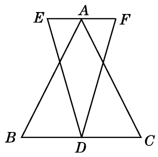
沪科版数学八年级上册第15章专训一：等腰三角形中四种常用作辅助线的方法

名师点金：在几何图形中添加辅助线，往往能把分散的条件集中，使隐蔽的条件显露，将复杂的问题简单化，例如：作“三线”中的“一线”，作平行线构造等腰(边)三角形，利用截长补短法证线段和、差关系或求角的度数，利用加倍折半法证线段的倍分关系．

方法1 作“三线”中的“一线”

1．如图，在△ABC中，AB＝AC，D是BC的中点，过点A作EF∥BC，且AE＝AF.求证：DE＝DF.



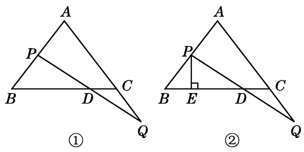
(第1题)

方法2 作平行线法

2．如图，在△ABC中，AB＝AC，点P从点B出发沿线段BA移动，同时，点Q从点C出发沿线段AC的延长线移动，点P，Q移动的速度相同，PQ与直线BC相交于点D.

(1)如图①，当点P为AB的中点时，求证：PD＝QD.

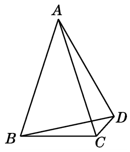
(2)如图②，过点P作直线BC的垂线，垂足为E，当P，Q在移动的过程中，线段BE，ED，CD中是否存在长度保持不变的线段？请说明理由.



(第2题)

方法3 **截长补短法**

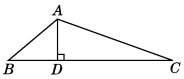
3．如图，在△ABC 中，AB＝AC，D 是△ABC 外一点，且∠ABD＝60°，∠ACD＝60°.求证：BD＋DC＝AB.



(第 3 题)

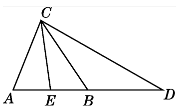
方法4 **加倍折半法**

4．如图，在△ABC 中，∠BAC＝120°，AD⊥BC 于 D，且 AB＋BD＝DC，求∠C 的度数.



(第 4 题)

5．如图，CE，CB 分别是△ABC，△ADC 的中线，且 AB＝AC.求证：CD＝2CE.



(第 5 题)

专训二：分类讨论思想在等腰三角形中的应用

名师点金：分类讨论思想是解题的一种常用方法，在等腰三角形中，往往会遇到条件或结论不唯一的情况，此时就需要分类讨论．通过正确地分类讨论，可以使复杂的问题得到清晰、完整、严密的解答．其解题策略为：先分类，再画图，后计算．

应用1 当顶角或底角不确定时，分类讨论

1．若等腰三角形中有一个角等于40°，则这个等腰三角形的顶角度数为(　　)

A．40°　　*B*．100°　　*C*．40°或70°　　*D*．40°或100°

2．已知等腰三角形ABC中，AD⊥BC于D，且$AD=\frac{1}{2}BC$，则等腰三角形ABC的底角的度数为(　　)

A．45°　　*B*．75°　　*C*．45°或75°　　*D*．65°

3．若等腰三角形的一个外角为64°，则底角的度数为________．

应用2 当底和腰不确定时，分类讨论

4．(2015·荆门)已知一个等腰三角形的两边长分别是2和4，则该等腰三角形的周长为(　　)

A．8或10　　*B*．8　　*C*．10　　*D*．6或12

5．等腰三角形的两边长分别为7和9，则其周长为________．

6．若实数x，y满足$|x-4|+(y-8)^2=0$，则以x，y的值为边长的等腰三角形的周长为________．

应用3 当高的位置关系不确定时，分类讨论

7．等腰三角形一腰上的高与另一边的夹角为25°，求这个三角形的各个内角的度数．

应用4 由腰的垂直平分线引起的分类讨论

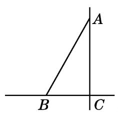
8．在三角形 ABC 中，AB＝AC，AB 边上的垂直平分线与 AC 所在的直线相交所得的锐角为 40°，求底角∠B 的度数．

应用5 由腰上的中线引起的分类讨论

9．等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 5 *cm*，一腰上的中线 BD 把其分为周长差为 3 *cm* 的两部分．求腰长．

