高等数学（第二版）

重积分

三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

定义 设 $f(x,y,z)$ 是定义在空间有界闭区域 Ω 上的有界函数。将闭区域 Ω 作任意分割，分割成 n 个小闭区域 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots\Delta v_n$ ，其中 Δv_i 既表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积。在 Δv_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ ，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i\ (i=1,2,\cdots n)$ ，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$。如果当各小闭区域直径中最大值 λ 趋向于零时，该和式的极限总存在，则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分。记作 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$ ，即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中 dv 称作体积元素。

高等数学

上一页 下一页 返回

在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面划分 Ω ，那么除了包含 Ω 的边界点的一些不规则小闭区域外，得到的小闭区域 Δv_i 是长方体，其边长分别为 Δx_j、Δy_k 及 Δz_l ，则 $\Delta v_i = \Delta x_j \Delta y_k \Delta z_l$，因此在直角坐标系中，有时也把体积元素 dv 记作 $dxdydz$，而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

其中 $dxdydz$ 称作直角坐标系中体积元素。

连续函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分必存在。以后我们总假定函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域上是连续的。类似地,我们可以将三重积分推广到n重积分。

对于空间物体的质量，如果它的密度函数为 $\mu(x,y,z)$，该物体所占空间为闭区域 Ω，则物体的质量可表示为

$$M=\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$$

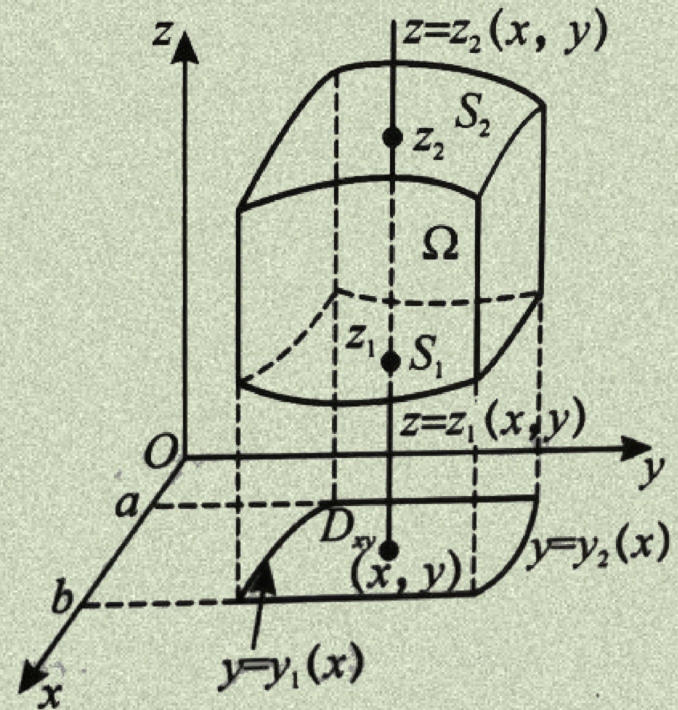
二、三重积分的计算

1. 直角坐标计算三重积分

(1) 设区域 Ω 由许多小柱体组合而成。假定平行于z轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面相交不多于两点(当 Ω 不满足这一条件时,可将Ω分成若干个满足条件的区域之和,利用区域可加性进行处理)。把闭区域 Ω 投影到xOy平面上，得一平面闭区域D_{xy}。过D_{xy}内的任一点(x,y)作平行于z轴的直线自上向下地穿透Ω。设穿入Ω内时的竖坐标为 $z_1(x,y)$，穿出 Ω 外时的竖坐标为 $z_2(x,y)$，且 $z_1(x,y)$ 与 $z_2(x,y)$ 皆为连续函数。

此时积分区域Ω可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_{xy},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$



如果投影区域D_{xy}为垂直型，则

$$D_{xy}=\{(x,y)|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

于是空间闭区域Ω可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

可得三重积分的计算公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)d\sigma$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

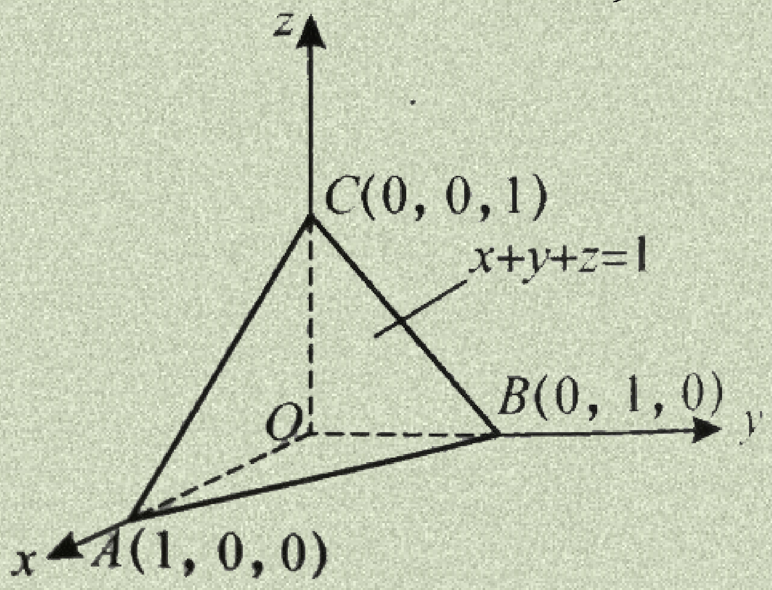
若把投影区域 D_{xy} 为水平型区域，则三重积分可表示为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

例1 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$,其中Ω由平面 $x+y+z=1$ 及三坐标面所围区域。

