专题 01 空间基底及综合应用

内容简介

➢ 一、巩固提升练	✧ 【题型九】 利用基底求数量积的范围
✧ 【题型一】 基地判断	✧ 【题型十】 基底求空间向量长度
✧ 【题型二】 基底求参	✧ 【题型十一】利用基底求空间长度最值
✧ 【题型三】 两套基底的坐标互化	✧ 【题型十二】空间向量基底型大题 1：两点距离
✧ 【题型四】 空间几何体基地发求向量	✧ 【题型十三】空间向量基底型大题 2：向量夹角
✧ 【题型五】 空间三点共线求参	✧ 【题型十四】空间向量基底型答题 3：综合证明
✧ 【题型六】 空间点共面求参	二、能力培优练
✧ 【题型七】 空间向量共面求参数	
✧ 【题型八】 利用基底求数量级	

巩固提升练

【题型一】 基底判断

知识点与技巧：

如果三个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$不共面，那么对任意一个空间向量$\vec{p}$，存在唯一的有序实数组(x,y,z)，使得$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$．其中，把$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$叫做空间的一个基底，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$都叫做 基向量，空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

1.（2023·全国·高二专题练习）若$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$构成空间的一个基底，则下列向量可以构成空间基底的是（　）

A．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{a}$　B．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}$　C．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}+\vec{c}$　D．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}$

2.（2023·全国·高二专题练习）已知$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一个基底，若$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}+\vec{c}$，则下列与$\vec{p}$，$\vec{q}$构成一组空间基底的是（　）

A．$\vec{r}=2\vec{b}-3\vec{c}$　B．$\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

C．$\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$　D．$\vec{r}=2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

3.（2023·全国·高二专题练习）已知$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一个基底，则可以与向量$\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}-\vec{c}$构成空间另一个基底的向量是（　）

A．$2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$　B．$\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$　C．$\vec{b}-\vec{c}$　D．$\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$

4.（2022 秋·浙江金华·高二校联考期末）若$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$构成空间的一个基底，则下列向量可以构成空间另一个基底的是（　）

A．$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{b}$　B．$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$，$\vec{c}$

C．$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{c}$　D．$\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{b}$，$\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$

5.（2022 秋·江西南昌·高二校联考期末）若$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$构成空间向量的一组基底，则下列向量不共面的是（　）

A．$\vec{b}+2\vec{c}$，$3\vec{b}$，$\vec{b}-2\vec{c}$　　　　B．$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$，$\vec{c}$

C．$3\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{c}-3\vec{a}$，$-2\vec{c}$　　　　D．$2\vec{a}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{b}+2\vec{a}$

6.（2021·高二课时练习）若$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间向量的一组基底，向量$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$，则可以与$\vec{m}$，$\vec{n}$构成空间向量的另一组基底的向量是（　）

A．$\vec{a}$　　　　B．$\vec{b}$　　　　C．$\vec{c}$　　　　D．$\vec{a}+2\vec{b}$

【题型二】基底求参

1.（2023 春·福建福州·高一校联考期中）已知$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$不共线，$\{\vec{e_1}-2\vec{e_2},\lambda\vec{e_1}+\vec{e_2}\}$是一组基底，则实数$\lambda$的取值范围是_____.

2.（2023 秋·湖北随州·高二随州市第一中学校考阶段练习）已知$\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-1,4,-2)$，$\vec{c}=(4,5,\lambda)$，若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量不能构成空间向量的一组基底，则实数$\lambda$的值为_________.

3.（2022 秋·浙江·高二浙江省余姚市第五中学校联考期中）已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-1,4,-2)$，$\vec{c}=(4,5,\lambda)$，如果$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$三个向量不能构成空间直角坐标系上的一组基底，则实数λ为（　）

A．0　　　　B．9　　　　C．5　　　　D．3

4.（2022 秋·北京西城·高二北师大二附中校考阶段练习）已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-1,4,-2)$，$\vec{c}=(7,5,\lambda)$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$三向量不能构成空间向量的一组基底，则实数λ的值为（　）