应用6 点的位置不确定引起的分类讨论

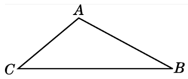
10．如图，在 *Rt*△ABC 中，∠ACB＝90°，AB＝2BC，在直线 BC 或 AC 上取一点 P，使得△PAB 为等腰三角形，则符合条件的点 P 共有(　　)



(第 10 题)

A．7 个　B．6 个　C．5 个　D．4 个

11．如图，在△ABC 中，BC＞AB＞AC，∠ACB＝40°，如果 D，E 是直线 AB 上的两点，且 AD＝AC，BE＝BC，求∠DCE 的度数．



(第 11 题)

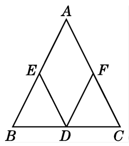
专训三：三角形中的五种常见证明类型

名师点金：学习了全等三角形及等腰三角形的性质和判定后，与此相关的几何证明题的类型非常丰富，常见的类型有：证明数量关系，位置关系，线段的倍分关系、和差关系、不等关系等．

类型1　证明数量关系

题型 1　证明线段相等

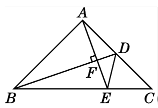
1．如图，在△ABC 中，AB＝AC，D 是 BC 的中点，E，F 分别是 AB，AC 上的点，且 AE＝AF.求证：DE＝DF.



(第 1 题)

题型 2　证明角相等

2．如图，在△ABC 中，AB＝AC，∠BAC＝90°，D 为 AC 的中点，AE⊥BD 于 F 交 BC 于 E.求证：∠ADB＝∠CDE.

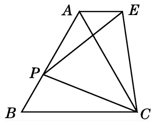


(第 2 题)

类型2 证明位置关系

题型1　证明平行关系

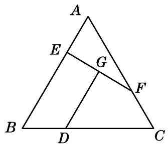
3．已知△ABC为等边三角形，点P在AB上，以CP为边长作等边三角形PCE，连接AE.求证：AE∥BC.



(第3题)

题型2　证明垂直关系

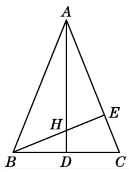
4．如图，在△ABC中，AB＝AC，点D，E，F分别在边BC，AB，AC上，且BD＝CF，BE＝CD，G是EF的中点．求证：DG⊥EF.



(第4题)

类型3 证明线段的倍分关系

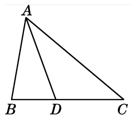
5．如图，在△ABC中，AB＝AC，AD，BE是△ABC的高，AD，BE相交于点H，且AE＝BE.求证：AH＝2BD.



(第5题)

类型4 证明线段的和差关系

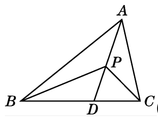
6．如图，在△ABC中，∠ABC＝2∠C，AD平分∠BAC.求证：AB＋BD＝AC.



(第 6 题)

类型5 证明线段的不等关系

7. 如图，AD 是△ABC 中∠BAC 的平分线，P 是 AD 上的任意一点，且 AB＞AC.求证：AB－AC＞PB－PC.



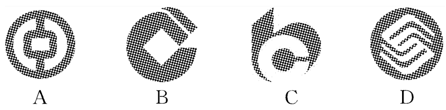
(第 7 题)

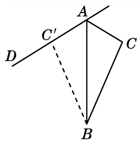
专训四：四种常见热门考点

名师点金：**本章内容在中考试题中一直占有重要的地位，属必考内容，考查形式多以选择、填空形式出现，其考查内容主要有轴对称和轴对称图形的识别、最短距离问题、与翻折有关的计算和证明题等．**

考点1 轴对称图形与轴对称

1．(2015·重庆)下列图形是轴对称图形的是(　　)





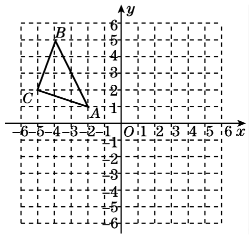
(第 2 题)

