

第 01 讲 第 01 讲 7.1.1 条件概率

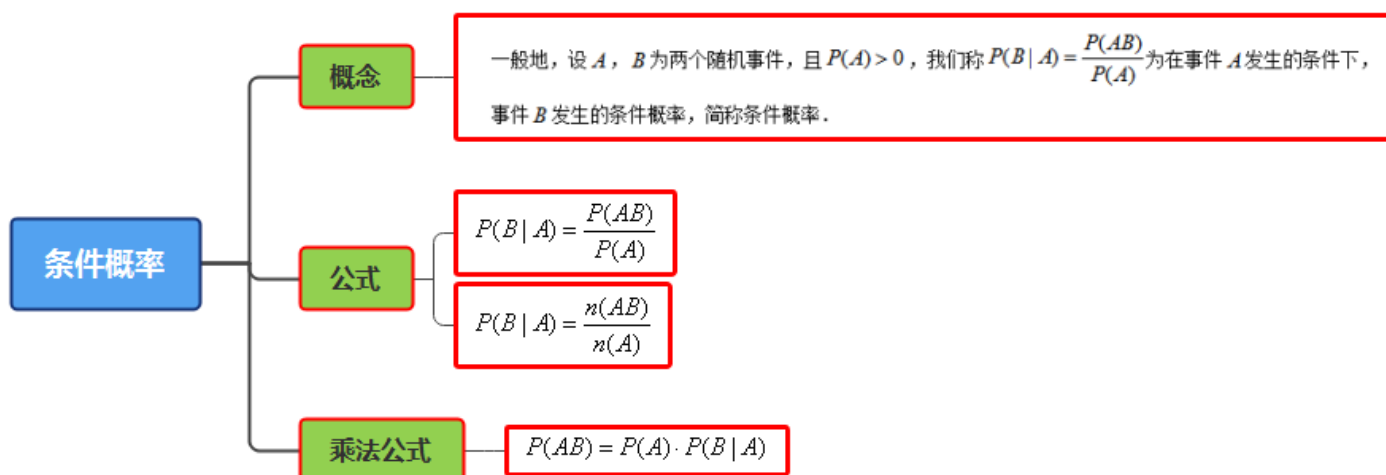
01

学习目标

课程标准	学习目标
①结合古典概型，了解条件概率与概率的乘法公式。 ②了解条件概率与独立性的关系。 ③能计算简单的随机事件的条件概率。	1.通过本节课的学习，要求会判断条件概率，掌握条件概率的基本求法，能解决与条件概率相关的问题；

02

思维导图



03

知识清单

知识点 01：条件概率

(1) 一般地，设 A, B 为两个随机事件，且 $P(A) > 0$ ，我们称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称条件概率。

①一般地，每个随机试验都是在一定条件下进行的，这里所说的条件概率是指随机试验结果的部分信息已知（即在原试验条件下，再加上一定的条件），求另一事件在此条件下发生的概率。

②事件 B 在“事件 A 已发生”这个附加条件下的概率与没有这个附加条件下的概率在很多情况下是不同的。

③当题目涉及“在…前提下”等字眼时，一般为条件概率。若题目没有出现上述字眼，但已知事件的发生影响了所求事件的概率，也是条件概率。

④在条件概率的定义中，要强调 $P(A) > 0$ ，当 $P(A) = 0$ 时，不能用这一方法定义事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率。

(2) 特别说明：

①计算条件概率时， $P(AB)$ 表示事件 A 和 B 同时发生的概率，不能随使用事件 B 的概率 $P(B)$ 代替 $P(AB)$ ；

②在条件概率的表示中，“|”之后的部分表示条件；

③ $P(AB)$ 和 $P(BA)$ 的意义不同， $P(AB)$ 表示在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，而 $P(BA)$ 是指在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率；

④ $P(AB)$ 与 $P(BA)$ 的区别：二者的样本空间不一样，前者的样本空间为“原试验结果”，后者的样本空间为“在原试验条件下，再加上事件 A 发生的条件”，一般地， $P(BA) \geq P(AB)$ 。

知识点 02：乘法公式

由条件概率的定义，对任意两个事件 A 与 B ，若 $P(A) > 0$ ，则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$ 。我们称上式为概率的乘法公式。

【即学即练 1】（2024·全国·高三专题练习）已知 $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A) = \frac{2}{5}$ ，则 $P(AB) =$ ()

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{9}{10}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【详解】由题意，知 $P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ 。

