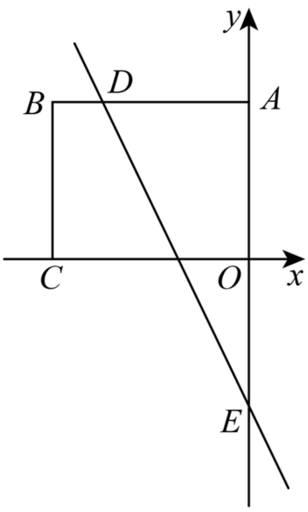
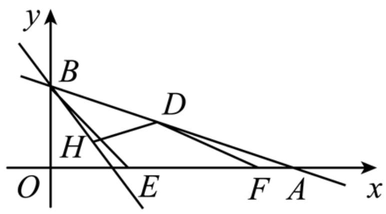
专题 32 函数与几何综合问题（25 题）

一、填空题

1．（2023·四川眉山·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 B 的坐标为 $\left(-8,6\right)$，过点 B 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为点 C、点 A，直线 $y=-2x-6$ 与 AB 交于点 D．与 y 轴交于点 E．动点 M 在线段 BC 上，动点 N 在直线 $y=-2x-6$ 上，若 $\triangle AMN$ 是以点 N 为直角顶点的等腰直角三角形，则点 M 的坐标为________



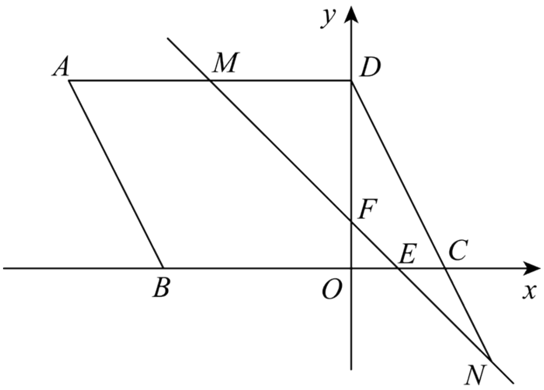
2．（2023·四川自贡·统考中考真题）如图，直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，点 D 是线段 AB 上一动点，点 H 是直线 $y=-\frac{4}{3}x+2$ 上的一动点，动点 $E\left(m,0\right)$，$F\left(m+3,0\right)$，连接 BE，DF，HD．当 $BE+DF$ 取最小值时，$3BH+5DH$ 的最小值是 ________.



3．（2023·江苏无锡·统考中考真题）二次函数 $y=a(x-1)(x-5)\left(a>\frac{1}{2}\right)$ 的图像与 x 轴交于点 A 、B，与 y 轴交于点 C，过点 $M\left(3,1\right)$ 的直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分，这两部分是三角形或梯形，且面积相等，则 a 的值为__________.

二、解答题

4．（2023·黑龙江牡丹江·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，▱$ABCD$的顶点B，C在x轴上，D在y轴上，OB，OC的长是方程$x^2-6x+8=0$的两个根（$OB>OC$）．请解答下列问题：

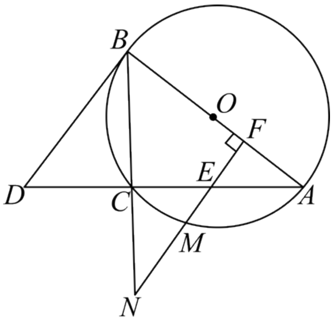


(1)求点B的坐标；

(2)若$OD:OC=2:1$，直线$y=-x+b$分别交x轴、y轴、AD于点E，F，M，且M是AD的中点，直线EF交DC延长线于点N，求$\tan\angle MND$的值；

(3)在（2）的条件下，点P在y轴上，在直线EF上是否存在点Q，使$\triangle NPQ$是腰长为5的等腰三角形？若存在，请直接写出等腰三角形的个数和其中两个点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

5．（2023·湖南·统考中考真题）如图，点 A，B，C 在⊙O 上运动，满足 $AB^2=BC^2+AC^2$，延长 AC 至点 D，使得 $\angle DBC=\angle CAB$，点 E 是弦 AC 上一动点（不与点 A，C 重合），过点 E 作弦 AB 的垂线，交 AB 于点 F，交 BC 的延长线于点 N，交⊙O 于点 M（点 M 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上）．



