*第四章 微分方程及其应用

回主目录页

4．1　可分离变量的微分方程

节菜单

教学目标

1. 了解微分方程的相关概念；
2. 了解可分离变量微分方程的通解；
3. 了解可分离变量微分方程在电工学中的应用。

教学重点　可分离变量微分方程的通解及其在电工学中的应用

教学难点　可分离变量微分方程在电工学中的应用

教学方法　讲练结合

回主目录页

4．1　可分离变量的微分方程

节菜单

一、微分方程的基本概念

1. 微分方程的定义

含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程，如果微分

自变量，这样的微分方程称为常微分方程。微分方程中出现的未知函数导数（或微分）的最

高阶数称为微分方程的阶。例如，$\frac{dy}{dx}=2xy$ 和 $y'+y\cos x=e^{-x}$ 是

$x=0$ 和 $\frac{d^2x}{ds^2}+6\frac{dx}{ds}+9x=0$ 是二阶微分方程。

2. 微分方程的解

定义　如果将一个函数代入微分方程后，使得方程两边恒等，则称此函数为该微分方程的解。求微分方程解的过程叫作解微分方程。

例如，对 $y'=2x$ 两边积分，得

$$y=\int 2x\,dx=x^2+C$$

若未知函数 $y=f(x)$ 还满足：$y|_{x=1}=2$。把 $x=1$，$y=2$ 代入 $y=x^2+C$，得

$$C=1$$

所以

$$y=x^2+1$$

函数 $y=x^2+C$、$y=x^2+1$ 都是微分方程 $y'=2x$ 的解。

微分方程的解有两种形式，如果解中所含任意常数的个数与方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的通解。不含任意常数的解称为微分方程的特解。

如上述例子中，$y=x^2+C$ 就是微分方程 $y'=2x$ 的通解；而 $y=x^2+1$ 是微分方程 $y'=2x$ 的特解。

回主目录页

4．1　可分离变量的微分方程

节菜单

通常用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定通解中任意常数的条件，这条件称为初始条件。如上例中的 $y|_{x=1}=2$ 就是未知函数的初始……

二、可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程能写成 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的形式，也……一端只含有 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，而另一端只含有 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程……的微分方程。

此类方程的解法如下：

（1）先分离变量，使等式的一端只含有 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，而另一端只含有 x 的函数和 $\mathrm{d}x$。

（2）两端再积分，就可得到该类方程的通解。

例题解析

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy^2$ 的通解。

解：分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=2x\mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int 2x\mathrm{d}x$$

得

$$-\frac{1}{y}=x^2+C$$

即

$$y=-\frac{1}{x^2+C}\ （C 为任意常数）$$

所以，原方程的通解为 $y=-\frac{1}{x^2+C}$。

回主目录页

节菜单

例 2　求微分方程 $2x\sin y\,dx+(1+x^2)\cos y\,dy=0$ 满足初始条件 y

解：分离变量，得

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{2x}{1+x^2}dx$$

对上式两边积分，有

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

得

$$\ln|\sin y|=-\ln(1+x^2)+\ln C_1\quad(C_1>0)$$

化简，得到所给方程的通解为

$$(1+x^2)\sin y=C\ \text{（其中 }C\text{ 为任意常数）}$$

把初始条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$ 代入通解中，求得

$$(1+1^2)\sin\frac{\pi}{6}=C$$

则

$$C=1$$

所以，所给方程满足初始条件的特解为

$$(1+x^2)\sin y=1$$

回主目录页

4. 1　可分离变量的微分方程

节菜单

例 3　如图 4—1 所示的 RC 电路中，已知在开关合上前电容上没有电荷，电容两端的电压为零，电源电压为 E。把开关合上，电源对电容充电，电容上的电压 u_C 逐渐升高，求电压 u_C 随时间 t 变化的规律。

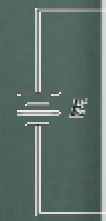

图 4—1

解：（1）建立微分方程

根据回路电压定律，电容上的电压 u_C 与电阻上的电压 Ri 之和等于电源电压 E，即

$$u_C+Ri=E$$

电容充电时，电容上的电量 q 逐渐增加，按电容性质，q 与 u_C 有关系式

$$q=Cu_C$$

于是

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(Cu_C)}{dt}=C\frac{du_C}{dt}$$