2．(2015·乌鲁木齐)如图，△ABC 的面积等于 6，边 AC＝3，现将△ABC 沿 AB 所在直线翻折，使点 C 落在直线 AD 上的 C′处，点 P 在直线 AD 上，则线段 BP 的长不可能是(　　)

A．3　B．4　C．5　D．6

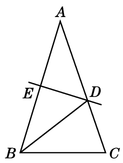
3．(2015·绥化)点 A(－3，2)关于 x 轴的对称点 A′的坐标为________．

4．(2014·宁夏)如图，在平面直角坐标系中，△ABC 三个顶点的坐标分别为 A(－2，1)，B(－4，5)，C(－5，2)，画出△ABC 关于 y 轴对称的△$A_1B_1C_1$.



(第 4 题)

考点2　**线段垂直平分线与角平分线**

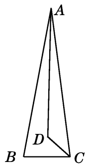


(第 5 题)

5．如图，在△ABC 中，AB＝AC，∠A＝36°，AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于点 D，交 AB 于点 E，则下列结论错误的是(　　)

A．BD 平分∠ABC

B．△BCD 的周长等于 AB＋BC



(第 6 题)

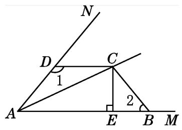
C．AD＝BD＝BC

D．点 D 是线段 AC 的中点

6．如图，已知在△ABC 中，AB＝AC，∠BAC 和∠ACB 的平分线相交于点 D，∠ADC＝130°，那么∠CAB 的大小是(　　)

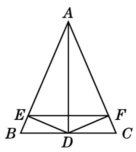
A．80°　　*B*．50°　　*C*．40°　　*D*．20°

7．如图，已知 C 是∠MAN 的平分线上一点，CE⊥AB 于点 E，点 B，D 分别在 AM，AN 上，且 AE＝错误!(AD＋AB)．问：∠1 和∠2 有何关系？



(第 7 题)

考点3 等腰三角形的判定与性质



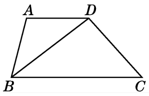
(第 8 题)

8．如图，在△ABC 中，AB＝AC，AD 平分∠BAC，DE⊥AB，DF⊥AC，E，F 分别为垂足，则下列四个结论：

(1)∠DEF＝∠DFE；(2)AE＝AF；(3)DA 平分∠EDF；(4)AD 垂直平分 EF. 其中正确的有(　　)

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

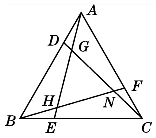
9．(中考·淄博)如图，AD∥BC，BD 平分∠ABC.求证：AB＝AD.



(第 9 题)

考点4 **等边三角形的性质与判定**

10．如图，在等边三角形 ABC 中，D，E，F 分别为 AB，BC，CA 上一点(不是中点)，且 AD＝BE＝CF，AE 与 CD，BF 分别交于点 G，H，BF 与 CD 交于点 N，则△GHN 是



(第 10 题)

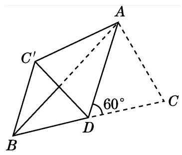
(　　)

A．等边三角形

B．腰和底边不相等的等腰三角形

C．直角三角形

D．不等边三角形

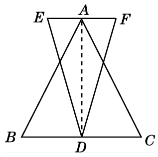


(第 11 题)

11．如图，AD 是△ABC 的中线，∠ADC＝60°，BC＝6，把△ABC 沿直线 AD 折叠，点 C 落在 C′处，连接 BC′，则 BC′的长为________.

答案

专训一



(第 1 题)

1．**证明**：如图，连接 AD.

∵AB＝AC，BD＝CD，

∴AD⊥BC.

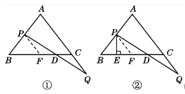
∵EF∥BC，∴AD⊥EF.

∵AE＝AF，

∴AD 垂直平分 EF.

∴DE＝DF.

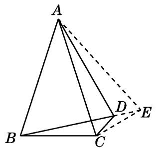
2．(1)**证明**：如图①，过点 P 作 PF∥AC 交 BC 于 F.∵点 P 和点 Q 同时出发，且速度相同，∴BP＝CQ.∵PF∥AQ，∴∠PFB＝∠ACB，∠DPF＝∠DQC.又∵AB＝AC，∴∠B＝∠ACB，∴∠B＝∠PFB，∴BP＝FP，∴FP＝CQ.在△PFD 和△QCD 中，∠DPF＝∠DQC，∠PDF＝∠QDC，FP＝CQ，
∴△PFD≌△QCD(AAS)，∴PD＝QD.