(1) BD 是⊙O 的切线吗？请作出你的判断并给出证明；

(2)记 $\triangle BDC$,$\triangle ABC$,$\triangle ADB$ 的面积分别为 S_1，S_2，S，若 $S_1\cdot S=\left(S_2\right)^2$，求 $\left(\tan D\right)^2$ 的值；

(3)若⊙O 的半径为 1，设 $FM=x$，$FE\cdot FN\cdot\sqrt{\dfrac{1}{BC\cdot BN}+\dfrac{1}{AE\cdot AC}}=y$，试求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围．

6．（2023·湖南·统考中考真题）我们约定：若关于 x 的二次函数 $y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$ 与 $y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$ 同时满足 $\sqrt{a_2-c_1}+(b_2+b_1)^2+|c_2-a_1|=0$，$b_1-b_2^{2023}\neq 0$，则称函数 y_1 与函数 y_2 互为"美美与共"函数．根据该约定，解答下列问题：

(1)若关于 x 的二次函数 $y_1=2x^2+kx+3$ 与 $y_2=mx^2+x+n$ 互为"美美与共"函数，求 k，m，n 的值；

(2)对于任意非零实数 r，s，点 $P(r,\ t)$ 与点 $Q(s,\ t)(r\neq s)$ 始终在关于 x 的函数 $y_1=x^2+2rx+s$ 的图像上运动，函数 y_1 与 y_2 互为"美美与共"函数．

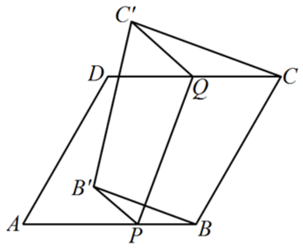
①求函数 y_2 的图像的对称轴；

②函数 y_2 的图像是否经过某两个定点？若经过某两个定点，求出这两个定点的坐标；否则，请说明理由；

(3)在同一平面直角坐标系中，若关于 x 的二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 与它的"美美与共"函数 y_2 的图像顶点分别为点 A，点 B，函数 y_1 的图像与 x 轴交于不同两点 C，D，函数 y_2 的图像与 x 轴交于不同两点 E，F．当 $CD=EF$ 时，以 A，B，C，D 为顶点的四边形能否为正方形？若能，求出该正方形面积的取值范围；若不请说明理由．

7．（2023·江苏无锡·统考中考真题）如图，四边形 $ABCD$ 是边长为4的菱形，$\angle A=60^\circ$，点 Q 为 CD 的中点，

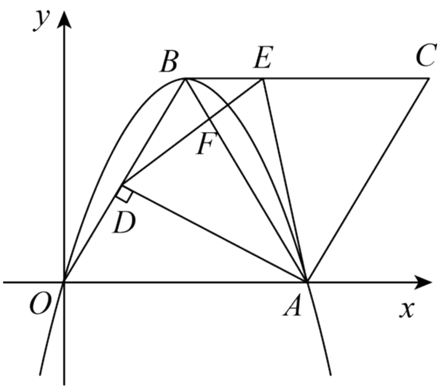
P 为线段 AB 上的动点，现将四边形 $PBCQ$ 沿 PQ 翻折得到四边形 $PB'C'Q$.



(1)当 $\angle QPB=45°$ 时，求四边形 $BB'C'C$ 的面积；

(2)当点 P 在线段 AB 上移动时，设 $BP=x$ ，四边形 $BB'C'C$ 的面积为S，求S关于 x 的函数表达式.

8．（2023·江苏徐州·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$ 的图象与 x 轴分别交于点 O,A ，顶点为 B ．连接 OB,AB ，将线段 AB 绕点A按顺时针方向旋转 $60°$ 得到线段 AC ，连接 BC ．点 D,E 分别在线段 OB,BC 上，连接 AD,DE,EA,DE 与 AB 交于点 $F,\angle DEA=60°$.



(1)求点 A,B 的坐标；

(2)随着点 E 在线段 BC 上运动.

