山西省沁县中学 2023-2024 学年高三下学期 5 月质量检查数学试题试卷

注意事项：
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知定义在 R 上的奇函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+1\right)=f\left(1-x\right)$，且当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=2^{x}-m$，则 $f\left(2019\right)=$（　　）

A． 1　　**B．** -1　　**C．** 2　　**D．** -2

2．设集合 $A=\left\{x\middle|x^{2}-x-2>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|\log_{2}x\le 2\right\}$，则集合 $(C_{R}A)\cap B=$

A． $\left\{x\middle|-1\le x\le 2\right\}$　　**B．** $\left\{x\middle|0<x\le 2\right\}$　　**C．** $\left\{x\middle|0<x\le 4\right\}$　　**D．** $\left\{x\middle|-1\le x\le 4\right\}$

3．设 ***m***，***n*** 为直线，α、β 为平面，则 $m\perp\alpha$ 的一个充分条件可以是(　　)

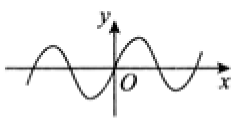
A． $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=n$，$m\perp n$　　**B．** $\alpha//\beta$，$m\perp\beta$

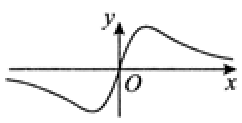
C． $\alpha\perp\beta$，$m//\beta$　　**D．** $n\subset\alpha$，$m\perp n$

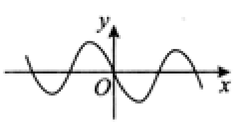
4．设 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，则下列不等式成立的是（　　）

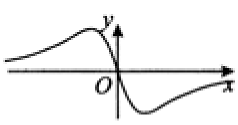
A． $c-a<c-b$　　**B．** $ac^{2}>bc^{2}$　　**C．** $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　**D．** $\dfrac{b}{a}<1$

5．函数 $y=\dfrac{x+\sin x}{1+x^{2}}$ 的部分图象大致为（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

6．复数 $\left(a-i\right)\left(2-i\right)$ 的实部与虚部相等，其中 i 为虚部单位，则实数 $a=$(　　)

A． 3　　**B．** $-\dfrac{1}{3}$　　**C．** $-\dfrac{1}{2}$　　**D．** -1

7．已知 $0<a<b<1$，则（　　）

A． $\left(1-a\right)^{\frac{1}{b}}>\left(1-a\right)^{b}$　**B．** $\left(1-a\right)^{b}>\left(1-a\right)^{\frac{b}{2}}$　**C．** $\left(1+a\right)^{a}>\left(1+b\right)^{b}$　**D．** $\left(1-a\right)^{a}>\left(1-b\right)^{b}$

8．设 $f\left(x\right)$ 是定义在实数集 R 上的函数，满足条件 $y=f\left(x+1\right)$ 是偶函数，且当 $x\ge 1$ 时，$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}-1$，则

$a=f\left(\log_3 2\right)$，$b=f\left(-\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\right)$，$c=f\left(3\right)$的大小关系是（　　）

A． $a>b>c$　　　**B．** $b>c>a$　　　**C．** $b>a>c$　　　**D．** $c>b>a$

9．$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^6$的展开式中，含$x^3$项的系数为（　　）

A． -60　　　**B．** -12　　　**C．** 12　　　**D．** 60

10．下列说法正确的是（　　）

A．“若$a>1$，则$a^2>1$”的否命题是“若$a>1$，则$a^2\le 1$”

B．“若$am^2<bm^2$，则$a<b$”的逆命题为真命题

C．$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使$3^{x_0}>4^{x_0}$成立

D．“若$\sin\alpha\ne\frac{1}{2}$，则$\alpha\ne\frac{\pi}{6}$”是真命题

11．i是虚数单位，复数$z=1-i$在复平面上对应的点位于（　　）

A．第一象限　　　**B．**第二象限　　　**C．**第三象限　　　**D．**第四象限

12．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F$，直线$l$经过点$F$且与双曲线的一条渐近线垂直，直线$l$与双曲线的左支交于不同的两点$A$，$B$，若$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则该双曲线的离心率为（　　）．

A． $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　　**B．** $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　**C．** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　**D．** $\sqrt{3}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知$3\cos 2\alpha=4\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$，$\alpha\in(\frac{\pi}{4}，\pi)$，则$\sin 2\alpha=$______．

14．运行下面的算法伪代码，输出的结果为$S=$_____．

```
S←0
For i From 1 To 10 Step 1
  S←S+1/(i(i+1))
  End For
Print S
```

15．若x、y满足约束条件$\begin{cases}y\le 3\\x+y\ge 2\\x-3y\le 6\end{cases}$，则$z=x+2y$的最小值为______．

