

湖南省平江县颐华高级中学 2024-2025 学年高三上学期入学考

试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\partial_A(A \cap B) = ()$

- A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

2. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| = ()$

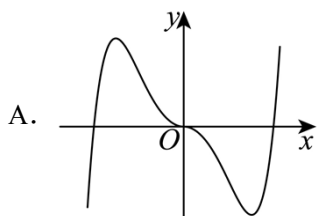
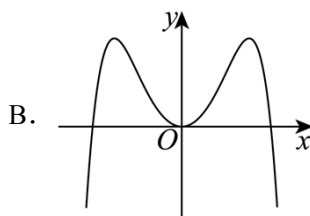
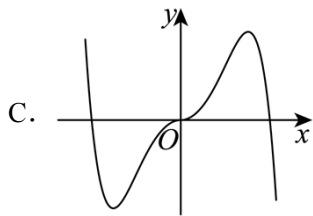
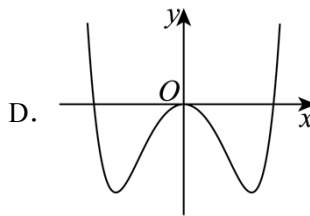
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$), 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足,

则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 $()$

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$) B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ ($y > 0$)
C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$) D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

4. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的图象大致为 $()$



5. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则 ω 的取值范围是

$()$

- A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$ C. $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right]$

6. 已知正实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 1$, 若不等式 $a + b \geq -x^2 + 4x + 18 - m$ 对任意的实数 x 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3]$ C. $(-\infty, 6]$ D. $[6, +\infty)$

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6$, $A_1B_1 = 2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x - \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) + (m-4)f(x) + 2(2-m) = 0$ 有五个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[1, 3)$ B. $(0, 2)$ C. $[1, 2)$ D. $(0, 1)$

二、多选题

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (n+2) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$, 则下列说法正确的是 ()

- A. a_1 是数列 $\{a_n\}$ 的最小项 B. a_4 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项
C. a_5 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项 D. 当 $n \geq 5$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递减

10. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 则以下说法正确的有

- A. 若 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 则点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心
B. 若 $\vec{OA} \cdot \left(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} - \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right) = \vec{OB} \cdot \left(\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} - \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right) = 0$, 则点 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心
C. 若 $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{BC} = 0$, 则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心
D. 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$, 则点 O 为 $\triangle ABC$ 的内心

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ()

- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点
B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题

12. 已知复数 z 满足 $(2z+3)i = 3z$, 则 $\bar{z} =$ _____.

13. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为线段 CD 的三等分点, $CE = \frac{1}{2}DE$, F 为线段 BE 上的动点, G 为 AF 中点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值为 _____.

14. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 记 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

四、解答题

15. 为了解某地初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系, 从该地区 29000 名学生中抽取 580 人, 得到日均体育锻炼时长与学业成绩的数据如下表所示:

时间范围学 业成绩	$[0, 0.5]$	$(0.5, 1]$	$(1, 1.5]$	$(1.5, 2]$	$(2, 2.5]$
优秀	5	44	42	3	1
不优秀	134	147	137	40	27

(1) 该地区 29000 名学生中体育锻炼时长不少于 1 小时人数约为多少?

(2) 估计该地区初中学生日均体育锻炼的时长 (精确到 0.1)

(3) 是否有 95% 的把握认为学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关?

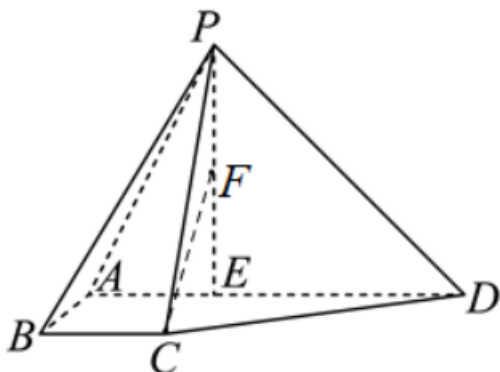
(附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$, $P(\chi^2 \geq 3.841) \approx 0.05$.)

16. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AB = BC = 1$, $AD = 3$, 点 E 在 AD 上, 且 $PE \perp AD$, $PE = DE = 2$.



- (1) 若 F 为线段 PE 中点, 求证: $BF \parallel$ 平面 PCD .
 (2) 若 $AB \perp$ 平面 PAD , 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 已知函数 $f(x) = (1 - ax) \ln(1 + x) - x$.

- (1) 当 $a = -2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
 (2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$: 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

- (1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 ;
 (2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;
 (3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.

参考答案:

1. D

【分析】由集合 B 的定义求出 B ，结合交集与补集运算即可求解.