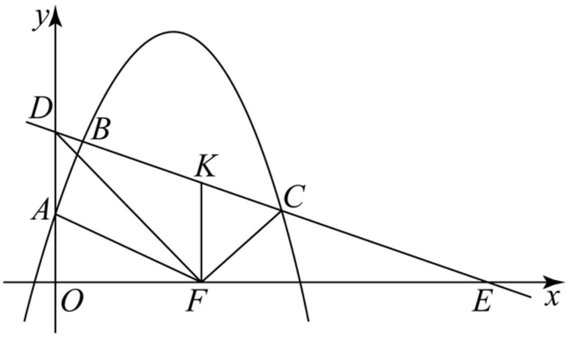
①$\angle EDA$ 的大小是否发生变化？请说明理由；

②线段 BF 的长度是否存在最大值？若存在，求出最大值；若不存在，请说明理由；

(3)当线段 DE 的中点在该二次函数的因象的对称轴上时，$\triangle BDE$ 的面积为_.

9．（2023·内蒙古·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+3x+1$ 交 y 轴于点A，直线

$y=-\frac{1}{3}x+2$交抛物线于B,C两点（点B在点C的左侧），交y轴于点D，交x轴于点E．



(1)求点D,E,C的坐标；

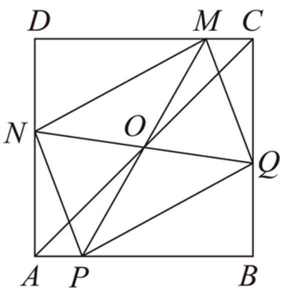
(2)F是线段OE上一点$\left(OF<EF\right)$，连接AF,DF,CF，且$AF^2+EF^2=21$．

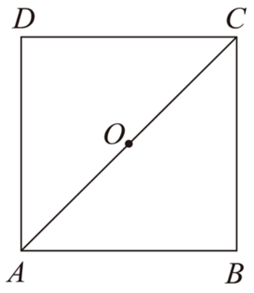
①求证：$\triangle DFC$是直角三角形；

②$\angle DFC$的平分线FK交线段DC于点K,P是直线BC上方抛物线上一动点，当$3\tan\angle PFK=1$时，求点P的坐标．

10．（2023·吉林·统考中考真题）如图，在正方形$ABCD$中，$AB=4\text{cm}$，点O是对角线AC的中点，动点P，

Q 分别从点A，B 同时出发，点 P 以1cm/s的速度沿边 AB 向终点 B 匀速运动，点 Q 以2cm/s的速度沿折线 $BC-CD$ 向终点 D 匀速运动．连接 PO 并延长交边 CD 于点 M，连接 QO 并延长交折线 $DA-AB$ 于点 N，连接 PQ，QM，MN，NP，得到四边形 $PQMN$．设点 P 的运动时间为 x（s）（$0<x<4$），四边形 $PQMN$ 的面积为 y（cm^2）





备用图

(1) BP 的长为__________cm，CM 的长为__________cm．（用含 x 的代数式表示）

(2)求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围．

(3)当四边形 $PQMN$ 是轴对称图形时，直接写出 x 的值．

11．（2023·广东·统考中考真题）综合运用

如图1，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上，如图2，将正方形 $OABC$ 绕点 O

逆时针旋转，旋转角为$\alpha\left(0^\circ<\alpha<45^\circ\right)$，$AB$交直线$y=x$于点$E$，$BC$交$y$轴于点$F$．

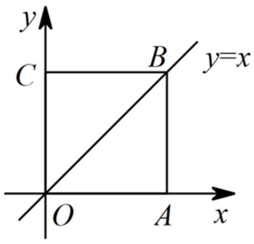


图1

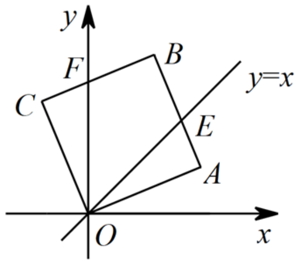


图2

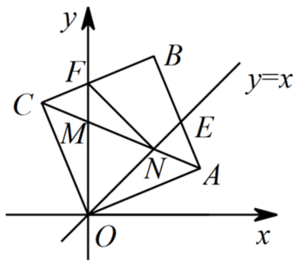


图3

(1)当旋转角$\angle COF$为多少度时，$OE=OF$；（直接写出结果，不要求写解答过程）

(2)若点$A(4,3)$，求FC的长；

(3)如图3，对角线AC交y轴于点M，交直线$y=x$于点N，连接FN，将$\triangle OFN$与$\triangle OCF$的面积分别记为S_1与S_2，设$S=S_1-S_2$，$AN=n$，求S关于n的函数表达式．