故选：C。

知识点 03：条件概率的性质

条件概率只是缩小了样本空间，因此条件概率同样具有概率的性质。设 $P(A) > 0$ ，则

- ① $P(\Omega|A) = 1$ ；
②如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$ ；
③设 $\bar{B}$ 和 B 互为对立事件，则 $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$ 。
④任何事件的条件概率都在 0 和 1 之间，即： $0 \leq P(B|A) \leq 1$ 。

知识点 04：事件的相互独立性

(1) 事件 A 与事件 B 相互独立：对任意的两个事件 A 与 B ，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称为独立。

(2) 性质：若事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都相互独立， $P(B|A) = P(B)$ ， $P(A|B) = P(A)$ 。

(3) 易混淆“相互独立”和“事件互斥”

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{7}{9}$

【答案】D

【详解】解法一：设第1次抽到白球为事件 A ，第2次取到的是黑球为事件 B ，

则 $n(A) = C_3^1 C_9^1 = 27$ ， $n(AB) = C_3^1 C_7^1 = 21$ ，

所以 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$ 。

解法二：盒中共有10个球，其中3白、7黑，在第一次取到白球的条件下，盒中还有2白、7黑共9个球，

从中任取一球，取到黑球的概率为 $P = \frac{7}{9}$ 。

故选：D

【典例4】（2024·全国·高三专题练习）盒内装有除型号和颜色外完全相同的16个球，其中6个是 E 型玻璃球，10个是 F 型玻璃球。 E 型玻璃球中有2个是红色的，4个是蓝色的； F 型玻璃球中有3个是红色的，7个是蓝色的。现从中任取1个，已知取到的是蓝球，问该球是 E 型玻璃球的概率是多少？

【答案】 $\frac{4}{11}$

【详解】解法一：设取到的球是蓝球为事件 A ，取到的球是 E 型玻璃球为事件 B ，

则 $P(A) = \frac{7+4}{16} = \frac{11}{16}$ ， $P(AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ，

$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{16}} = \frac{4}{11}$ 。

解法二：设取到的球是蓝球为事件 A ，取到的球是 E 型玻璃球为事件 B ，

$\therefore n(A) = 7+4=11$ ， $n(AB) = 4$ ，

$\therefore P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{4}{11}$ 。

故取到的是蓝球，该球是 E 型玻璃球的概率是 $\frac{4}{11}$ 。

【变式1】（2024上·辽宁·高二盘锦市高级中学校联考期末）小张、小王两家计划国庆节期间去辽宁游玩，他们分别从“丹东凤凰山，鞍山千山，本溪水洞，锦州笔架山，盘锦红海滩”这五个景点中随机选择一个游玩，记事件 A ：“两家至少有一家选择丹东凤凰山”，事件 B ：“两家选择景点不同”。则概率 $P(B|A) = (\quad)$

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{8}{9}$

【答案】D

【详解】由题意可知 $\bar{A}$ ：两家都没选择丹东凤凰山，即 $P(\bar{A}) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ ，

所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{9}{25}$,

而 AB : 有一家选择丹东凤凰山, 另一家选别的景点, 则 $P(AB) = \frac{4 \times 2}{5 \times 5}$,

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{8}{9}$.

故选: D

【变式 2】 (2024 上·江苏泰州·高三统考期末) 袋子中有 10 个大小相同的小球, 其中 7 个白球, 3 个黑球. 每次从袋子中随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回. 在第 1 次摸到白球的条件下, 第 2 次摸到白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【详解】 记事件 A 为第 1 次摸到白球, 事件 B 为第 2 次摸到黑球,

则 $P(A) = \frac{C_7^1}{C_{10}^1} = \frac{7}{10}$, $P(AB) = \frac{C_7^1 C_6^1}{C_{10}^1 C_9^1} = \frac{7}{15}$,

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{10}} = \frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【变式 3】 (2024·广东肇庆·校考模拟预测) 一个盒子里装有 3 种颜色, 大小形状质地都一样的 9 个球, 其中黄球 4 个, 蓝球 3 个, 绿球 2 个, 现从盒子中随机取出两个球, 记事件 A “取出的两个球颜色不同”, 记事件 B “取出一个蓝球, 一个绿球”, 则 $P(B|A) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{13}$

【详解】 事件 A “取出的两个球颜色不同”, 包括一个黄球一个蓝球, 一个黄球一个绿球以及一个蓝球一个绿球, 三种情况,

则 $n(A) = C_4^1 C_3^1 + C_4^1 C_2^1 + C_3^1 C_2^1 = 26$,

事件 B “取出一个蓝球, 一个绿球”,

则 $n(AB) = C_3^1 C_2^1 = 6$,

所以 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.