【详解】因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，所以 $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$ ，

则 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$ ， $\complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$

故选：D

2. B

【分析】由 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ 得 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，结合 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，得 $1 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 6\vec{b}^2 = 4$ ，

由此即可得解.

【详解】因为 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，所以 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$ ，即 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

又因为 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，

所以 $1 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 6\vec{b}^2 = 4$ ，

从而 $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

3. A

【分析】设点 $M(x, y)$ ，由题意，根据中点的坐标表示可得 $P(x, 2y)$ ，代入圆的方程即可求解.

【详解】设点 $M(x, y)$ ，则 $P(x, y_0), P'(x, 0)$ ，

因为 M 为 PP' 的中点，所以 $y_0 = 2y$ ，即 $P(x, 2y)$ ，

又 P 在圆 $x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$ 上，

所以 $x^2 + 4y^2 = 16 (y > 0)$ ，即 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ ，

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$.

故选：A

4. B

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入 $x = 1$ 可得 $f(1) > 0$ ，可排除 D.

【详解】 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x)\sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x = f(x)$ ，

又函数定义域为 $[-2.8, 2.8]$ ，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

$$\text{又 } f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0,$$

故可排除 D.

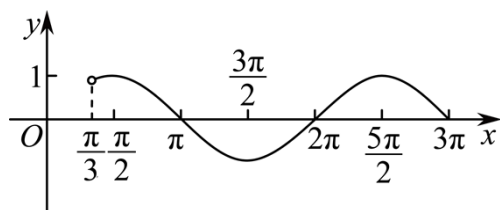
故选: B.

5. C

【分析】由 x 的取值范围得到 $\omega x + \frac{\pi}{3}$ 的取值范围, 再结合正弦函数的性质得到不等式组, 解得即可.

【详解】解: 依题意可得 $\omega > 0$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$,

要使函数在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 又 $y = \sin x$, $x \in \left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ 的图象如下所示:



$$\text{则 } \frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi, \text{ 解得 } \frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}, \text{ 即 } \omega \in \left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right].$$

故选: C.

6. D

【分析】利用基本不等式求出 $a+b$ 的最小值 16, 分离参数即可.

【详解】因为 $a > 0$, $b > 0$, $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 1$,

$$\text{所以 } a+b = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b}\right) = 10 + \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} = 16, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{9a}{b}, \text{ 即 } a=4,$$

$b=12$ 时取等号.

由题意, 得 $16 \geq -x^2 + 4x + 18 - m$, 即 $x^2 - 4x - 2 \geq -m$ 对任意的实数 x 恒成立, 又

$$x^2 - 4x - 2 = (x-2)^2 - 6 \geq -6, \text{ 所以 } -6 \geq -m, \text{ 即 } m \geq 6.$$

故选: D.

7. B

【分析】解法一: 根据台体的体积公式可得三棱台的高 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

，做辅助线，结合正三棱台的结构特征求得 $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，进而根据线面夹角的定义分析求解

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$ ， A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，根据比例关系可得 $V_{P-ABC} = 18$ ，进而可求正三棱锥 $P-ABC$ 的高，即可得结果。

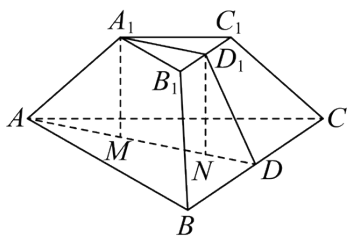
【详解】解法一：分别取 BC, B_1C_1 的中点 D, D_1 ，则 $AD = 3\sqrt{3}, A_1D_1 = \sqrt{3}$ ，

$$\text{可知 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h ，

$$\text{则 } V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \left(9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \right) h = \frac{52}{3}, \text{ 解得 } h = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

如图，分别过 A_1, D_1 作底面垂线，垂足为 M, N ，设 $AM = x$ ，



$$\text{则 } AA_1 = \sqrt{AM^2 + A_1M^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{3}}, \quad DN = AD - AM - MN = 2\sqrt{3} - x,$$

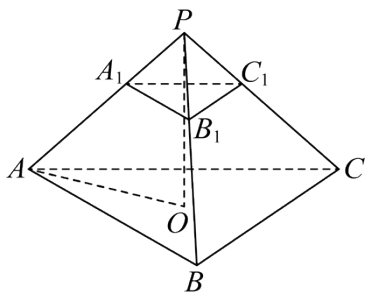
$$\text{可得 } DD_1 = \sqrt{DN^2 + D_1N^2} = \sqrt{(2\sqrt{3} - x)^2 + \frac{16}{3}},$$

$$\text{结合等腰梯形 } BCC_1B_1 \text{ 可得 } BB_1^2 = \left(\frac{6-2}{2} \right)^2 + DD_1^2,$$

$$\text{即 } x^2 + \frac{16}{3} = (2\sqrt{3} - x)^2 + \frac{16}{3} + 4, \text{ 解得 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } A_1A \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正切值为 } \tan \angle A_1AD = \frac{A_1M}{AM} = 1;$$