16．从甲、乙、丙、丁、戊五人中任选两名代表，甲被选中的概率为__________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）这次新冠肺炎疫情，是新中国成立以来在我国发生的传播速度最快、感染范围最广、防控难度最大的一次重大突发公共卫生事件.中华民族历史上经历过很多磨难，但从来没有被压垮过，而是愈挫愈勇，不断在磨难中成长，从磨难中奋起.在这次疫情中，全国人民展现出既有责任担当之勇、又有科学防控之智.某校高三学生也展开了对这次疫情的研究，一名同学在数据统计中发现，从 **2020** 年 **2** 月 **1** 日至 **2** 月 **7** 日期间，日期 x 和全国累计报告确诊病例数量 y（单位：万人）之间的关系如下表：

日期 x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
全国累计报告确诊病例数量 y（万人）	**1.4**	**1.7**	**2.0**	**2.4**	**2.8**	**3.1**	**3.5**

（**1**）根据表中的数据，运用相关系数进行分析说明，是否可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系？

（**2**）求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=bx+a$（系数精确到 **0.01**）.并预测 **2** 月 **10** 日全国累计报告确诊病例数.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=16.9$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=77.5$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)}=1.88$，$\sqrt{7}\approx 2.65$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

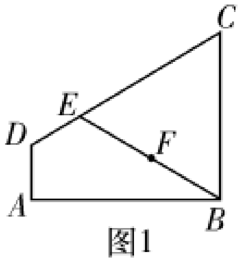
$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}$，$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

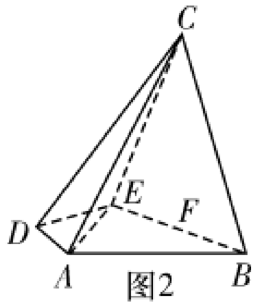
18.（12 分）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右顶点分别为 A、B，焦距为 **2**，点 P 为椭圆上异于 A、B 的点，且直线 PA 和 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$.

（**1**）求 C 的方程；

（**2**）设直线 AP 与 y 轴的交点为 Q，过坐标原点 O 作 $OM//AP$ 交椭圆于点 M，试探究 $\dfrac{|AP|\cdot|AQ|}{|OM|^2}$ 是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

19.（12 分）如图 **1**，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$\angle BCD=60^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=3$，E 为线段 CD 上一点，满足 $BC=CE$，F 为 BE 的中点，现将梯形沿 BE 折叠（如图 **2**），使平面 $BCE\perp$ 平面 $ABED$.

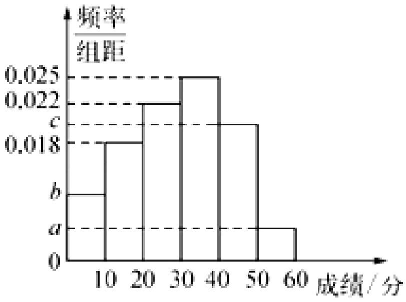




（1）求证：平面 $ACE \perp$ 平面 BCE；

（2）能否在线段 AB 上找到一点 P（端点除外）使得直线 AC 与平面 PCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，试确定点 P 的位置；若不存在，请说明理由.

20.（12 分）为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中，参考的文科生与理科生人数之比为 $1:4$，且成绩分布在 $[0,60]$ 的范围内，规定分数在 **50** 以上（含 **50**）的作文被评为"优秀作文"，按文理科用分层抽样的方法抽取 **400** 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图所示.其中 a,b,c 构成以 **2** 为公比的等比数列.



（1）求 a,b,c 的值；

（2）填写下面 2×2 列联表，能否在犯错误的概率不超过 **0.01** 的情况下认为"获得优秀作文"与"学生的文理科"有关？

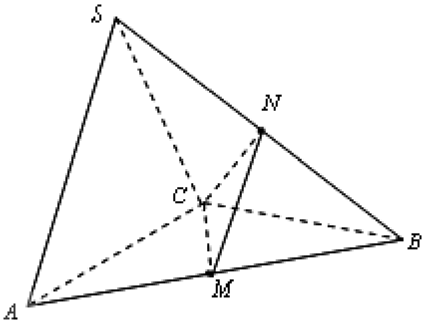
	文科生	理科生	合计
获奖	**6**		
不获奖			
合计			**400**

（3）将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 **2** 名学生，记"获得优秀作文"的学生人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2 \geq k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21．（12 分）在三棱锥$S-ABC$中，ΔABC是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形，平面$SAC\perp$平面ABC，$SA=SC=2$，**M**、**N**分别为AB、SB的中点.



（1）证明：$AC\perp SB$；

（2）求三棱锥$B-CMN$的体积.

