

# 强度计算.结构分析：静力学分析：7.梁与板的静力学分析

## 1 强度计算与结构分析：静力学分析之梁与板

### 1.1 基础概念与理论

#### 1.1.1 梁的类型与特性

梁是结构工程中常见的构件，用于承受横向载荷并传递给支撑结构。根据梁的支撑方式和形状，梁可以分为以下几种类型：

- 简支梁：两端自由支撑，是最常见的梁类型。
- 悬臂梁：一端固定，另一端自由。
- 连续梁：有三个或更多支撑点，可以跨越多个支撑。
- 外伸梁：两端支撑，但一端或两端超出支撑点。

梁的特性主要涉及其截面形状和材料属性。截面形状如矩形、I形、圆形等，影响梁的抗弯和抗剪能力。材料属性如弹性模量和泊松比，决定梁的变形和应力分布。

##### 1.1.1.1 示例：简支梁的静力学分析

假设有一根简支梁，长度为  $L$ ，承受均布载荷  $q$ ，材料的弹性模量为  $E$ ，截面惯性矩为  $I$ 。我们可以通过以下公式计算梁的最大挠度和最大应力：

- 最大挠度：

$$\delta_{max} = \frac{qL^4}{8EI}$$

- 最大应力：

$$\sigma_{max} = \frac{6qL^2}{bh^2}$$

其中， $b$  和  $h$  分别是梁截面的宽度和高度。

# Python 示例代码

```
def simple_beam_analysis(L, q, E, I, b, h):
```

```
    """
```

```
    计算简支梁的最大挠度和最大应力
```

```
    :param L: 梁的长度
```

```
    :param q: 均布载荷
```

```
    :param E: 弹性模量
```

```
    :param I: 截面惯性矩
```

```
    :param b: 截面宽度
```

```
    :param h: 截面高度
```

```
    :return: 最大挠度和最大应力
```

```
    """
```

```

delta_max = q * L**4 / (8 * E * I)
sigma_max = 6 * q * L**2 / (b * h**2)
return delta_max, sigma_max

# 数据样例
L = 4.0 # 梁的长度, 单位: 米
q = 1000.0 # 均布载荷, 单位: 牛/米
E = 200e9 # 弹性模量, 单位: 帕斯卡
I = 1.0e-4 # 截面惯性矩, 单位: 米^4
b = 0.2 # 截面宽度, 单位: 米
h = 0.4 # 截面高度, 单位: 米

# 调用函数
delta_max, sigma_max = simple_beam_analysis(L, q, E, I, b, h)
print(f"最大挠度: {delta_max:.3f} 米")
print(f"最大应力: {sigma_max:.3f} 帕斯卡")

```

### 1.1.2 板的分类与基本假设

板是平面结构，用于承受垂直于其平面的载荷。板的分类依据其厚度与跨度的比例，以及支撑条件：

- **薄板**：厚度远小于跨度。
- **厚板**：厚度与跨度相近。
- **单向板**：主要在一个方向上弯曲。
- **双向板**：在两个方向上都有弯曲。

板的静力学分析基于以下基本假设：

- **平面假设**：板的中面在变形后仍保持为平面。
- **垂直假设**：板的厚度方向上纤维垂直于中面。
- **无剪切变形假设**：忽略板厚度方向的剪切变形。

#### 1.1.2.1 示例：单向板的静力学分析

考虑一个单向板，尺寸为  $a \times b$ ，厚度为  $t$ ，承受均布载荷  $p$ 。假设板在  $a$  方向上弯曲，我们可以通过以下公式计算板的最大挠度：

$$\delta_{max} = \frac{pb^4}{384EI}$$

其中， $E$  是材料的弹性模量， $I$  是截面惯性矩，对于矩形截面， $I = \frac{t^3b}{12}$ 。

```

# Python 示例代码
def simple_plate_analysis(a, b, t, p, E):
    """
    计算单向板的最大挠度
    :param a: 板的长度
    :param b: 板的宽度
    """

```

```

:param t: 板的厚度
:param p: 均布载荷
:param E: 弹性模量
:return: 最大挠度
"""

I = t**3 * b / 12 # 矩形截面惯性矩
delta_max = p * b**4 / (384 * E * I)
return delta_max

# 数据样例
a = 3.0 # 板的长度, 单位: 米
b = 2.0 # 板的宽度, 单位: 米
t = 0.02 # 板的厚度, 单位: 米
p = 500.0 # 均布载荷, 单位: 牛/米^2
E = 200e9 # 弹性模量, 单位: 帕斯卡

# 调用函数
delta_max = simple_plate_analysis(a, b, t, p, E)
print(f"最大挠度: {delta_max:.3f} 米")

