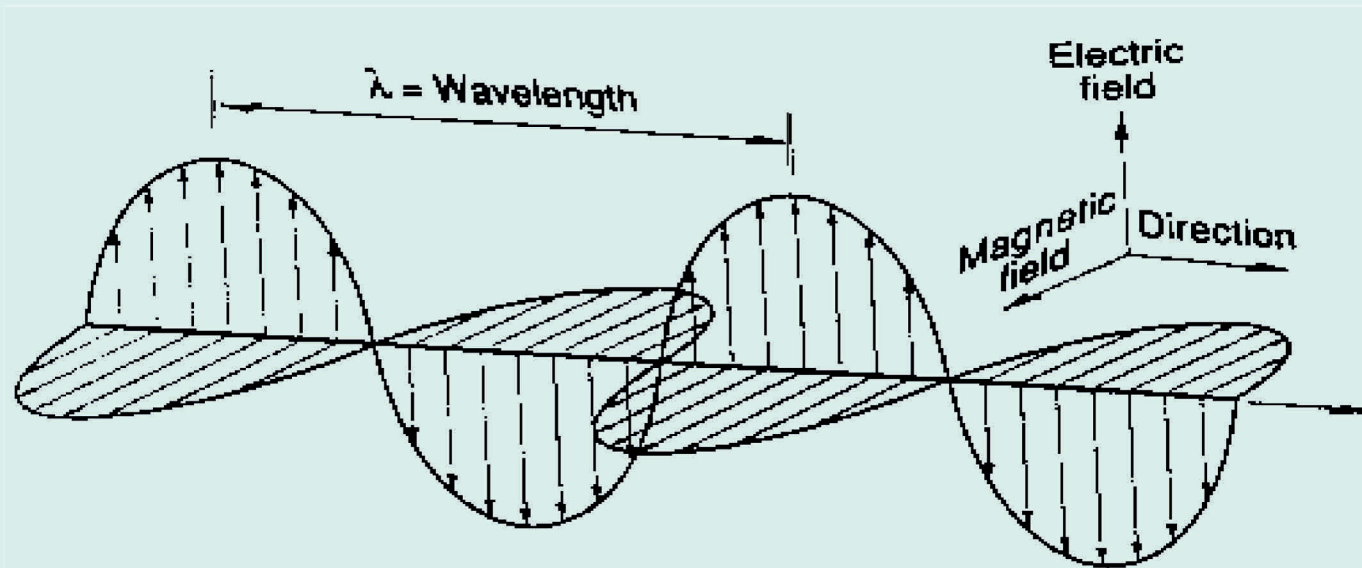
→ 平面

沿 z 方向传播的一维平面波

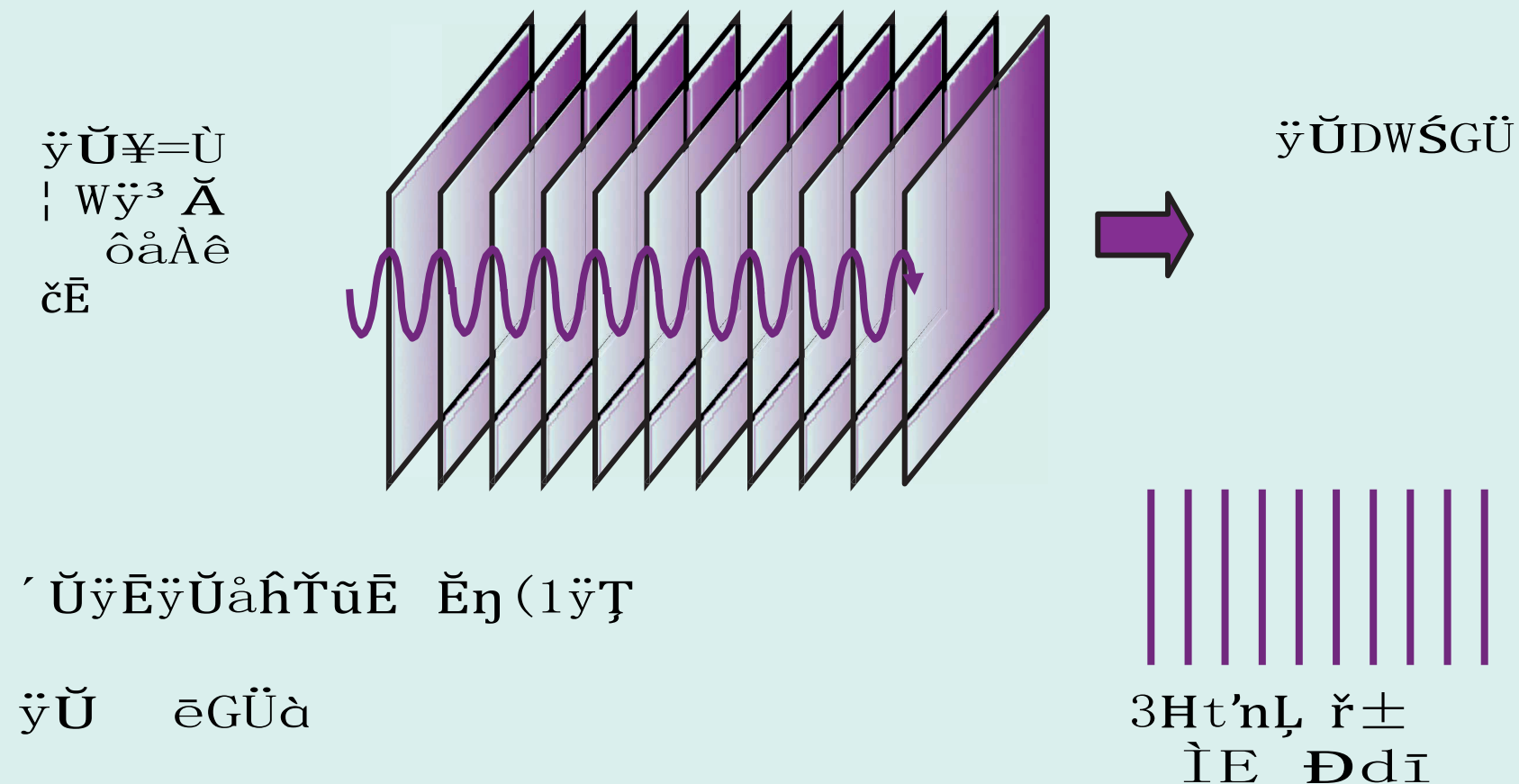
等相位面为无限大的平面



沿 z 方向传播的
平面电磁波



平面波的等相位面是一系列平面，称为“波面”或“波前”。它们遍布整个空间。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/207000146045006134>