

第十一章测评(B)

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知平面 α , 直线 m, n 满足 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$, 则“ $m \parallel n$ ”是“ $m \parallel \alpha$ ”的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

答案:A

解析:当 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$ 时,由线面平行的判定定理可知, $m \parallel n \Rightarrow m \parallel \alpha$;但反过来不成立,即 $m \parallel \alpha$ 不一定有 $m \parallel n$, m 与 n 还可能异面. 故选 A.

2. 如果圆锥的表面积是底面积的 3 倍,那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为()

- A. $\frac{2\pi}{3}$
- B. $\frac{5\pi}{6}$
- C. π
- D. $\frac{4\pi}{3}$

答案:C

解析:设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l ,

$$\because S_{\text{底}} + S_{\text{侧}} = 3S_{\text{底}}, \therefore 2S_{\text{底}} = S_{\text{侧}}, \therefore 2\pi r^2 = \pi r l,$$

$$\therefore l=2r.$$

设侧面展开图扇形的圆心角为 θ , 则 $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \theta = \pi.$$

3. 三棱台 $ABC-A'B'C'$ 的一条侧棱 AA' 所在直线与平面 $BCC'B'$ 之间的关系是()

A. 相交

B. 平行

C. 直线在平面内

D. 平行或直线在平面内

答案:A

解析:由棱台的定义知,棱台的所有侧棱所在的直线都交于一点,而任一侧面所在的平面由两条侧棱所在直线所确定,故这条侧棱与不含这条侧棱的任意一个侧面所在的平面都相交,故选 A.

4. 下列说法正确的是()

A. 若空间三条直线 a, b, c 满足 $a \perp b, b \perp c$, 则 $a \perp c$

B. 若直线 l 与平面 α 内两直线都垂直, 则 $l \perp \alpha$

C. 若 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面, 且 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = \emptyset$, 则 a, b 为异面直线

D. 若 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面, 且 $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$

答案:D

解析: 空间三条直线 a, b, c 满足 $a \perp b, b \perp c$ 时, a, c 位置关系不确定; 当直线 l 与平面 α 内两相交直线都垂直时, 才有 $l \perp \alpha$; 若 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面, 且 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = \emptyset$, 则 a, b 还可能平行; 若 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面, 且 $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$, 过 a 作平面 γ 分别交 α, β 于 m, n , 则 $a \parallel m, a \parallel n$, 因此 $m \parallel n$, 从而 $m \parallel b$, 即得 $a \parallel b$. 综上所述选 D.

5. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 侧棱长为 2, 体积为 1, 若此三棱柱的顶点均在同一球面上, 则该球半径的最小值为 ()

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案:D

解析: $\because$ 三棱柱内接于球, $\therefore$ 棱柱各侧面均为平行四边形且内接于圆, $\therefore$ 棱柱各侧面均为矩形, 即该三棱柱为直三棱柱. 设底面三角形的两条直角边长为 a, b ,

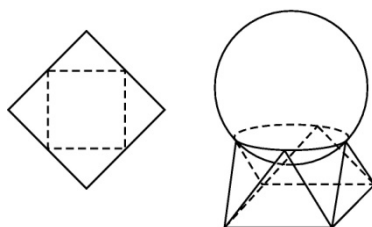
$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 2, 体积是 1,

$\therefore \frac{1}{2}ab \cdot 2=1$, 即 $ab=1$, 将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个长方体, 则直三棱柱

$ABC-A_1B_1C_1$ 与长方体有同一个外接球,

$\therefore$ 球的半径为 $\frac{\sqrt{a^2+b^2+4}}{2} \geq \frac{\sqrt{2ab+4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (当且仅当 $a=b=1$ 时, 等号成立).