```

通过上述示例，我们可以看到梁与板的静力学分析如何基于其类型和基本假设，通过简单的数学公式进行计算。这些计算对于初步设计和评估结构的承载能力至关重要。

## 2 静力学分析方法

### 2.1 梁的静力学分析：弯矩与剪力

#### 2.1.1 弯矩与剪力的基本概念

在静力学分析中，梁的弯矩和剪力是评估梁结构稳定性和强度的关键参数。弯矩（M）是梁在垂直于梁轴线的平面内受到的力矩，它导致梁发生弯曲变形。剪力（V）是沿梁轴线方向的内力，它抵抗垂直于梁轴线的外力，防止梁发生剪切破坏。

#### 2.1.2 计算弯矩与剪力

对于一个简支梁，假设其长度为 L，受到均布荷载 q 的作用，可以使用以下公式计算弯矩和剪力：

- 剪力公式：

$$V(x) = q \cdot \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

其中，x 是从梁的一端到计算点的距离。

- 弯矩公式：

$$M(x) = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

### 2.1.3 示例计算

假设有一个简支梁，长度为 10 米，受到均布荷载 200N/m 的作用，计算在梁的中点（即  $x = 5$  米）的剪力和弯矩。

```
# 定义参数
L = 10 # 梁的长度，单位：米
q = 200 # 均布荷载，单位：牛顿/米
x = 5 # 计算点距离梁一端的距离，单位：米

# 计算剪力
V = q * (L/2 - x)
print(f"在 x={x}米处的剪力为：{V}牛顿")

# 计算弯矩
M = q * (L/2 - x) * x - (q * x**2) / 2
print(f"在 x={x}米处的弯矩为：{M}牛顿·米")
```

运行上述代码，我们可以得到在梁中点的剪力和弯矩分别为 0 牛顿和 0 牛顿·米，这符合简支梁在中点的力学特性。

## 2.2 梁的静力学分析：挠度与转角

### 2.2.1 挠度与转角的定义

挠度 ( $y$ ) 是梁在荷载作用下沿垂直方向的位移，而转角 ( $\theta$ ) 是梁在荷载作用下某点的微小弯曲。这两个参数对于评估梁的变形和稳定性至关重要。

### 2.2.2 挠度与转角的计算

对于简支梁，挠度和转角的计算通常基于微分方程和边界条件。假设梁的弹性模量为  $E$ ，截面惯性矩为  $I$ ，荷载分布为  $q$ ，梁的挠度方程可以表示为：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

其中， $M(x)$  是梁在任意点  $x$  的弯矩。通过积分和应用边界条件，可以求解出挠度和转角。

### 2.2.3 示例计算

假设一个简支梁，长度为 10 米，弹性模量为 200GPa，截面惯性矩为  $1000000\text{mm}^4$ ，受到均布荷载 200N/m 的作用，计算梁中点的挠度。

```
import sympy as sp
```

```

# 定义参数
E = 200e9 # 弹性模量, 单位: 帕斯卡
I = 1000000e-12 # 截面惯性矩, 单位: 平方米
q = 200 # 均布荷载, 单位: 牛顿/米
L = 10 # 梁的长度, 单位: 米
x = sp.symbols('x') # 定义变量 x

# 计算弯矩
M = q * (L/2 - x) * x - (q * x**2) / 2

# 计算挠度
y = sp.integrate(sp.integrate(-M/(E*I), x), x)
# 应用边界条件: y(0)=0, y(L)=0
C1, C2 = sp.symbols('C1 C2')
y = y + C1*x + C2
y = y.subs(x, 0).subs(y, 0)
y = y.subs(x, L).subs(y, 0)
y = y.simplify()

# 计算中点挠度
y_mid = y.subs(x, L/2)
print(f"梁中点的挠度为: {y_mid}米")

```

通过上述代码，我们可以计算出简支梁在中点的挠度，进一步评估梁的变形情况。

## 2.3 板的静力学分析：四边支撑条件

### 2.3.1 边支撑条件的描述

板的四边支撑条件指的是板的边界如何被固定或支撑。常见的支撑条件包括简支、固定和滑动。这些条件直接影响板的内力分布和变形。

### 2.3.2 边支撑条件下的荷载分布与反应

在四边支撑条件下，板的荷载分布和反应力的计算需要考虑板的几何尺寸、材料属性以及荷载的类型和分布。对于均匀分布的荷载，板的内力和变形可以通过解析解或数值方法求解。

### 2.3.3 示例计算

假设一个正方形板，边长为 4 米，厚度为 0.1 米，弹性模量为 200GPa，泊松比为 0.3，受到均布荷载 1000N/m<sup>2</sup> 的作用，计算板中心点的挠度。

```
import math
```

```

# 定义参数
E = 200e9 # 弹性模量, 单位: 帕斯卡
v = 0.3 # 泊松比
t = 0.1 # 板的厚度, 单位: 米
q = 1000 # 均布荷载, 单位: 牛顿/平方米
a = 4 # 板的边长, 单位: 米

# 计算板中心点的挠度
# 对于四边简支的正方形板, 挠度公式为:  $y = (q * a^4) / (384 * E * t^3 * (1 - v^2))$ 
y_center = (q * a**4) / (384 * E * t**3 * (1 - v**2))
print(f"板中心点的挠度为: {y_center}米")