A．0　　　　B．5　　　　C．9　　　　D．$\frac{65}{7}$

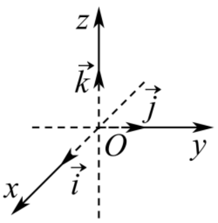
5.（2023·全国·高二专题练习）若$\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$是空间的一个基底，且向量$\{\overrightarrow{OA}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3},\overrightarrow{OB}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+2\vec{e_3},\overrightarrow{OC}=k\vec{e_1}+3\vec{e_2}+2\vec{e_3}\}$不能构成空间的一个基底，则$k=$（　）

A．$\frac{8}{3}$　　　　B．$\frac{5}{2}$　　　　C．$-\frac{1}{4}$　　　　D．$\frac{9}{4}$

【题型三】两套基底的坐标互化

知识点与技巧：

在空间选定一点O和一个单位正交基底$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$．以点$O$为原点，分别以$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴：x轴、y轴、之轴，它们都叫做坐标轴．这时就建立了一个空间直角坐标系$Oxyz$，O叫做原点，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$都叫做坐标向量，通过每两条坐标轴的平面叫做坐标平面，分别称为Oxy平面，Oyz平面，Ozx平面，它们把空间分成八个部分．



（1）空间直角坐标系中点的坐标：在单位正交基底$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下与向量$\overrightarrow{OA}$对应的有序实数组$(x,y,z)$，叫做点$A$在空间直角坐标系中的坐标，记作$A(x,y,z)$，其中$x$叫做点$A$的横坐标，$y$叫做点$A$的纵坐标，$z$叫做点$A$

的竖坐标_.

（2）空间直角坐标系中向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，给定向量 $\vec{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$．由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$．有序实数组 (x,y,z) 叫做 $\vec{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 之中的坐标，上式可简记作 $\vec{a}=(x,y,z)$．

1.（2022 秋·全国·高二专题练习）已知向量 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 是空间向量的一组基底，向量 $\{\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{c}\}$ 是空间向量的另外一组基底，若一向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 下的坐标为(1，−2，3)，则向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{c}\}$ 下的坐标为（　）

A．$(-\frac{1}{2}，\frac{3}{2}，3)$　B．$(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}，3)$　C．$(3，-\frac{1}{2}，\frac{3}{2})$　D．$(\frac{1}{2}，\frac{3}{2}，3)$

2.（2023·全国·高二专题练习）设 $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 是空间中的一个单位正交基底，已知向量 $\vec{p}=8\vec{a}+6\vec{b}+4\vec{c}$，其中 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{c}=\vec{k}+\vec{i}$，则向量 $\vec{p}$ 在基底 $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 下的坐标是（　）

A．$(12,14,10)$　B．$(10,12,14)$　C．$(14,12,10)$　D．$(4,3,2)$

3.（2022 秋·广东珠海·高二珠海市第一中学校考期末）已知向量 $\vec{p}$ 在基底 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 下的坐标为 $(1,2,3)$，则 $\vec{p}$ 在基底 $\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right\}$ 下的坐标为（　）

A．$(0,1,2)$　B．$(0,2,1)$

C．$(2,1,0)$　D．$(1,2,-1)$

4.（2022 秋·安徽滁州·高二校考阶段练习）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$，$\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$，$\overrightarrow{AA_1}=5\vec{k}$，则向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 在基底 $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 下的坐标是（　）

A．$(1,1,1)$　B．$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$　C．$(3,2,5)$　D．$(3,2,-5)$

5.（2023·全国·高二专题练习）已知 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 是空间的一个单位正交基底，向量 $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$，$\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$ 是空间的另一个基底，向量 $\vec{p}$ 在基底 $\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$ 下的坐标为（　）

A．$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},3\right)$　B．$\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},3\right)$　C．$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},3\right)$　D．$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},3\right)$

【题型四】空间几何体基底法求向量

知识点与技巧：

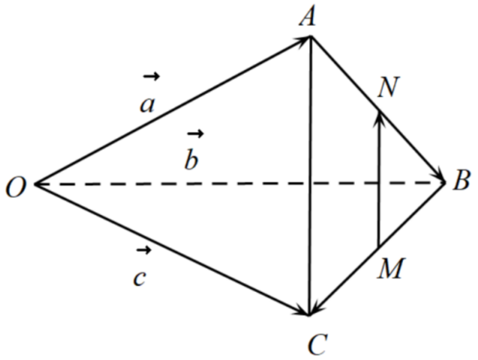
用基底表示向量的步骤

(1)定基底：根据已知条件，确定三个不共面的向量构成空间的一个基底.