(第 2 题)

(2)**解**：线段 ED 的长度保持不变．理由如下：如图②，过点 P 作 PF∥AC 交 BC 于 F.由(1)知 PB＝PF.∵PE⊥BF，∴BE＝EF.由(1)知△PFD≌△QCD，∴FD＝CD，∴ED＝EF＋FD＝BE＋CD＝$\frac{1}{2}$BC，∴线段 ED 的长度保持不变．

3．**证明**：如图，延长 BD 至 E，使 BE＝AB，连接 CE，AE.



(第 3 题)

∵∠ABE＝60°，BE＝AB，

∴△ABE 为等边三角形.

∴∠AEB＝60°，AB＝AE.

又∵∠ACD＝60°，

∴∠ACD＝∠AEB.

∵AB＝AC，AB＝AE，

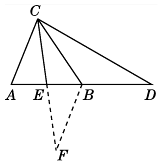
∴AC＝AE.

∴∠ACE＝∠AEC.

∴∠DCE＝∠DEC.∴DC＝DE.

∴AB＝BE＝BD＋DE＝BD＋DC，即 BD＋DC＝AB.

4．**解**：在 DC 上截取 DE＝BD，连接 AE，∵AD⊥BC，BD＝DE，∴AD 是线段 BE 的垂直平分线，∴AB＝AE，∴∠B＝∠AEB.∵AB＋BD＝DC，DE＝BD，∴AB＋DE＝CD.而 CD＝DE＋EC，∴AB＝EC，∴AE＝EC.∴∠EAC＝∠C，可设∠EAC＝∠C＝x，∵∠AEB 为△AEC 的外角，∴∠AEB＝∠EAC＋∠C＝2x，∴∠B＝2x，∴∠BAE＝180°－2x－2x＝180°－4x.∵∠BAC＝120°，∴∠BAE＋∠EAC＝120°，即 180°－4x＋x＝120°，解得 x＝20°，则∠C＝20°.



(第 5 题)

5．**证明**：如图，延长 CE 到点 F，使 EF＝CE，连接 FB，则 CF＝2CE.∵CE 是△ABC 的中线，∴AE＝BE.在△BEF 和△AEC 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

∴△BEF≌△AEC(SAS).

∴∠EBF＝∠A，BF＝AC.

又∵AB＝AC，∴∠ABC＝∠ACB.∴∠CBD＝∠A＋∠ACB＝∠EBF＋∠ABC＝∠CBF.

∵CB 是△ADC 的中线，

∴AB＝BD.又∵AB＝AC，AC＝BF，∴BF＝BD.

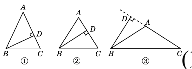
在△CBF 与△CBD 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBF=\angle CBD, \\ BF=BD, \end{cases}$ ∴△CBF≌△CBD(SAS)．∴CF＝CD.∴CD＝2CE.

专训二

1．*D*　**2.***C*　**3.**32°　**4.***C*　**5.**23 或 25　**6.**20

7．**解**：设 AB＝AC，BD⊥AC；

(1)高与底边的夹角为 25°时，高一定在△ABC 的内部，如图①，∵∠DBC＝25°，∴∠C＝90°－∠DBC＝90°－25°＝65°，∴∠ABC＝∠C＝65°，∠A＝180°－2×65°＝50°.


(第 7 题)

(2)当高与另一腰的夹角为 25°时，

如图②，高在△ABC 的内部时，

∵∠ABD＝25°，∴∠A＝90°－∠ABD＝65°，

∴∠C＝∠ABC＝(180°－∠A)÷2＝57.5°；

如图③，高在△ABC 的外部时，∵∠ABD＝25°，

∴∠BAD＝90°－∠ABD＝90°－25°＝65°，∴∠BAC＝180°－65°＝115°，

∴∠ABC＝∠C＝(180°－115°)÷2＝32.5°，

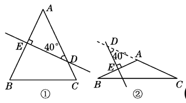
故三角形各个内角的度数为：65°，65°，50°或 65°，57.5°，57.5°或 115°，32.5°，32.5°.