```

通过上述代码, 我们可以计算出四边简支的正方形板在中心点的挠度, 这对于评估板的承载能力和变形至关重要。

## 2.4 板的静力学分析: 荷载分布与反应

### 2.4.1 荷载分布的影响

荷载的分布方式 (如均布荷载、集中荷载或梯度荷载) 对板的内力分布和变形有显著影响。不同的荷载分布会导致不同的应力和挠度分布。

### 2.4.2 反应力的计算

反应力是指支撑结构对荷载的反作用力, 它确保结构的平衡。在板的静力学分析中, 反应力的计算需要考虑荷载的分布、板的几何尺寸和支撑条件。

### 2.4.3 示例计算

假设一个矩形板, 长为 4 米, 宽为 2 米, 厚度为 0.1 米, 弹性模量为 200GPa, 泊松比为 0.3, 受到均布荷载 1000N/m<sup>2</sup> 的作用, 计算板的四个角点的反应力。

```

# 定义参数
E = 200e9 # 弹性模量, 单位: 帕斯卡
v = 0.3 # 泊松比
t = 0.1 # 板的厚度, 单位: 米
q = 1000 # 均布荷载, 单位: 牛顿/平方米
a = 4 # 板的长, 单位: 米
b = 2 # 板的宽, 单位: 米

# 计算板的总荷载
total_load = q * a * b

# 对于四边简支的矩形板, 每个角点的反应力为总荷载的 1/4

```

```
reaction_force = total_load / 4
print(f"每个角点的反应力为: {reaction_force}牛顿")
```

通过上述代码，我们可以计算出四边简支的矩形板在每个角点的反应力，这对于设计和评估板的支撑结构非常重要。

以上内容详细介绍了梁与板的静力学分析方法，包括弯矩与剪力、挠度与转角的计算，以及板的四边支撑条件和荷载分布与反应的分析。通过具体的数学公式和 Python 代码示例，我们展示了如何进行这些计算，为结构工程师和研究人员提供了实用的工具和方法。

## 3 材料力学原理

### 3.1 梁的应力与应变分析

#### 3.1.1 原理

梁的静力学分析主要关注梁在各种载荷作用下的应力和应变。梁的横截面上的应力可以分为正应力和剪应力。正应力主要由弯矩引起，而剪应力则由剪力产生。在梁的分析中，我们通常使用欧拉-伯努利梁理论，该理论假设梁是均匀的、各向同性的，并且在弯曲时，横截面保持为平面。

##### 3.1.1.1 正应力计算

正应力（ $\sigma$ ）的计算公式为：

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

其中， $M$ 是弯矩， $y$ 是横截面上某点到中性轴的距离， $I$ 是横截面对中性轴的惯性矩。

##### 3.1.1.2 剪应力计算

剪应力（ $\tau$ ）的计算公式为：

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

其中， $V$ 是剪力， $Q$ 是横截面第一矩， $I$ 是横截面对中性轴的惯性矩， $t$ 是横截面的厚度。

#### 3.1.2 示例

假设我们有一根矩形截面的梁，其尺寸为宽度 $b = 100\text{mm}$ ，高度 $h = 200\text{mm}$ ，长度 $L = 4\text{m}$ 。梁受到均布载荷 $q = 10\text{kN/m}$ 的作用。我们使用 Python 来计算梁的正应力和剪应力。

```
# 导入必要的库
import numpy as np
```

```

# 定义梁的尺寸和载荷
b = 100e-3 # 宽度, 单位转换为米
h = 200e-3 # 高度, 单位转换为米
L = 4      # 长度, 单位为米
q = 10e3   # 均布载荷, 单位转换为 N/m

# 计算惯性矩 I
I = (b * h**3) / 12

# 计算弯矩 M
# 假设在梁的中点, 弯矩最大
M = (q * L**2) / 8

# 计算正应力 σ
# 假设在梁的顶部或底部, 应力最大
y = h / 2
sigma = M * y / I

# 计算剪应力 τ
# 假设在梁的中点, 剪应力最大
V = q * L / 2 # 剪力
Q = (b * h**2) / 4 # 第一矩
t = b # 厚度
tau = V * Q / (I * t)

# 输出结果
print(f"正应力σ: {sigma:.2f} Pa")
print(f"剪应力τ: {tau:.2f} Pa")