22．（10 分）已知a,b,c均为正实数，函数$f\left(x\right)=\left|x+\frac{1}{a^2}\right|+\left|x-\frac{1}{b^2}\right|+\frac{1}{4c^2}$的最小值为1.证明：

（1）$a^2+b^2+4c^2\geq 9$；

（2）$\frac{1}{ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2ac}\leq 1$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

根据$f(x)$是R上的奇函数，并且$f(x+1)=f(1-x)$，便可推出$f(x+4)=f(x)$，即$f(x)$的周期为 4，而由$x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x-m$及$f(x)$是奇函数，即可得出$f(0)=1-m=0$，从而求得$m=1$，这样便可得出$f(2019)=f(-1)=-f(1)=-1$.

【详解】

$\because f\left(x\right)$是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的奇函数，且 $f\left(x+1\right)=f\left(1-x\right)$；

$\therefore f(x+2)=f(-x)=-f(x)$；

$\therefore f(x+4)=f(x)$；

$\therefore f\left(x\right)$的周期为 4；

$\because x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x-m$；

$\therefore$由奇函数性质可得 $f(0)=1-m=0$；

$\therefore m=1$；

$\therefore x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x-1$；

$\therefore f(2019)=f(-1+505\times 4)=f(-1)=-f(1)=-1$.

故选：*B*.

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性和周期性求值，此类问题一般根据条件先推导出周期，利用函数的周期变换来求解，考查理解能力和计算能力，属于中等题.

2、**B**

【解析】

先求出集合 A 和它的补集，然后求得集合 B 的解集，最后取它们的交集得出结果.

【详解】

对于集合 **A**，$\left(x-2\right)\left(x+1\right)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$，故 $C_RA=\left[-1,2\right]$.对于集合 **B**，$\log_2 x\le 2=\log_2 4$，解得 $0<x\le 4$.故$\left(C_RA\right)\cap B=\left(0,2\right]$.故选 **B.**

【点睛】

本小题主要考查一元二次不等式的解法，考查对数不等式的解法，考查集合的补集和交集的运算.对于有两个根的一元二次不等式的解法是：先将二次项系数化为正数，且不等号的另一边化为0，然后通过因式分解，求得对应的一元二次方程的两个根，再利用“大于在两边，小于在中间”来求得一元二次不等式的解集.

3、**B**

【解析】

根据线面垂直的判断方法对选项逐一分析，由此确定正确选项.

【详解】

对于 **A** 选项，当$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = n$，$m \perp n$时，由于m不在平面β内，故无法得出$m \perp \alpha$.

对于 **B** 选项，由于$\alpha // \beta$，$m \perp \beta$，所以$m \perp \alpha$.故 **B** 选项正确.

对于 **C** 选项，当$\alpha \perp \beta$，$m // \beta$时，m可能含于平面α，故无法得出$m \perp \alpha$.

对于 **D** 选项，当$n \subset \alpha$，$m \perp n$时，无法得出$m \perp \alpha$.

综上所述，$m \perp \alpha$的一个充分条件是“$\alpha // \beta$，$m \perp \beta$”

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查线面垂直的判断，考查充分必要条件的理解，属于基础题.

4、**A**

【解析】

A 项，由$a > b$得到$-a < -b$，则$c - a < c - b$，故A 项正确；

B 项，当$c = 0$时，该不等式不成立，故B 项错误；

C 项，当$a = 1$，$b = -2$时，$1 > -\dfrac{1}{2}$，即不等式$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$不成立，故C 项错误；

D 项，当$a = -1$，$b = -2$时，$\dfrac{b}{a} = 2 > 1$，即不等式$\dfrac{b}{a} < 1$不成立，故D 项错误.

综上所述，故选A .

5、**B**

【解析】

图像分析采用排除法，利用奇偶性判断函数为奇函数，再利用特值确定函数的正负情况。

【详解】

$f(-x) = \dfrac{-x + \sin(-x)}{1 + x^2} = -\dfrac{x + \sin x}{1 + x^2} = -f(x)$，故奇函数，四个图像均符合。

当$x \in (0, \pi)$时，$\sin x > 0$，$y = \dfrac{x + \sin x}{1 + x^2} > 0$，排除 **C**、**D**

当$x \in (\pi, 2\pi)$时，$\sin x < 0$，$y = \dfrac{x + \sin x}{1 + x^2} > 0$，排除 **A**。

故选 **B**。

【点睛】

图像分析采用排除法，一般可供判断的主要有：奇偶性、周期性、单调性、及特殊值。

6、**B**

【解析】

利用乘法运算化简复数$(a - i)(2 - i)$即可得到答案.