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$ ，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

因为 $\frac{PA_1}{PA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}} = \frac{1}{27}$,

可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{26}{27}V_{P-ABC} = \frac{52}{3}$, 则 $V_{P-ABC} = 18$,

设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d , 则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}d \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$, 解得 $d = 2\sqrt{3}$,

取底面 ABC 的中心为 O , 则 $PO \perp$ 底面 ABC , 且 $AO = 2\sqrt{3}$,

所以 PA 与平面 ABC 所成角的正切值 $\tan \angle PAO = \frac{PO}{AO} = 1$.

故选: B.

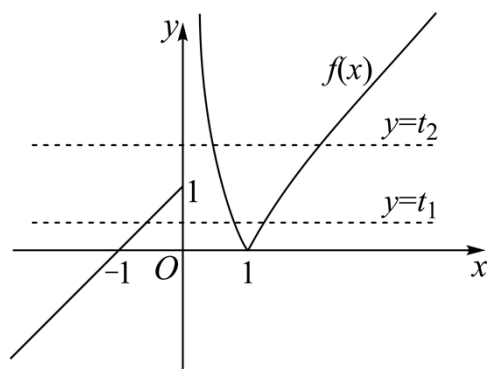
8. C

【分析】作出 $f(x)$ 的图象, 令 $t = f(x)$, 则 $t^2 + (m-4)t + 2(2-m) = 0$, 由题意结合图象可知

方程有两个不相等的根 t_1, t_2 , 且 $0 < t_1 \leq 1, t_2 > 1$, 或 $t_1 = 0, t_2 = 1$, 令

$g(t) = t^2 + (m-4)t + 2(2-m)$, 则结合一元二次方程根分布情况可求得结果.

【详解】 $f(x)$ 的图象如下图,



令 $t = f(x)$, 则 $t^2 + (m-4)t + 2(2-m) = 0$,

因为关于 x 的方程 $f^2(x) + (m-4)f(x) + 2(2-m) = 0$ 有五个不同的实数根,

所以由函数图象可知关于 t 的方程 $t^2 + (m-4)t + 2(2-m) = 0$ 有两个不相等的实根 t_1, t_2 , 且

$0 < t_1 \leq 1, t_2 > 1$, 或 $t_1 = 0, t_2 = 1$,

令 $g(t) = t^2 + (m-4)t + 2(2-m)$,

若 $0 < t_1 \leq 1, t_2 > 1$, 则

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(0) > 0, \text{ 即} \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 - 8(2-m) > 0 \\ g(0) = 2-m > 0 \\ g(1) = 1+m-4+2(2-m) \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 < m \leq 2,$$

$$\text{若 } t_1 = 0, t_2 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} 0+1=4-m \\ 0 \times 1 = 2(2-m) \end{cases}, \text{ 无解,}$$

综上, $1 < m \leq 2$,

故选: C

9. BCD

【分析】设第 n 项为 $\{a_n\}$ 的最大项, 根据 $\begin{cases} a_n \geq a_{n-1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$ 列出不等式组, 求解即可判断 BCD, 利

用数列的单调性及范围判断 A.

【详解】设第 n 项为 $\{a_n\}$ 的最大项,

$$\text{则 } \begin{cases} a_n \geq a_{n-1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (n+2) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq (n+1) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \\ (n+2) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq (n+3) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} n \leq 5 \\ n \geq 4 \end{cases},$$

又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n=4$ 或 $n=5$,

故数列 $\{a_n\}$ 中 a_4 与 a_5 均为最大项, 且 $a_4 = a_5 = \frac{6^5}{7^4}$,

当 $n \geq 5$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递减, 故 BCD 正确,

当 n 趋向正无穷大时, $a_n = (n+2) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$ 无限趋向于 0 且大于 0, 且 $a_1 = \frac{18}{7} > 0$,

所以 a_1 不是数列 $\{a_n\}$ 的最小项, 且数列 $\{a_n\}$ 无最小值, 故 A 错误.

故选: BCD

10. AC

【解析】逐项进行分析即可.

【详解】解: 选项 A, 设 D 为 BC 的中点, 由于 $\vec{OA} = -(\vec{OB} + \vec{OC}) = -2\vec{OD}$, 所以 O 为 BC 边上中线的三等分点(靠近点 D), 所以 O 为 $\triangle ABC$ 的重心;

选项 B, 向量 $\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}, \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ 分别表示在边 AC 和 AB 上的单位向量, 设为 $\vec{AC'}$ 和 $\vec{AB'}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/207063034155006144>