(2)找目标：用确定的基底(或已知基底)表示目标向量，需要根据三角形法则及平行四边形法则，结合相等向量的代换、向量的运算进行变形、化简，最后求出结果.

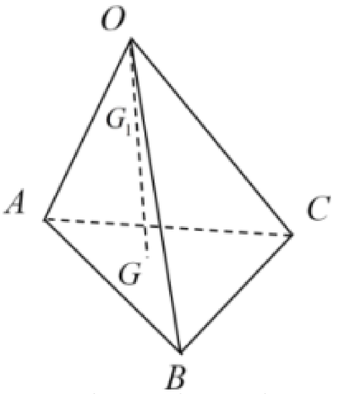
(3)下结论：利用空间的一个基底{***a***，***b***，***c***}可以表示出空间所有向量．表示要彻底，结果中只能含有 ***a***，***b***，***c***，不能含有其他形式的向量．

1.（2022·全国·高二课时练习）如图，在三棱锥$O-ABC$中，设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，若$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，则$\overrightarrow{MN}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$　　B．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　C．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

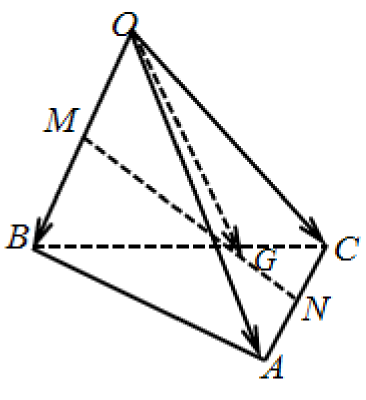
2.（2022·全国·高二课时练习）如图，$OABC$是四面体，G是$\triangle ABC$的重心，G_1是OG上一点，且$\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OG_1}$，则（　　）



A．$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$　　B．$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{12}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$

C．$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OC}$　　D．$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$

3.（2022·河北省唐县第一中学高一期中）如图，已知空间四边形$OABC$，其对角线为OB，$AC.M$，N分别是对边OB，AC的中点，点G在线段MN上，$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GN}$，现用基向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OG}$，设$\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则$x,y,z$的值分别是（　　）



A. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{3}$　　B. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{6}$

C. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{6}$, $z=\frac{1}{3}$　　D. $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{3}$

4.（2022·全国·高二专题练习）在三棱锥 $A-BCD$ 中，P 为$\triangle BCD$ 内一点，若 $S_{\triangle PBC}=1$，$S_{\triangle PCD}=2$，$S_{\triangle PBD}=3$，则 $\overrightarrow{AP}=$（　　）

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

5.（2022·河南新乡·高二期末（理））在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 CC_1 的中点，E 为 C_1D_1 的中点，F 为 B_1C_1 的中点，O 为 EF 的中点，直线 PE 交直线 DD_1 于点 Q，直线 PF 交直线 BB_1 于点 R，则（　　）

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AR}$　　B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AR}$　　D. $\overrightarrow{AO}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AQ}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AR}$

【题型五】空间三点共线求参

知识点与技巧：

1、对任意两个空间向量 $\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

2、A、B、C 三点共线条件：存在实数 λ，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$

1.（2022·全国·高二课时练习）在四面体 $OABC$ 中，点 M，N 分别为 OA、BC 的中点，若 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，且 G、M、N 三点共线，则 $x+y=$______.