把上式代入 $u_C+Ri=E$ 中，得到 $u_C(t)$ 所满足的微分方程为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E$$

且有初始条件

$$u_C\big|_{t=0}=0$$

回主目录页

（2）求微分方程的通解

微分方程 $RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E$ 是可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{du_C}{E-u_C}=\frac{dt}{RC}$$

两边积分，得

$$-\ln(E-u_C)=\frac{t}{RC}+\ln\frac{1}{A}\quad（A 为任意正数）$$

这任意常数 $C_1=\ln\frac{1}{A}$。

即

$$\ln\left[\frac{1}{A}(E-u_C)\right]=-\frac{t}{RC}$$

于是

$$u_C=E-Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

这是微分方程 $RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E$ 的通解。

（3）求微分方程的特解

把初始条件 $u_C|_{t=0}=0$ 代入通解，得

$$0=E-Ae^0$$

即

$$A=E$$

于是

$$u_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

这就是电压 $u_C(t)$ 随时间 t 变化的规律，即电容器充电规律。

4．1　可分离变量的微分方程

课后习题

1．求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$；　(2) $y'=-y\sin x$；　(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$。

2．求下列微分方程的特解：

(1) $y'=-\frac{x}{y}$，$y|_{x=0}=1$；　(2) $y'=e^{2x-y}$，$y|_{x=0}=0$；

(3) $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$，$y|_{x=1}=0$。

3．在如题图4—1所示的RC电路中，如果开始时电容上有初始电压 u_0，当开关闭合时，电容就开始放电。求开关闭合后电路中的电流随时间 t 的变化规律 $i=i(t)$ 及电容器上的电压随时间 t 的变化规律 $u_C=u_C(t)$。

题图 4—1

4. 2　一阶线性微分方程

节菜单

教学目标
1. 理解一阶线性微分方程的概念；
2. 会求一阶线性微分方程的通解和特解；
3. 会运用公式法解决电工学中的相关问题。

教学重点
1.求一阶线性微分方程的通解和特解,
2.运用公式法解决电工学中的相关问题

教学难点
运用公式法解决电工学中的相关问题

教学方法
讲练结合

回主目录页

4. 2　一阶线性微分方程

节菜单

一、一阶线性微分方程的定义

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 都是已知的连续函数。

例如，方程 $y'+2xy=e^x$ 以及 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{3x}=x\cos x$ 都是一阶线性微分方程。

1. 一阶齐次线性微分方程

若 $Q(x)=0$ 时，微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 就简化为：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

称为一阶齐次线性微分方程。

例如，$\frac{dy}{dx}=2xy$ 以及 $\frac{dy}{dx}=y\sin x$ 等都称为一阶齐次线性微分方程。可见，一阶齐次线性微分方程就是可分离变量的一阶微分方程。

2. 一阶非齐次线性微分方程

若 $Q(x)\neq 0$，方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 就称为一阶非齐次线性微分方程。

例如，$y'+2xy=e^x$ 以及 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{3x}=x\cos x$ 等都是一阶非齐次线性微分方程。

二、一阶非齐次线性微分方程的解法

一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解为：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\quad (C\text{ 为任意常数})\qquad ①$$

回主目录页

节菜单

例题解析

例 1　求微分方程 $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 的通解。

解：$P(x)=2x$，$Q(x)=2xe^{-x^2}$。

于是，原方程的通解为

$$y=e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=e^{-x^2}\left(\int 2x\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=e^{-x^2}(x^2+C)\ \text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

例 2　设某条曲线通过原点，且该曲线上任意点 $P(x, y)$ 处的切线斜率等于 $2x+y$，求此曲线的方程。

解：由题意可设曲线方程为 $y=f(x)$，由于曲线在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x+y$，则可以得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+y$$

其中，初始条件为当 $x=0$ 时，$y=0$。

把微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+y$ 化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2x$$

则 $P(x)=-1$，$Q(x)=2x$，代入通解公式，得

$$y=e^{\int \mathrm{d}x}\left(\int 2xe^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

回主目录页