

# 第十六讲 数列递推及通项应用

## 目录

题型 01 递推基础：等差数列定义型	1
题型 02 递推基础：等比数列定义型	2
题型 03 累加法求通项	3
题型 04 累加法求通项：裂项型	3
题型 05 累加法求通项：换元型	4
题型 06 累积法求通项	5
题型 07 待定系数型等比求通项	6
题型 08 分式型求通项	6
题型 09 不动点方程求通项	7
题型 10 前 n 项和型求通项	8
题型 11 前 n 项积型求通项	8
题型 12 因式分解型求通项	9
题型 13 同除型构造等差数列求通项	10
题型 14 同除型构造等比数列求通项	10
题型 15 周期数列求通项：分段型	11
题型 16 周期数列求通项：三阶型	11
题型 17 奇偶各自独立型求通项	12
高考练场	13

## 热点题型归纳

### 题型 01 递推基础：等差数列定义型

#### 【解题攻略】

#### 等差数列的判定方法

- ① 定义法：“欲证等差，直接作差”，即证  $a_{n+1} - a_n = \text{定值}$ ；
- ② 等差中项法：即证  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ；
- ③ 函数结论法：即  $a_n$  为一次函数或  $S_n$  为无常数项的二次函数。

**【典例 1-1】** (2024 上·山东威海·高三统考) 已知数列  $\{a_n\}$ ，对  $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$  都有  $a_m + a_n = a_{m+n}$ ，且  $a_1 = 1$ ，则  $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【典例 1-2】** (2024 上·天津·高三天津市第一百中学校联考期末) 在数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 6$ ，且  $na_{n+1} - (n+2)a_n = n(n+1)(n+2)$ ，则  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【变式 1-1】** (2023 下·全国·高三校联考阶段练习) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3(n \in \mathbf{N}^*)$ ，则  $\frac{a_3}{a_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{a_1 - a_n}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【变式 1-2】** (2024 上·海南海口·高三海南中学校考) 在数列  $\{a_n\}$  中， $a_n > 0, a_1 = \frac{1}{2}, \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 1$ ，则  $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【变式 1-3】** (2023 上·四川成都·高三校联考阶段练习) 已知各项均不为 0 的数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a_n + 1}$ ，且

$a_1 = \frac{1}{2}$ , 则  $a_{2023} =$  \_\_\_\_\_.

## 题型 02 递推基础：等比数列定义型

### 【解题攻略】

等比数列的判定方法：

(1) 定义法：“欲证等比，直接作比”，即证  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \neq 0 \text{ 的常数}) \Leftrightarrow$  数列  $\{a_n\}$  是等比数列；

(2) 等比中项法：即证  $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} (a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 0, n \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow$  数列  $\{a_n\}$  是等比数列.

【典例 1-1】(2023·河南郑州·统考二模) 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_1 = 2, S_{n+1}(S_{n+1} - 3^n) = S_n(S_n + 3^n)$ , 则  $S_{2023} =$  ( )

- A.  $3^{2023} - 1$       B.  $3^{2023} + 1$       C.  $\frac{3^{2023} + 1}{2}$       D.  $\frac{3^{2022} + 1}{2}$

【典例 1-2】(2022·吉林长春·长春吉大附中实验学校校考模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足: 对任意的  $m, n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $a_m a_n = a_{m+n}$ , 且  $a_2 = 3$ , 则  $a_{20} =$  ( )

- A.  $3^{20}$       B.  $\pm 3^{20}$       C.  $3^{10}$       D.  $\pm 3^{10}$

【变式 1-1】(2022 上·山东日照·高三统考) 正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{n+1} = ka_n$  ( $k$  为常数), 若  $a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = 3$ , 则  $a_{2021}^2 + a_{2022}^2 + a_{2023}^2$  的取值范围是 ( )

- A.  $[3, 9)$       B.  $[3, 9]$       C.  $[3, 15)$       D.  $[3, 15]$

【变式 1-2】(2022·陕西·校联考模拟预测) 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ , 数列  $\left\{\frac{1}{a_n} + 1\right\}$  是公比为 2 的等比数列, 设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则下列结论错误的是 ( )

- A.  $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$       B.  $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}$   
 C. 数列  $\{a_n\}$  为递减数列      D.  $S_3 > \frac{7}{8}$

【变式 1-3】(2022·山西吕梁·统考一模) 已知  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 3 \times 2^n$ , 则  $S_{100} =$  ( )

- A.  $2^{100} - 3$       B.  $2^{100} - 2$       C.  $2^{101} - 3$       D.  $2^{101} - 2$

## 题型 03 累加法求通项

### 【解题攻略】

对于递推公式为  $a_n - a_{n-1} = f(n)$ , 一般利用累加法求出数列的通项公式:

【典例 1-1】已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 10$ ,  $\frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 2$ , 则  $\frac{a_n}{n}$  的最小值为 ( )

- A.  $2\sqrt{10} - 1$       B.  $\frac{11}{2}$       C.  $\frac{16}{3}$       D.  $\frac{27}{4}$

【典例 1-2】已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, n \geq 2$  时,  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_n =$  \_\_\_\_\_.

---

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/207142021036006060>