

2024—2025 学年度（上）期末考试

高 2026 届数学试题（答案在最后）

考试时间 120 分钟 试题总分 150 分 试卷页数 4 页

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $x = \tan 20^\circ$ 的倾斜角为 ()

- A. 0° B. 20° C. 90° D. 不存在

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 < 0$, $a_3 a_7 = 36$, 则 a_5 等于 ()

- A. ± 6 B. -6 C. 6 D. 不确定

3. 我们把平面内与直线垂直的非零向量称为直线法向量, 在平面直角坐标系中, 过 $A(-3, 4)$ 的直线 l 的一个法向量为 $(1, -3)$, 则直线 l 的点法式方程为: $1 \times (x+3) + (-3) \times (y-4) = 0$, 化简得 $x-3y+15=0$. 类比以上做法, 在空间直角坐标系中, 经过点 $M(1, -3, 4)$ 的平面的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 2, -4)$, 则该平面的方程为 ()

- A. $x+2y-4z+21=0$ B. $x-3y+4z+7=0$
C. $x-3y+4z+21=0$ D. $x-3y+4z-11=0$

4. 方程 $|x|-2 = \sqrt{1-(y-1)^2}$ 所表示的图形是 ()

- A. 一个圆 B. 一个半圆 C. 两个圆 D. 两个半圆

5. 任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”等). 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 20$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} (a_n \text{ 为偶数}) \\ 3a_n + 1 (a_n \text{ 为奇数}) \end{cases}$,

则 $a_{2025} =$ ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

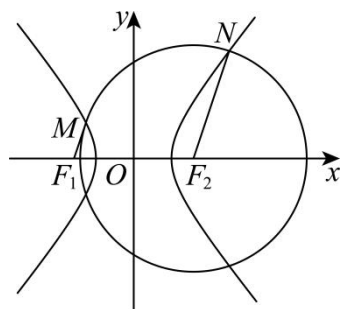
6. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{9} + x^2 = 1$ 的一个焦点是 F , 过原点的直线与 C 相交于点 A, B , $\triangle ABF$ 的面积是 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, 则 $|AB| =$ ()

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{185}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{185}}{5}$

7. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 若 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = \frac{1}{2}(3^{19} - 3^9)$, 则 $k =$ ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

8. 如图: F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点, 以 F_2 为圆心的圆与双曲线 C 的左右两支分别交于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{F_2N} = 3\overrightarrow{F_1M}$, 则双曲线的离心率为 ()



- A. $\frac{1+\sqrt{33}}{5}$ B. $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得 2 分或 4 分, 有选错得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是等比数列, 则下列结论中正确的是 ()

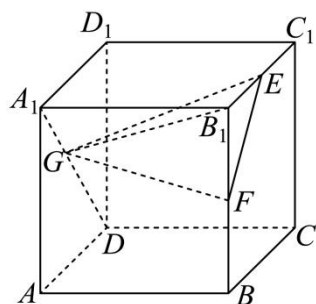
- A. $\{a_n^2\}$ 是等比数列
 B. $\{a_n^2\}$ 可能是等差数列
 C. $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6$ 是等比数列
 D. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是等比数列

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴交于点 M , 过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 分别过 A, B 作准线的垂线, 垂足为 A_1, B_1 , 线段 A_1B_1 的中点为 N , 则下列结论正确的是 ()

- A. 线段 AB 长度的最小值为 8
 B. 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 y_2$ 为定值 -8
 C. $AN \perp A_1 F$

D. 若 $\angle AMF = 30^\circ$ ，则直线 l 倾斜角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 如图，在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为棱 B_1C_1, BB_1 的中点， G 为线段 A_1D 上的一个动点，则下列说法正确的是（ ）