故答案为: $\frac{3}{13}$

题型 02 乘法公式的应用

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习）已知 1 号箱中有 2 个白球和 4 个红球，2 号箱中有 5 个白球和 3 个红球（白球与红球大小、形状、质地相同），现随机从 1 号箱中取出一球放入 2 号箱，再从 2 号箱中随机取出一球，则两次都取到红球的概率是（ ）

- A. $\frac{11}{27}$ B. $\frac{11}{24}$ C. $\frac{8}{27}$ D. $\frac{3}{8}$

【答案】C

【详解】设“从 1 号箱中取到红球放入 2 号箱”为事件 A ，“从 2 号箱中取到红球”为事件 B 。

由题意，知 $P(A) = \frac{4}{2+4} = \frac{2}{3}$ ， $P(B|A) = \frac{3+1}{8+1} = \frac{4}{9}$ ，所以 $P(BA) = P(B|A)P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ ，

所以两次都取到红球的概率为 $\frac{8}{27}$ 。

故选：C。

【典例 2】（2023 上·上海·高二上海市行知中学校考阶段练习）一个盒子中装有 2 个红球，8 个黑球，从中不放回地任取 1 个小球，则第二次才取出红球的概率是_____。

【答案】 $\frac{8}{45}$

【详解】由题意知第一次取出的是黑球，设为事件 A ，

第二次取出红球设为事件 B ，

则 $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ，则 $P(B|A) = \frac{2}{9}$ ，

所以第二次才取出红球的概率是 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$ 。

故答案为： $\frac{8}{45}$

【典例 3】（2024·全国·高三专题练习）某厂产品的废品率为 4%，而合格品中有 75% 是一等品，求一等品率。

【答案】72%。

【详解】记 A ：合格品，记 B ：一等品，由于 $B \subseteq A$ ，则 $P(B) = P(AB)$ ，

由题意， $P(A) = 1 - 4\% = 96\%$ ， $P(B|A) = 75\%$ ，

故 $P(B) = P(AB) = P(A)P(B|A) = 96\% \times 75\% = 0.72$ ，

即一等品率为 72%。

【变式 1】（2024·全国·高二假期作业）设 A ， B 是两个事件， $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，则下列结论一定成立的是（ ）

- A. $P(B|A)P(A|B) = 1$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
C. $P(B) \leq P(B|A)$ D. $P(AB) \leq P(B|A)$

【答案】D

【详解】A: 由 $P(B|A)P(A|B)=1$, 而 $0 \leq P(B|A), P(A|B) \leq 1$, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$,

即 $P(AB) = P(A) = P(B)$ 时成立, 否则不成立, 排除;

B: 当 A, B 是两个相互独立的事件, 有 $P(AB) = P(A)P(B)$, 否则不成立, 排除;

C: 由 $P(B) \leq P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 且 $0 < P(A) \leq 1$, 故 $P(AB) \geq P(A)P(B)$ 时成立, 否则不成立, 排除;

D: 由 $P(AB) = P(B|A)P(A)$, 而 $0 < P(A) \leq 1$, 则 $P(AB) \leq P(B|A)$, 符合;

故选: D

【变式 2】(2024 上·河南南阳·高二南阳市第五中学校联考期末) 已知 $P(A) = \frac{5}{6}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 则 $P(\bar{A}B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{12}$

【详解】因为 $P(A) = \frac{5}{6}$, 则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$,

所以, $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

故答案为: $\frac{1}{12}$.

【变式 3】(2024·全国·高三专题练习) 玛丽想在网上购买一款品牌手机, 客服承诺该品牌手机从 1m 高的地方掉落时, 屏幕第一次未碎掉的概率为 0.5, 当第一次未碎掉时第二次也未碎掉的概率为 0.3, 玛丽想如果手机从 1m 高的地方掉落两次后屏幕仍未碎掉的概率大于 0.2 就可以购买, 否则放弃. 请你用所学的概率知识帮玛丽做一下决策.

【答案】 玛丽应该放弃购买

【详解】设 A_i = “第 i 次掉落时, 手机屏幕没有碎掉”, $i = 1, 2$,

则由已知可得 $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2|A_1) = 0.3$,

故 $P(A_2A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$.