2.（2023·全国·高一专题练习）设 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是空间中两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=2\vec{e_1}+k\vec{e_2}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{e_1}+3\vec{e_2}$，$\overrightarrow{CD}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}$，且 A,B,D 三点共线，则 k 的值为（　）

A. -8　　B. 4　　C. 8　　D. -4

3.（2021·高二课时练习）在四面体 $OABC$ 中，点 M，N 分别为 OA，BC 的中点，若 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，且 G，M，N 三点共线，则 $x+y=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

4.（2019·全国·高三竞赛）设 P，A，B，C 为空间不同的四点，且 a$\overrightarrow{PA}$ +β$\overrightarrow{PB}$+γ$\overrightarrow{PC}$=$\vec{0}$ (a、β、γ∈R).则 a+β+γ=0 且 aβγ≠0 是 A、B、C 三点共线的.

A. 充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既不充分又不必要条件

5.（2020 秋·内蒙古乌兰察布·高二统考期末）已知点 $A(2,2,1)$，$B(1,4,3)$，$C(4,x,y)$三点共线，则 $x-y=$_____.

【题型六】空间点共面求参数

知识点与技巧：

（1）共面向量：平行于同一平面的向量，叫做共面向量.

（2）空间向量共面的充要条件：向量 $\vec{p}$ 与不共线向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\vec{p}=\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

1.（2020 秋·辽宁大连·高二大连八中校考阶段练习）已知 O 为空间任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则 A,B,C,P 四点（　）

A．一定不共面　　B．一定共面　　C．不一定共面　　D．无法判断

2.（2023 秋·高二课时练习）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是空间向量的一组基底，$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\lambda\vec{c}$，若 A，B，C，D 四点共面．则实数 λ 的值为________.

3.（2023 春·高二课时练习）若点 P 与不共线的三点 A，B，C 共面，且对于空间任意一点 O，都有 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，则 $\lambda=$_____

4.（2023·全国·高二假期作业）已知 A，B，C，D 四点共面且任意三点不共线，平面 $ABCD$ 外一点 O，满足 $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，则 $\lambda=$___________.

5.（2023·全国·高二专题练习）已知 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是不共面向量，$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k},\vec{c}=7\vec{i}+2\vec{j}+\lambda\vec{k}$，若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三个向量共面，则实数 $\lambda=$_____.

【题型七】空间向量共面求参数

1.（2023·全国·高二专题练习）在四面体 $OABC$ 中，空间的一点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，若 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 共面，则 $\lambda=$_______.

2.（2022·高二课时练习）已知 $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$、$\vec{e_3}$ 不共面，若 $\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}+v\vec{e_3}=\vec{0}$，则 $\lambda^2+\mu^2+v^2=$_______.

3.（2022 秋·黑龙江哈尔滨·高二哈九中校考开学考试）有以下命题：

①若 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$（$x,y\in\mathrm{R}$），则 $\vec{p}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共面；

②若 $\vec{p}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共面，则 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$（$x,y\in\mathrm{R}$）；

③若 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$（$x,y\in\mathrm{R}$），则 M、P、A、B 共面；

④若 M、P、A、B 共面，则 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$（$x,y\in\mathrm{R}$）.

则所有真命题的序号为_________.

4.（2021·高二课时练习）已知向量 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 是三个不共面的非零向量，且 $\vec{a}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}$，$\vec{b}=-\vec{e_1}+4\vec{e_2}-2\vec{e_3}$，$\vec{c}=11\vec{e_1}+5\vec{e_2}+\lambda\vec{e_3}$，若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则 $\lambda=$_____.

5.（2022·全国·高一专题练习）已知 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是不共面向量，$\vec{a}$=2$\vec{i}$-$\vec{j}$+3$\vec{k}$，$\vec{b}$=-$\vec{i}$+4$\vec{j}$-2$\vec{k}$，$\vec{c}$=7$\vec{i}$+5$\vec{j}$

$+\lambda\vec{k}$，若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三个向量共面，则实数 λ 等于____.

【题型八】利用基底求数量积

知识点与技巧：

（1）已知两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则向量 $\vec{b}$ 的模长与 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影的乘积叫做 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$．即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$．

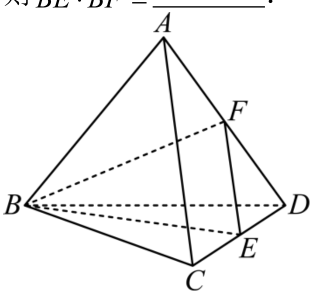
零向量与任意向量的数量积为 0.