A. 三棱锥 $F-EG B_1$ 体积为定值

B. 存在点 G ，使平面 $EFG \parallel$ 平面 ACD_1

C. 设直线 FG 与平面 ADD_1A_1 所成角为 θ ，则 $\cos \theta$ 最小值为 $\frac{1}{3}$

D. 平面 DEF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的面积为 $\frac{21\sqrt{17}}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 1)$ ，平面 α 内一点 C 的坐标为 $(0, 0, 1)$ ，平面 α 外一点 A 的坐标为 $(1, 2, 1)$ ，则点 A 到平面 α 的距离为_____.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，前 $2m+1$ 项和为 77，这 $2m+1$ 项中的偶数项之和为 33，且 $a_{2m+1} = 2$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 作直线交椭圆 C 于 A, B 两点，其中点 B 在 x 轴下方， $\triangle ABF_2$ 内切圆交边 AB 于点 N ，则线段 AN 的长度取值范围为_____.

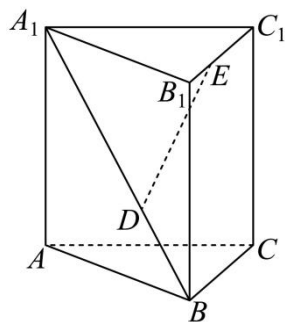
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 与两坐标轴均相切，且过点 $(2, 4)$. 直线 l 过点 $P(-1, 1)$ 交圆 C 于 M, N 两点.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若 $0 < a < 3$ 且 $3S_{\triangle PMC} = S_{\triangle PNC}$ ，求直线 l 的方程.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是边长为 2 的正三角形, $AA_1=3$, 点 D , E 分别在线段 A_1B , B_1C_1 上, 且 $A_1D=2DB$, $C_1E=2EB_1$.



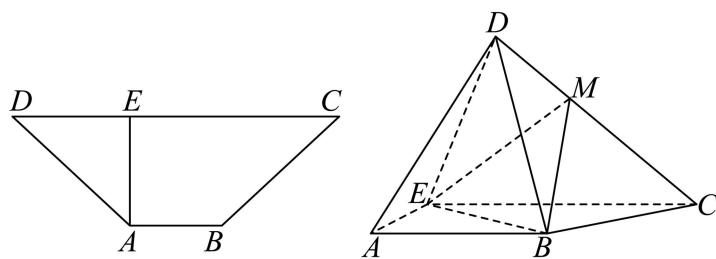
- (1) 求证: $DE \parallel$ 平面 ACC_1A_1
- (2) 求直线 DE 与平面 BCC_1B_1 所成角正弦值.

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列且公比大于 0, $a_1=2$, $b_1=3$, $2a_3=5(a_5-a_4)$, $6b_3=b_5-b_4$

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

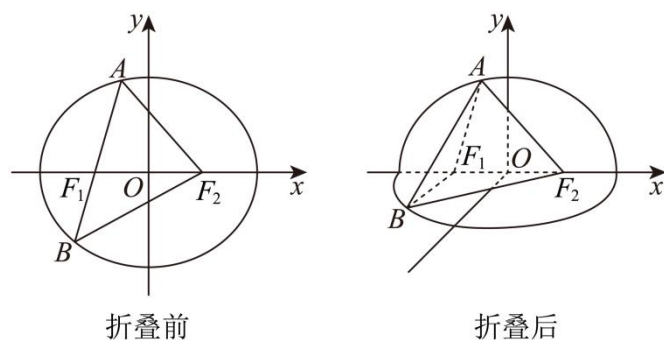
- (2) 设 $c_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{16n}{a_n \cdot a_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .

18. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AE \perp CD$, $AB=AE=1$, $CD=3$, 把三角形 DAE 沿着 AE 翻折, 得到如右图所示的四棱锥 $D-ABCE$, 记二面角 $D-AE-C$ 的平面角为 θ .



- (1) 当 $\theta=90^\circ$ 时, 求证: $CB \perp$ 平面 BDE ;
- (2) 当 $\theta=60^\circ$ 时,
- (i) 求点 D 到底面 $ABCE$ 的距离;
- (ii) 设 M 是侧棱 DC 上一动点, 是否存在点 M , 使得 $D-BE-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$, 若存在, 求 $\frac{DM}{DC}$ 的值.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 经过点 F_1 且倾斜角为 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点 (其中点 A 在 x 轴上方), $\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{3}$.