解 作闭区域如图所示,将 Ω投影到xOy面上，得投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$

在 D_{xy}内任取一点作平行于z 轴的直线，该直线在平面 $z=0$ 处穿入 Ω 内，又在平面$z=1-x-y$处穿出 Ω 外。于是



$$\iiint_{\Omega} x\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} x(1-x-y)^2 \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{24}.$$

例2 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$, ,其中Ω由平面

$x+y+z=1$ 及三坐标面所围区域。

解 由于函数 $f(x,y,z)$ 及积分区域 Ω 关于自变量均为对称，所以

$$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = \iiint\limits_{\Omega} ydxdydz = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz.$$

于是

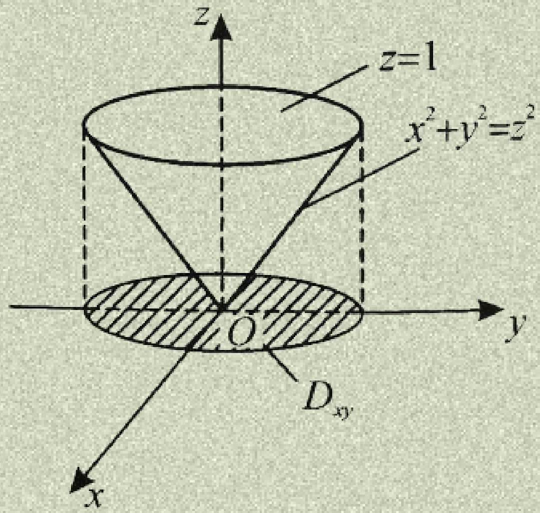
$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz = 3\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

例3 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dv$，其中 Ω 由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 所围。

解 积分区域 Ω 如图，Ω 在 xOy 面上的投影可表示为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right.$$

在 D_{xy} 中任取一点作平行于 z 轴的直线，该直线由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 穿入 Ω 内，又由平面 $z=1$ 穿出 Ω 外。于是



$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

这一在 D_{xy} 上的二重积分可以考虑用极坐标计算，由于 $D_{xy}=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le1,0\le\theta\le2\pi\}$

故

$$\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho)\rho d\rho$$

$$=2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

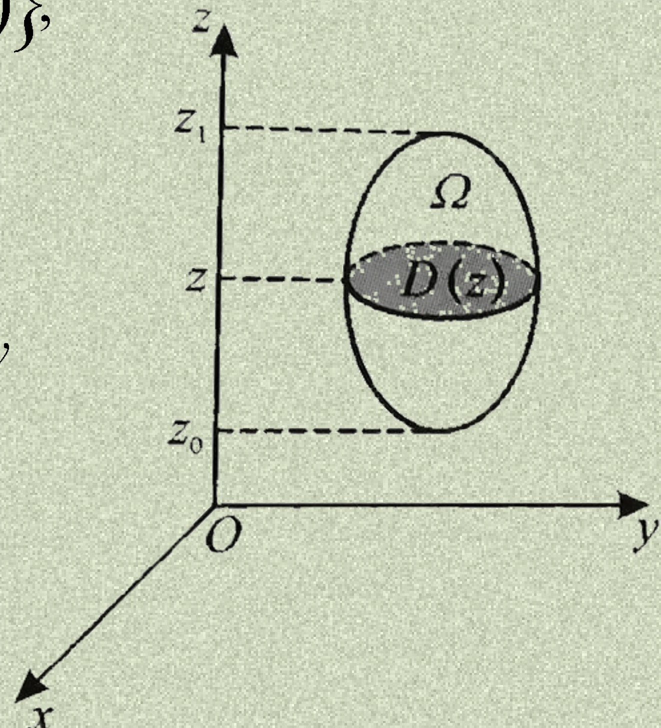
(2)设区域Ω 由平面薄片叠加而成。

如果区域 Ω由垂直于z轴的平面闭区域 $D(z)$与高度为 dz 的立体叠加而成,$D(z)$ 由 z_0 叠加至 z_1 ，则

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_0\le z\le z_1,(x,y)\in D(z)\},$$

于是，三重积分化为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_0^{z_1}dz\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)dxdy$$



上一页 下一页 返 回

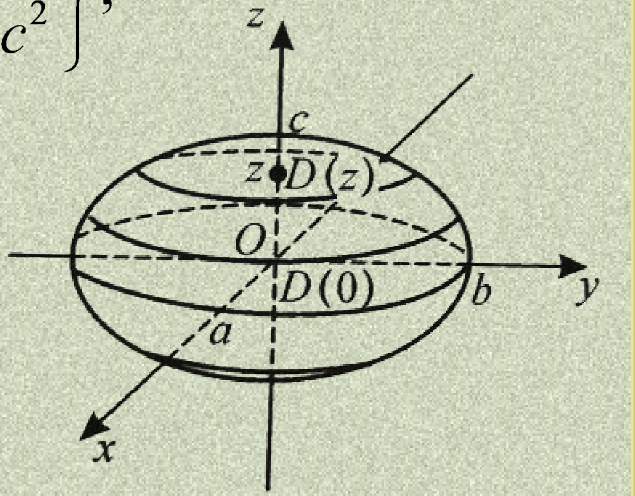
例4 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

解 空间闭区域 Ω 可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| -c\le z\le c,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\},$$

如图所示，则可得



$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz=\int_{-c}^{c} z^2 \iint\limits_{D(z)} dxdy.$$

上一页 下一页 返 回

高等数学

其中$D(z)$为垂直于z轴的平面截Ω所得的平面截面区域。它是椭圆盘$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$,其面积为

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

因此

$$\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\pi ab\int_{-c}^{c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$