即这款手机从 1m 高的地方掉落两次后, 屏幕仍未碎掉的概率为 0.15,

因为 $0.15 < 0.2$, 故玛丽应该放弃购买.

题型 03 条件概率的性质及应用

【典例 1】(2024·湖北武汉·武汉市第六中学校联考二模) 设 A, B 为任意两个事件, 且 $A \subseteq B$, $P(B) > 0$, 则下列选项必成立的是 ()

A. $P(A) > P(A|B)$

B. $P(A) \geq P(A|B)$

C. $P(A) < P(A|B)$

D. $P(A) \leq P(A|B)$

【答案】D

【详解】由 $A \subseteq B$ ，则 $A \cap B = A$ ，故 $P(A) = P(AB) \leq P(B)$ ，

而 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ ，则 $P(A|B)P(B) = P(A)$ ，又 $1 \geq P(B) > 0$ ，

所以 $P(A) \leq P(A|B)$ 。

故选：D

【典例 2】（多选）（2024·全国·高三专题练习）设 A ， B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P(A) = \frac{1}{2}$ ，

$P(B) = \frac{11}{24}$ ， $P(\bar{A}B + A\bar{B}) = \frac{7}{24}$ ，则下列结论中正确的是（ ）

A. $P(\bar{A}B) = \frac{1}{8}$

B. $P(\bar{A} + B) = \frac{5}{6}$

C. $P(A|B) = \frac{9}{11}$

D. $P(\bar{A}|B) = P(\bar{B}|A)$

【答案】AB

【详解】因为 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{11}{24}$ ，所以 $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ， $P(\bar{B}) = \frac{13}{24}$ 。

因为 $\bar{A}B$ 与 $A\bar{B}$ 为互斥事件，所以 $P(\bar{A}B \cdot A\bar{B}) = 0$ ，

所以 $P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) - P(\bar{A}B \cdot A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$

$$= P(B) - P(AB) + P(A) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{11}{24} - 2P(AB) = \frac{7}{24}，$$

所以 $P(AB) = \frac{1}{3}$ ，

故 $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{11}{24} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ ，故 A 正确；

$P(\bar{A} + B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) + P(B) - [P(B) - P(AB)] = P(\bar{A}) + P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ，故 B 正确；

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{24}} = \frac{8}{11}$ ，故 C 错误；

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{24}} = \frac{3}{11}，P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}，$$

所以 $P(\bar{A}|B) \neq P(\bar{B}|A)$ ，故 D 错误。

故选：AB。

【典例 3】（多选）（2024 上·辽宁沈阳·高二沈阳市第八十三中学校联考期末）为庆祝建党 100 周年，讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程，增进全体党员干部职工对党史知识的了解，某单位组织开展党史知识竞赛活动，以支部为单位参加比赛，某支部在 5 道党史题中（有 3 道选择题和 2

道填空题), 不放回地依次随机抽取2道题作答, 设事件 A 为“第1次抽到选择题”, 事件 B 为“第2次抽到选择题”, 则下列结论中正确的是 ()

A. $P(A) = \frac{3}{5}$

B. $P(AB) = \frac{3}{10}$

C. $P(B|A) = \frac{1}{2}$

D. $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$

【答案】ABC

【详解】 $P(A) = \frac{C_3^1}{C_5^1} = \frac{3}{5}$, 故 A 正确;

$P(AB) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^1 C_4^1} = \frac{3}{10}$, 故 B 正确;

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

$P(\bar{A}) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5}$, $P(\bar{A}B) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^1 C_4^1} = \frac{3}{10}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$, 故 D 错误.

故选: ABC

【变式 1】(2024·全国·高二假期作业) 下列说法正确的是 ()

A. $P(B|A) < P(AB)$

B. $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ 是可能的

C. $0 < P(B|A) < 1$

D. $P(A|A) = 0$

【答案】B

【详解】由 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 当 $0 < P(A) < 1$, 则 $P(B|A) > P(AB)$, A 错误;

当 A 或 B 为不可能事件时, $P(B|A) = 0$, C 错误;

B: 要使 $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$, 即 $P(AB) = P(B)$, 当 B 恰好为 A 的子事件成立, 正确;

D: 由 $P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, 故错误.

故选: B

【变式 2】(多选) (2024·全国·高三专题练习) 若 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 分别为随机事件 A 、 B 的对立事件, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则下列结论正确的是 ()

A. $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$

B. $P(\bar{A}|B)P(B) = P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

C. $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = P(B)$

D. 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(B|A) = P(B)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/208032056073006072>