（2）由数量积的定义，可以得到：

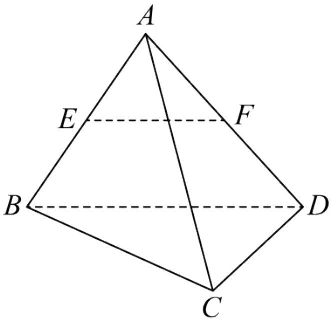
$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{a}\rangle=\vec{a}^2$＿

1.（2022 秋·北京·高二北京十五中校考期中）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AD=AA_1=1$，$AB=2$，则 $\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=$_______.

2.（2023 秋·新疆·高二校联考期末）如图，在棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别为棱 CD,AD 的中点，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=$________.



3.（2023·全国·高二课堂例题）如图所示，空间四边形 $ABCD$ 每条边和对角线长都为 a，点 E，F 分别是 AB,AD 的中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB}=$_____.



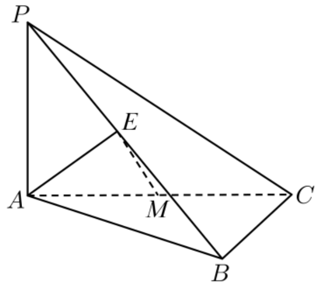
4.（2023 春·安徽六安·高一六安一中校考期末）平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=2$，$AD=1$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$，动点 P 在直线 CD_1 上运动，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最小值为________.

5.（2023·全国·高二专题练习）平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都为 1，且两两夹角为 $60°$，求 $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值是________.

【题型九】基底求数量积范围最值

1.（2023·上海·统考模拟预测）若 P 、 Q 、 R 是棱长为1的正四面体棱上互不相同的三点，则 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}$ 的取值范围是______.

2.（2023 秋·湖北荆州·高二沙市中学校考阶段练习）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB\perp BC$ ， $PA\perp$ 平面 ABC， $AE\perp PB$ 于点 E，M 是 AC 的中点， $PB=1$ ，则 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EM}$ 的最小值为_____.



3.（2023·全国·高一专题练习）点 P 是棱长为 2 的正四面体 $S-ABC$ 表面上的动点，若 MN 是该四面体外接球的一条直径，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值是_________.

4.（2022·浙江温州·高二校考阶段练习）正四面体 $A-BCD$ 的棱长为2，空间动点 P 满足 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=2$ ，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的取值范围是_____.

5.（2022 秋·河北张家口·高二校联考期中）球 O 为正四面体 $ABCD$ 的内切球， $AB=4$ ， PQ 是球 O 的直径，点 M 在正四面体 $ABCD$ 的表面运动，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值为________.

【题型十】基底求空间长度

知识点与技巧：

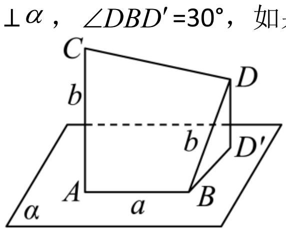
1.在空间直角坐标系中，设 $P_1(a_1,b_1,c_1)$ ， $P_2(a_2,b_2,c_2)$ ，则 P_1,P_2 两点间的距离 $P_1P_2=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=$ _ $\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$ __.

2. $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2}$

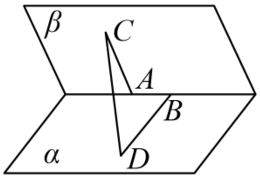
$=\sqrt{(\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{OC})^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}$

1.（2022·全国·高三专题练习）在平形六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ ，其中 $AB=1$ ， $AD=2$ ， $AA'=3$ ， $\angle BAD=90°$ ， $\angle BAA'=DAA'=60°$ ，则 AC' 的长为__________

2..（2022·上海·高二专题练习）如图，已知线段 AB 在平面 α 内，线段 $AC\perp\alpha$ ，线段 $BD\perp AB$，线段 $DD'\perp\alpha$ ， $\angle DBD'$ =30°，如果 $AB=a$，$AC=BD=b$，则 C、D 间的距离为___________；



3.（2021 秋·福建三明·高二校考阶段练习）图，60°的二面角的棱上有A、B两点，直线AC、BD分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于AB.已知$AB=2, AC=3, BD=4$，则CD长度为________.