6. 如图所示, 用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 按各边中点垂直折起四个小三角形, 做成一个蛋巢, 将体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的鸡蛋 (视为球) 放入其中, 蛋巢形状保持不变, 则鸡蛋 (球) 离蛋巢底面的最短距离为 ()



A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

答案: D

解析: 将鸡蛋视为球, 因为蛋巢的底面是边长为 1 的正方形, 所以过四个顶点截球所得的截面圆的直径为 1. 已知球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$, 可得球的半径为 1, 因此球心到截面的距离 $d = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则截面到球最低点距离为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而蛋巢的高度为 $\frac{1}{2}$, 故球离蛋巢底面的最短距离为 $\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

7. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° . 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为 ()

A. $40\sqrt{2}\pi$

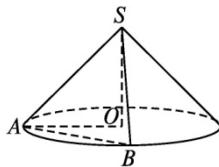
B. $40\sqrt{2}$

C. $20\sqrt{2}\pi$

D. $20\sqrt{2}$

答案:A

解析:设 O 为底面圆圆心,



$$\because \cos \angle ASB = \frac{7}{8},$$

$$\therefore \sin \angle ASB = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\therefore S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \times AS \times BS \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 5\sqrt{15}.$$

$$\therefore SA^2 = 80.$$

$$\therefore SA = 4\sqrt{5}.$$

$\because$ SA 与圆锥底面所成的角为 45° , $\angle SOA = 90^\circ$,

$$\therefore SO = OA = \frac{\sqrt{2}}{2} SA = 2\sqrt{10}.$$

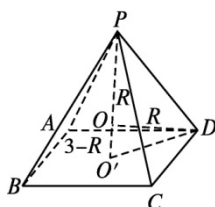
$$\therefore S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l = \pi \times 2\sqrt{10} \times 4\sqrt{5} = 40\sqrt{2}\pi.$$

8. 在四棱锥 P-ABCD 中, 底面 ABCD 是正方形, 顶点 P 在底面的射影是底面的中心, 且各顶点都在同一球面上, 若该四棱锥的侧棱长为 $\sqrt{11}$, 体积为 4, 且四棱锥的高为整数, 则此球的半径等于()

- A. 2 B. $\frac{11}{3}$ C. 4 D. $\frac{11}{6}$

答案:D

接球的球心为 O , 半径为 R , 四棱锥的高为 h , 则 $O'D = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $PO' = h$.


$$\text{所以}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+h^2=(\sqrt{11})^2, \text{即}\frac{1}{2}a^2+h^2=11. \quad \textcircled{1}$$

又因为四棱锥的体积为 4, 所以 $\frac{1}{3}a^2 \cdot h=4$. ②

$$(h-3)(h^2+3h+9)-11(h-3)=0,$$

即 $(h-3)(h^2+3h-2)=0$, 得 $h-3=0$ 或 $h^2+3h-2=0$,

因为 $h \in \mathbb{N}_+$, 所以 $h=3$.

再将 $h=3$ 代入①中, 解得 $a=2$, 所以 $O'D=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\sqrt{2}$, 所以 $OO'=PO'-PO=3-R$.

在 Rt $\triangle OO'D$ 中, 由勾股定理, 得 $OO'^2 + O'D^2 = OD^2$, 即 $(3-R)^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2$,

解得 $R = \frac{11}{6}$, 所以此球的半径等于 $\frac{11}{6}$.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 β , 则下列推理正确的是()

A. $\alpha \parallel \beta \Rightarrow l \perp m$

B. $\alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel m$

C. $l \parallel m \Rightarrow \alpha \perp \beta$

D. $l \perp m \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

答案:AC

解析:B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 l 与 m 不一定平行, 还可能为相交或异面;D. 若 $l \perp m$, 则 α 与 β 不一定平行, 还可能是相交.

10. 下列说法中错误的是()

A. 一个半圆以其直径所在直线为轴旋转一周所形成的曲面叫做球

B. 直角三角形绕一边旋转得到的旋转体是圆锥

C. 夹在圆柱的两个平行截面间的几何体还是一个旋转体

D. 圆锥截去一个小圆锥后剩余的部分是圆台

答案:ABC

解析:一个半圆绕着它的直径所在直线旋转一周所形成的曲面称为球面, 球面围成的几何体称为球, 故 A 错误;当以直角三角形的斜边所在直线为轴旋转时, 其余各边旋转形成的面所围成的几何体不是圆锥, 是由两个同底面的圆锥组成的几何体, 故 B 错误;当两个平行截面不平行于上、下两个底面时, 两个平行截面间的几何体不是旋转体, 故 C 错误;将圆锥截去小圆锥, 则截面必与底面平行, 因而剩余部分是圆台, 故 D 正确.

11. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E, F 分别是棱 PC, PD 的中点, 则下列结论正确的是()

- A. 棱 AB 与 PD 所在直线垂直
- B. 平面 PBC 与平面 $ABCD$ 垂直
- C. $\triangle PCD$ 的面积大于 $\triangle PAB$ 的面积
- D. 直线 AE 与直线 BF 是异面直线

答案:AC

解析:(图略)由条件可得 $AB \perp$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp PD$, 故 A 正确;假设平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 由 $PB \perp BC$, 得 $PB \perp$ 平面 $ABCD$, 从而 $PA \parallel PB$, 这是不可能的, 故 B 错;由条件可得 $CD \perp$ 平面 PAD , 则 $CD \perp PD$, 从而 $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2}CD \cdot PD$, $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PA$, 由 $AB=CD$, $PD > PA$ 知 C 正确;由 E, F 分别是棱 PC, PD 的中点, 可得 $EF \parallel CD$. 又因为 $AB \parallel CD$, 所以 $EF \parallel AB$, 故 AE 与 BF 共面, D 错.

12. 已知某正方体的外接球上有一个动点 M , 该正方体的内切球上有一个动点 N , 若线段 MN 的最小值为 $\sqrt{3}-1$, 则下列说法正确的是()

- A. 正方体的外接球的表面积为 12π
- B. 正方体的内切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$
- C. 正方体的棱长为 2
- D. 线段 MN 的最大值为 $2\sqrt{3}$

答案:ABC

解析:设正方体的棱长为 a , 则正方体外接球半径为体对角线长的一半, 为

$\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 内切球半径为棱长的一半, 为 $\frac{a}{2}$.

$\therefore M, N$ 分别为该正方体外接球和内切球上的动点,

$$\therefore MN_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a = \sqrt{3}-1, \text{ 解得 } a=2,$$

$\therefore$ 正方体的棱长为 2, C 正确.

正方体的外接球的表面积为 $4\pi \times (\sqrt{3})^2 = 12\pi$, A 正确.

正方体的内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3}$, B 正确.

线段 MN 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{a}{2} = \sqrt{3}+1$, D 错误. 故选 ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

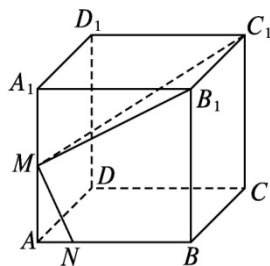
13. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

答案: ②③ $\Rightarrow$ ① (或 ①③ $\Rightarrow$ ②)

14. 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 AA_1 和 AB 上的点, 若

$\angle B_1MN$ 是直角, 则 $\angle C_1MN =$ _____.



答案: 90°

解析: $\because B_1C_1 \perp \text{平面 } A_1ABB_1, MN \subset \text{平面 } A_1ABB_1,$

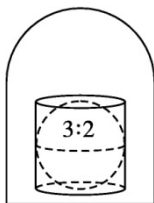
$\therefore B_1C_1 \perp MN$. 又 $\angle B_1MN$ 为直角,

即 $B_1M \perp MN$, 且 $B_1M \cap B_1C_1 = B_1$,

$\therefore MN \perp \text{平面 } MB_1C_1$. 又 $MC_1 \subset \text{平面 } MB_1C_1$,

$\therefore MN \perp MC_1, \therefore \angle C_1MN = 90^\circ$.

15. 某位数学家的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等, 且圆柱的体积与内切球的体积之比及圆柱的表面积与内切球的表面积之比均为 $3:2$. 若圆柱的内切球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 则该球的内接正方体的表面积为_____.



答案: 32

解析: 设圆柱的内切球的半径为 R , 因为圆柱的内切球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 所以 $\frac{4}{3}\pi$

$R^3 = \frac{32\pi}{3}$, 解得 $R=2$.

设该球的内接正方体的棱长为 a , 则 $a^2 + a^2 + a^2 = (2R)^2$, 即 $a^2 = \frac{16}{3}$, 所以该球的内

接正方体的表面积为 $6a^2 = 6 \times \frac{16}{3} = 32$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如
要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/208027060103006140>