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 如图, 将平面 xOy 沿 x 轴折叠, 使 y 轴正半轴和 x 轴所确定的半平面 (平面 AF_1F_2) 与 y 轴负半轴和 x 轴所确定的半平面 (平面 BF_1F_2) 互相垂直.

① 若 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 求三棱锥 $A-BF_1F_2$ 的体积;

② 是否存在 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$, 使得 $\triangle ABF_2$ 折叠后的周长为与折叠前的周长之比为 $\frac{15}{16}$? 若存在, 求 $\tan \theta$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

1. C

【分析】根据直线的方程，利用斜率和倾斜角的关系求解.

【详解】 $x = \tan 20^\circ$ ，由于 $\tan 20^\circ$ 为常数，则直线 $x = \tan 20^\circ$ 的倾斜角为 90° .

故选：C.

2. B

【分析】由等比中项即可求解；

【详解】由 $a_3 a_7 = 36$ ，可得： $(a_5)^2 = 36$ ，

又等比数列所有奇数项同号， $a_1 < 0$ ，

所以 $a_5 = -6$ ，

故选：B

3. A

【分析】根据点法式方程的定义即可求解.

【详解】与平面向量类比，得到空间直角坐标系中，经过点 $M(1, -3, 4)$ 的平面的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 2, -4)$ ，

则该平面的方程为： $1 \times (x-1) + 2 \times (y+3) + (-4)(z-4) = 0$ ，

化简得 $x + 2y - 4z + 21 = 0$.

故选：A.

4. D

【分析】根据 $x \geq 2$ 和 $x \leq -2$ ，平方化简可得圆的方程，即可求解.

【详解】由于 $|x| - 2 \geq 0$ ，故 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$ ，

当 $x \geq 2$ 时，则 $x - 2 = \sqrt{1 - (y-1)^2}$ ，平方可得 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，表示圆心为 $(2, 1)$ 半径为 2 的右半圆，

当 $x \leq -2$ 时，则 $-x - 2 = \sqrt{1 - (y-1)^2}$ ，平方可得 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，表示圆心为 $(-2, 1)$ 半径为 2 的左半圆，

故选：D

5. B

【分析】根据“冰雹猜想”结合递推关系，利用规律求解即可

【详解】

$$a_1 = 20, a_2 = 10, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 8, a_6 = 4, a_7 = 2, a_8 = 1, a_9 = 4, a_{10} = 2, a_{11} = 1, a_{12} = 4, a_{13} = 2 \cdots,$$

可知数列 $\{a_n\}$ 可看作从第 8 项起以 3 为周期的数列,

因为 $2025 = 7 + 3 \times 672 + 2$,

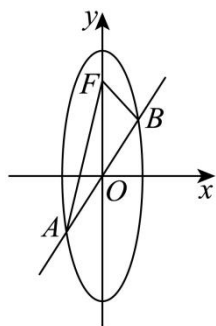
所以 $a_{2025} = a_9 = 4$,

故选: B

6. D

【分析】设直线 AB 方程 $y = kx$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆, 根据 $\triangle ABF$ 的面积求出 $k = \pm 6$, 利用弦长公式求出弦长.

【详解】如图:



由题, 不妨设 $F(0, 2\sqrt{2})$, 直线 AB 斜率存在,

设直线 AB 方程 $y = kx$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{y^2}{9} + x^2 = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow (k^2 + 9)x^2 - 9 = 0, \Delta = 36(k^2 + 9) > 0,$$

$$x_1 + x_2 = 0, x_1 \cdot x_2 = \frac{-9}{k^2 + 9},$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{36}{k^2 + 9}} = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

解得 $k = \pm 6$,

$$\text{故 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{37} \times \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{185}}{5},$$

故选: D.

7. A

【分析】由 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$ 得出 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 根据等比数列的求

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/208030065127007035>