点拨：由于题目中的“另一边”没有指明是“腰”还是“底边”，因此必须进行分类讨论，另外，还要结合图形，分高在三角形内还是在三角形外.

8．**解**：此题分两种情况：

(1)如图①，AB 边的垂直平分线与 AC 边交于点 D，∠ADE＝40°，则∠A＝50°，

∵AB＝AC，∴∠B＝(180°－50°)÷2＝65°.


(第 8 题)

(2)如图②，AB 边的垂直平分线与 CA 的延长线交于点 D，∠ADE＝40°，则∠DAE＝50°，∴∠BAC＝130°.

∵AB＝AC，∴∠B＝(180°－130°)÷2＝25°.

故∠B 的大小为 65°或 25°.

9．**分析**：由于题目中没有指明是“(AB＋AD)－(BC＋CD)”为 3 *cm*，还是“(BC＋CD)－(AB＋AD)”为 3 *cm*，因此必须分两种情况讨论.

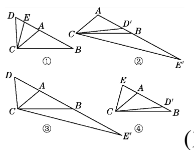
解：∵BD 为 AC 边上的中线，∴AD＝CD，(1)当(AB＋AD)－(BC＋CD)＝3 *cm* 时，有 AB－BC＝3 *cm*，∵BC＝5 *cm*，∴AB＝5＋3＝8(*cm*)；

(2)当(BC＋CD)－(AB＋AD)＝3 *cm* 时，有 BC－AB＝3 *cm*，∵BC＝5 *cm*，∴AB＝5－3＝2(*cm*)，

但是当 AB＝2 *cm* 时，三边长分别为 2 *cm*，2 *cm*，5 *cm*.而 2＋2＜5，不能构成三角形，舍去．故腰长为 8 *cm*.

10．*B*

11．**解**：(1)当点 D、E 在点 A 的同侧，且都在 BA 的延长线上时，如图①，


(第 11 题)

∵BE＝BC，∴∠BEC＝(180°－∠ABC)÷2，

∵AD＝AC，∴∠ADC＝(180°－∠DAC)÷2＝∠BAC÷2，∵∠DCE＝∠BEC－∠ADC，

∴∠DCE＝(180°－∠ABC)÷2－∠BAC÷2＝(180°－∠ABC－∠BAC)÷2＝∠ACB÷2＝40°÷2＝20°.

(2)当点 D、E 在点 A 的同侧，且点 D 在 D′的位置，E 在 E′的位置时，如图②，

与(1)类似地也可以求得∠D′CE′＝∠ACB÷2＝20°.

(3)当点 D、E 在点 A 的两侧，且 E 点在 E′的位置时，如图③，

∵BE′=BC，

∴∠BE′C=(180°－∠CBE′)÷2=∠ABC÷2，

∵AD=AC，

∴∠ADC=(180°－∠DAC)÷2=∠BAC÷2，

又∵∠DCE′=180°－(∠BE′C+∠ADC)，

∴∠DCE′=180°－(∠ABC+∠BAC)÷2=180°－(180°－∠ACB)÷2=90°+∠ACB÷2=90°+40°÷2=110°.

(4)当点D、E在点A的两侧，且点D在D′的位置时，如图④，

∵AD′=AC，∴∠AD′C=(180°－∠BAC)÷2，

∵BE=BC，∴∠BEC=(180°－∠ABC)÷2，

∴∠D′CE=180°－(∠D′EC+∠ED′C)=180°－(∠BEC+∠AD′C)

=180°－[(180°－∠ABC)÷2+(180°－∠BAC)÷2]

=(∠BAC+∠ABC)÷2=(180°－∠ACB)÷2

=(180°－40°)÷2=70°.综上所述，∠DCE的度数为20°或110°或70°.

专训三

1．证明：连接AD.

∵AB=AC，D是BC的中点，∴∠EAD=∠FAD.

