第十六讲 数列递推及通项应用

目录

热点题型归纳

题型 01 递推基础：等差数列定义型

【解题攻略】

等差数列的判定方法

①定义法：“欲证等差，直接作差”，即证 $a_{n+1}-a_n$＝定值；

②等差中项法：即证 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$；

③函数结论法：即 a_n 为一次函数或 S_n 为无常数项的二次函数.

【典例 1-1】（2024 上·山东威海·高三统考）已知数列$\{a_n\}$，对$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$都有$a_m+a_n=a_{m+n}$，且$a_1=1$，则$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=$_______.

【典例 1-2】（2024 上·天津·高三天津市第一百中学校联考期末）在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=6$，且$na_{n+1}-(n+2)a_n=n(n+1)(n+2)$，则$a_n=$_____.

【变式 1-1】（2023 下·全国·高三校联考阶段练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1,\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则

$\dfrac{a_3}{a_2}=$__________，$\dfrac{a_1-a_n}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=$_________.

【变式 1-2】（2024 上·海南海口·高三海南中学校考）在数列$\{a_n\}$中，$a_n>0,a_1=\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{a_{n+1}^2}-\dfrac{2}{a_n^2}=1$，则$a_9=$_____.

【变式 1-3】（2023 上·四川成都·高三校联考阶段练习）已知各项均不为 0 的数列$\left\{a_n\right\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{a_n+1}$，且

$a_1=\frac{1}{2}$，则 $a_{2023}=$____________.

题型 02 递推基础：等比数列定义型

【解题攻略】

等比数列的判定方法：

(1)定义法："欲证等比，直接作比"，即证 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq0$ 的常数$)\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2)等比中项法：即证 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(a_na_{n+1}a_{n+2}\neq0$，$n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是等比数列.

【典例 1-1】（2023·河南郑州·统考二模）已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=2$，$S_{n+1}\left(S_{n+1}-3^n\right)=S_n\left(S_n+3^n\right)$，则 $S_{2023}=$（ ）

A．$3^{2023}-1$　　B．$3^{2023}+1$　　C．$\frac{3^{2023}+1}{2}$　　D．$\frac{3^{2022}+1}{2}$

【典例 1-2】（2022·吉林长春·长春吉大附中实验学校校考模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足：对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_ma_n=a_{m+n}$，且 $a_2=3$，则 $a_{20}=$（ ）

A．3^{20}　　B．$\pm3^{20}$　　C．3^{10}　　D．$\pm3^{10}$

【变式 1-1】．（2022 上·山东日照·高三统考）正项数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=ka_n$（k 为常数），若 $a_{2021}+a_{2022}+a_{2023}=3$，则 $a_{2021}^2+a_{2022}^2+a_{2023}^2$ 的取值范围是（ ）

A．$[3,9)$　　B．[3，9]　　C．$[3,15)$　　D．[3，15]

【变式 1-2】（2022·陕西·校联考模拟预测）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是公比为 2 的等比数列，设 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，则下列结论错误的是（ ）

A．$a_n=\frac{1}{2^n-1}$　　B．$a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}$

C．数列$\{a_n\}$为递减数列　　D．$S_3>\frac{7}{8}$

【变式 1-3】（2022·山西吕梁·统考一模）已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3\times2^n$，则 $S_{100}=$（ ）

A．$2^{100}-3$　　B．$2^{100}-2$　　C．$2^{101}-3$　　D．$2^{101}-2$

题型 03 累加法求通项

【解题攻略】

对于递推公式为 $a_n-a_{n-1}=f(n)$，一般利用累加法求出数列的通项公式；

【典例 1-1】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=10$，$\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=2$，则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为（ ）

A．$2\sqrt{10}$ -1　　B．$\frac{11}{2}$　　C．$\frac{16}{3}$　　D．$\frac{27}{4}$

【典例 1-2】**已知数列**$\{a_n\}$**中**，$a_1=1$，$n\geq2$ **时**，$a_n=a_{n-1}+2n-1$，$a_n=$______.