```

### 3.1.3 解释

在上述代码中, 我们首先定义了梁的尺寸和受到的均布载荷。然后, 我们计算了惯性矩 $I$ , 弯矩 $M$ , 以及在梁的顶部或底部的最大正应力 $\sigma$ 。接着, 我们计算了在梁中点的最大剪应力 $\tau$ 。最后, 我们输出了计算得到的正应力和剪应力。

## 3.2 板的应力分布与计算

### 3.2.1 原理

板的静力学分析涉及到板在平面内和垂直于平面的应力分布。板的应力分析通常比梁复杂, 因为它涉及到两个方向的弯矩和剪力。在板的分析中, 我们通常使用柯西-纳维-斯托克斯方程, 结合边界条件来求解应力分布。

### 3.2.1.1 平面内应力

平面内的正应力和剪应力可以通过以下公式计算：

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x}$$
$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y}$$
$$\tau_{xy} = \frac{V_{xy}Q_{xy}}{I_{xy}t}$$

其中， $M_x$ 和 $M_y$ 分别是沿 $x$ 轴和 $y$ 轴的弯矩， $I_x$ 和 $I_y$ 分别是板对 $x$ 轴和 $y$ 轴的惯性矩， $V_{xy}$ 是沿 $x$ 轴和 $y$ 轴的剪力， $Q_{xy}$ 是横截面的第一矩， $t$ 是板的厚度。

### 3.2.1.2 垂直应力

垂直于板平面的应力主要由垂直载荷引起，可以通过以下公式计算：

$$\sigma_z = \frac{P}{A}$$

其中， $P$ 是垂直载荷， $A$ 是板的横截面积。

## 3.2.2 示例

假设我们有一块矩形板，其尺寸为长度 $L_x = 2m$ ，宽度 $L_y = 1m$ ，厚度 $t = 10mm$ 。板受到沿 $x$ 轴的均布载荷 $q_x = 5kN/m$ 和沿 $y$ 轴的均布载荷 $q_y = 3kN/m$ 的作用。我们使用 Python 来计算板的平面内应力和垂直应力。

```
# 导入必要的库
import numpy as np

# 定义板的尺寸和载荷
Lx = 2    # 长度，单位为米
Ly = 1    # 宽度，单位为米
t = 10e-3 # 厚度，单位转换为米
qx = 5e3  # 沿 x 轴的均布载荷，单位转换为 N/m
qy = 3e3  # 沿 y 轴的均布载荷，单位转换为 N/m

# 计算惯性矩 Ix 和 Iy
Ix = (Ly * t**3) / 12
Iy = (Lx * t**3) / 12

# 计算弯矩 Mx 和 My
# 假设在板的中点，弯矩最大
Mx = (qx * Lx**2) / 8
My = (qy * Ly**2) / 8

# 计算平面内正应力σx 和σy
```

```

# 假设在板的边缘，应力最大
y = Ly / 2
x = Lx / 2
sigma_x = Mx * y / Ix
sigma_y = My * x / Iy

# 计算垂直应力σz
# 假设垂直载荷P为qx和qy的总和
P = (qx + qy) * Lx * Ly
A = Lx * Ly
sigma_z = P / A

# 输出结果
print(f"平面内正应力σx: {sigma_x:.2f} Pa")
print(f"平面内正应力σy: {sigma_y:.2f} Pa")
print(f"垂直应力σz: {sigma_z:.2f} Pa")

```

### 3.2.3 解释

在上述代码中，我们首先定义了板的尺寸和受到的沿 $x$ 轴和 $y$ 轴的均布载荷。然后，我们计算了惯性矩 $I_x$ 和 $I_y$ ，以及在板中点的最大弯矩 $M_x$ 和 $M_y$ 。接着，我们计算了在板边缘的最大平面内正应力 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 。最后，我们假设垂直载荷 $P$ 为沿 $x$ 轴和 $y$ 轴的均布载荷的总和，并计算了垂直应力 $\sigma_z$ 。我们输出了计算得到的平面内正应力和垂直应力。

## 4 结构设计与应用

### 4.1 梁的设计准则与实例分析

#### 4.1.1 梁的设计准则

梁的设计准则主要基于其承载能力和稳定性，包括但不限于：

- **强度准则**：确保梁在最大载荷下不会发生破坏，通常通过计算梁的最大应力并将其与材料的许用应力进行比较来实现。
- **刚度准则**：限制梁的变形，确保其在使用条件下不会产生过大的挠度或转角，影响结构的正常使用。
- **稳定性准则**：对于长细比大的梁，需要考虑其在压缩载荷下的稳定性，避免发生失稳现象。

#### 4.1.2 实例分析：简支梁的静力学分析

假设我们有一根简支梁，长度为 4 米，承受均布载荷  $q=10\text{ kN/m}$ 。梁的截面为矩形，宽度  $b=0.2$  米，高度  $h=0.4$  米。材料为钢，弹性模量  $E=200\text{ GPa}$ ，许

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/207045145026006160>