在△AED和△AFD中，$\begin{cases}AE=AF,\\ \angle EAD=\angle FAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

∴△AED≌△AFD(SAS)．∴DE=DF.

2．证明：过点C作CG⊥AC交AE的延长线于G，则CG∥AB，∴∠BAF=∠G.

又∵AF⊥BD，AC⊥CG，

∴∠BAF+∠ABD=90°，∠CAG+∠G=90°.

∴∠ABD=∠CAG.

在△ABD和△CAG中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAG,\\ AB=CA,\\ \angle BAD=\angle ACG=90^\circ,\end{cases}$

∴△ABD≌△CAG(ASA).

∴AD=CG，∠ADB=∠G.

又∵D为AC的中点，∴AD=CD，∴CD=CG.

∵AB=AC，∴∠ABC=∠DCE.

又∵AB∥CG，∴∠ABC＝∠GCE.∴∠DCE＝∠GCE.

又∵CE＝CE，

∴△CDE≌△CGE(SAS)．∴∠CDE＝∠G.

∴∠ADB＝∠CDE.

3．**证明**：∵△ABC，△PCE 均为等边三角形，

∴BC＝AC，PC＝EC，∠ACB＝∠B＝∠PCE＝60°.

∴∠ACB－∠ACP＝∠PCE－∠ACP，

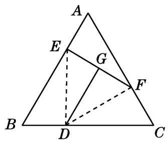
即∠BCP＝∠ACE.

在△CBP 和△CAE 中，$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCP=\angle ACE,\\ PC=EC,\end{cases}$

∴△CBP≌△CAE(SAS)．

∴∠CAE＝∠B＝60°.

∴∠CAE＝∠ACB.∴AE∥BC.



(第 4 题)

4．**证明**：如图，连接 ED，FD.

∵AB＝AC，∴∠B＝∠C.

在△BDE 和△CFD 中，$\begin{cases}BD=CF,\\ \angle B=\angle C,\\ BE=CD,\end{cases}$

∴△BDE≌△CFD(SAS)．

∴DE＝DF.

又∵G 是 EF 的中点，

∴DG⊥EF.

5．**证明**：∵AD，BE 是△ABC 的高，∴∠ADB＝∠AEB＝90°，又∵∠BHD＝∠AHE，∴∠EBC＝∠EAH.

在△BCE 和△AHE 中，$\begin{cases}\angle EBC=\angle EAH,\\ BE=AE,\\ \angle BEC=\angle AEH=90°,\end{cases}$

∴△BCE≌△AHE(ASA)．∴AH＝BC.

又∵AB＝AC，AD⊥BC，

∴BC＝2BD.∴AH＝2BD.

6．**证明**：如图，延长 CB 至 E，使 BE＝BA，则∠BAE＝∠E，

∴∠ABC＝2∠E.

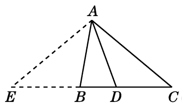
又∵∠ABC＝2∠C，∴∠E＝∠C，∴AE＝AC.

∵AD 平分∠BAC，∴∠BAD＝∠DAC.

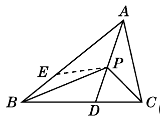
∵∠BAE＝∠E，∠E＝∠C，∴∠BAE＝∠C.

又∵∠EAD＝∠BAE＋∠BAD，∠EDA＝∠C＋∠DAC，∴∠EAD＝∠EDA.∴AE＝DE.

∴AC＝DE＝BE＋BD＝AB＋BD.



(第 6 题)



(第 7 题)

7．**证明**：如图，在 AB 上截取 AE，使 AE＝AC，连接 PE.

∵AD 是∠BAC 的平分线，∴∠EAP＝∠CAP.

在△AEP 和△ACP 中，$\begin{cases} AE=AC, \\ \angle EAP=\angle CAP, \\ AP=AP, \end{cases}$

∴△AEP≌△ACP(SAS)，∴PE＝PC.

在△PBE 中，BE＞PB－PE，

即 AB－AC＞PB－PC.

专训四

1．*A*　**2.***A*　**3.**(－3，－2)

4．**解**：如图所示.