12．（2023·湖北黄冈·统考中考真题）已知抛物线$y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$与x轴交于$A,B(4,0)$两点，与y轴交于点$C(0,2)$，点P为第一象限抛物线上的点，连接CA,CB,PB,PC．

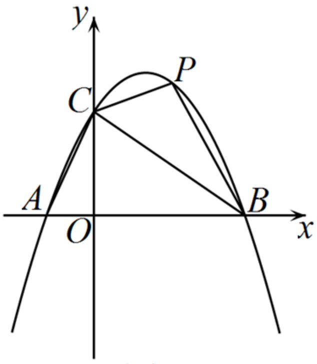


图1

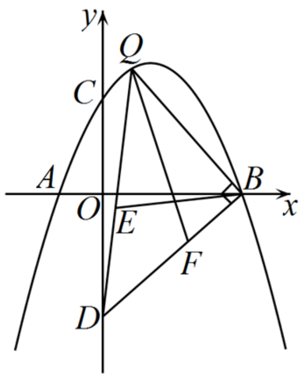
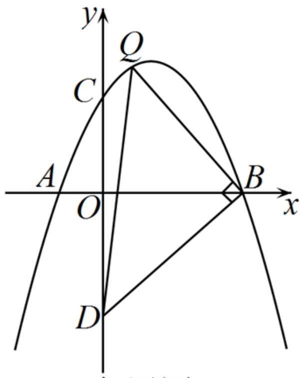


图2



备用图

(1)直接写出结果；$b=$______，$c=$______，点 A 的坐标为______，$\tan\angle ABC=$______；

(2)如图 1，当 $\angle PCB=2\angle OCA$ 时，求点 P 的坐标；

(3)如图 2，点 D 在 y 轴负半轴上，$OD=OB$，点 Q 为抛物线上一点，$\angle QBD=90°$，点 E，F 分别为$\triangle BDQ$的边 DQ,DB 上的动点，$QE=DF$，记 $BE+QF$ 的最小值为 m．

①求 m 的值；

②设$\triangle PCB$ 的面积为 S，若 $S=\dfrac{1}{4}m^2-k$，请直接写出 k 的取值范围．

13．（2023·湖北宜昌·统考中考真题）如图，已知 $A(0,2),B(2,0)$．点 E 位于第二象限且在直线 $y=-2x$ 上，$\angle EOD=90°$，$OD=OE$，连接 AB，DE，AE，DB．

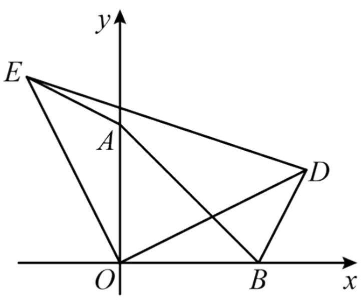


图1

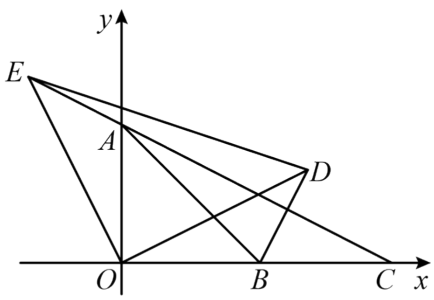


图2

(1)直接判断$\triangle AOB$的形状：$\triangle AOB$是__________三角形；

(2)求证：$\triangle AOE \cong \triangle BOD$；

(3)直线EA交x轴于点$C(t,0), t>2$．将经过B，C两点的抛物线$y_1=ax^2+bx-4$向左平移2个单位，得到抛物线y_2．

①若直线EA与抛物线y_1有唯一交点，求t的值；

②若抛物线y_2的顶点P在直线EA上，求t的值；

③将抛物线y_2再向下平移，$\dfrac{2}{(t-1)^2}$个单位，得到抛物线y_3．若点D在抛物线y_3上，求点D的坐标．

14．（2023·山东滨州·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，菱形$OABC$的一边OC在x轴正半轴上，顶点A的坐标为$\left(2,2\sqrt{3}\right)$，点D是边OC上的动点，过点D作$DE \perp OB$交边OA于点E，作$DF /\!/ OB$交边BC