【详解】

由已知，$(a-i)(2-i)=2a-1-(a+2)i$，所以$2a-1=-a-2$，解得$a=-\frac{1}{3}$.

故选：B

【点睛】

本题考查复数的概念及复数的乘法运算，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

7、D

【解析】

根据指数函数的单调性，即当底数大于1时单调递增，当底数大于零小于1时单调递减，对选项逐一验证即可得到正确答案.

【详解】

因为$0<a<1$，所以$0<1-a<1$，所以$y=(1-a)^{x}$是减函数，

又因为$0<b<1$，所以$\frac{1}{b}>b$，$b>\frac{b}{2}$，

所以$(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^{b}$，$(1-a)^{b}<(1-a)^{\frac{b}{2}}$，所以A,B两项均错；

又$1<1+a<1+b$，所以$(1+a)^{a}<(1+b)^{a}<(1+b)^{b}$，所以C错；

对于D，$(1-a)^{a}>(1-a)^{b}>(1-b)^{b}$，所以$(1-a)^{a}>(1-b)^{b}$，

故选D.

【点睛】

这个题目考查的是应用不等式的性质和指对函数的单调性比较大小，两个式子比较大小的常用方法有：做差和0比，作商和1比，或者直接利用不等式的性质得到大小关系，有时可以代入一些特殊的数据得到具体值，进而得到大小关系.

8、C

【解析】

∵y=f（x+1）是偶函数，∴f（-x+1）=f（x+1），即函数f（x）关于x=1对称.

∵当x≥1时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$为减函数，∵f（$\log_3 2$）=f（2-$\log_3 2$）= f（$\log_3\frac{9}{2}$）

且$-\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{2}=\log_{\sqrt{3}}2$=$\log_3 4$，$\log_3 4$＜$\log_3\frac{9}{2}$＜3，∴b＞a＞c，

故选C

9、B

【解析】

在二项展开式的通项公式中，令 x 的幂指数等于 3，求出 r 的值，即可求得含 x^3 项的系数.

【详解】

$\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^r=C_6^r\cdot(-2)^r\cdot x^{6-3r}$，

令 $6-3r=3$，得 $r=1$，可得含 x^3 项的系数为 $C_6^1\times(-2)=-12$.

故选：**B.**

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，二项式系数的性质，属于基础题.

10、**D**

【解析】

选项 **A**，否命题为“若 $a\le 1$，则 $a^2\le 1$”，故 **A** 不正确.

选项 **B**，逆命题为“若 $a<b$，则 $am^2<bm^2$”，为假命题，故 **B** 不正确.

选项 **C**，由题意知对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $3^x<4^x$，故 **C** 不正确.

选项 **D**，命题的逆否命题“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$”为真命题，故“若 $\sin\alpha\ne\dfrac{1}{2}$，则 $\alpha\ne\dfrac{\pi}{6}$”是真命题，所以 **D** 正确.

选 **D.**

11、**D**

【解析】

求出复数 z 在复平面内对应的点的坐标，即可得出结论.

【详解】

复数 $z=1-i$ 在复平面上对应的点的坐标为 $(1,-1)$，该点位于第四象限.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查复数对应的点的位置的判断，属于基础题.

12、**A**

【解析】

直线 l 的方程为 $x=\dfrac{b}{a}y-c$，令 $a=1$ 和双曲线方程联立，再由 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 得到两交点坐标纵坐标关系进行求解即可.

【详解】

由题意可知直线l的方程为$x=\frac{b}{a}y-c$,不妨设$a=1$.

则$x=by-c$，且$b^2=c^2-1$

将$x=by-c$代入双曲线方程$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$中，得到$\left(b^4-1\right)y^2-2b^3cy+b^4=0$

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$

则$y_1+y_2=\frac{2b^3c}{b^4-1},y_1\cdot y_2=\frac{b^4}{b^4-1}$

由$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，可得$y_1=-2y_2$，故$\begin{cases}-y_2=\frac{2b^3c}{b^4-1}\\-2y_2^2=\frac{b^4}{b^4-1}\end{cases}$

则$8b^2c^2=1-b^4$，解得$b^2=\frac{1}{9}$

则$c=\sqrt{b^2+1}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

所以双曲线离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

故选：**A**

【点睛】

此题考查双曲线和直线相交问题，联立直线和双曲线方程得到两交点坐标关系和已知条件即可求解，属于一般性题目.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、$-\frac{1}{9}$

【解析】

先利用倍角公式及差角公式把已知条件化简可得$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，平方可得$\sin 2\alpha$.

【详解】

$\because 3\cos 2\alpha=4\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$，$\therefore 3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=2\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

则$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，平方可得$\sin 2\alpha=-\frac{1}{9}$.