4.（2021 秋·福建南平·高二校考期中）将边长为 1 的正方形$ABCD$沿对角线BD折成直二面角，若点P满足$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$，则$\left|\overrightarrow{BP}\right|$的值为______.

5.（2022 秋·陕西铜川·高二校考阶段练习）已知空间向量$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$的模长分别为$1,2,3$，且两两夹角均为$60^\circ$.点$G$为$\triangle ABC$的重心，若$\overrightarrow{PG}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}$，$x,y,z\in\mathbf{R}$，则$\left|\overrightarrow{PG}\right|=$________.

【题型十一】利用基底求空间向量长度最值

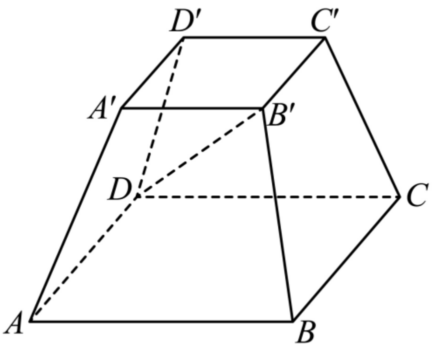
1.（2022·高二课时练习）正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 3，M为空间一点，N为底面$A_1B_1C_1D_1$内一点，且满足$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}+\lambda\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A}$，异面直线$A_1A$与$BN$所成角为 30°，则线段$MN$长度最小值为（   ）

A．$3\sqrt{2}-\sqrt{3}$ B．$3\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$ D．$\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$

2..（2022·高二课时练习）已知ΔABC的顶点$A\in$平面α，点 B,C 在平面α异侧，且$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，若AB，AC与α所成的角分别为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$，则线段$BC$长度的取值范围为_____.

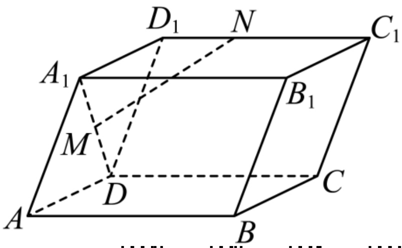
3.（2023·上海·高三专题练习）已知空间向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$满足：$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=2$，$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)//\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$，$\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{d}\right)=0$，则$\left|\vec{c}-\vec{d}\right|$的最大值为________.

4.（2023 秋·辽宁锦州·高二渤海大学附属高级中学校考期末）如图，在四棱台$ABCD-A'B'C'D'$中，$AA'=4$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60^\circ$，则$\left|\overrightarrow{DB'}-\left(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}\right)\right|\left(x,y\in\mathbf{R}\right)$的最小值为_______.



【题型十二】空间向量基底型大题 1：两点距离

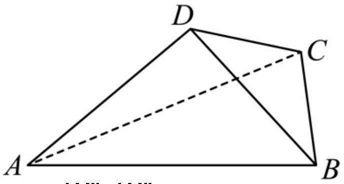
1.（2022 秋·广东佛山·高二校联考期中）如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M是线段A_1D的中点，点N在线段C_1D_1上，且$D_1N=\frac{1}{3}D_1C_1, \angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$，$\angle BAD=90^\circ, AB=AD=AA_1=1$.



(1)求满足 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$ 的实数 x，y，z 的值.

(2)求 MN 的长.

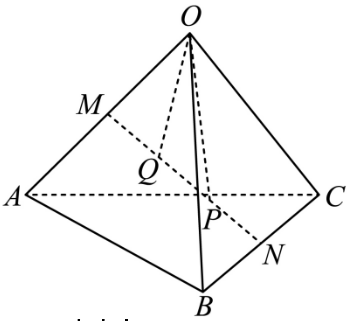
2.（2023·全国·高二专题练习）如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAC=60°$，$\angle BAD=\angle CAD=45°$，$AD=\sqrt{2}$，$AB=AC=3$.



(1)求 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值；

(2)已知 F 是线段 CD 中点，点 E 满足 $\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{AE}$，求线段 EF 的长.

3.（2023·全国·高二专题练习）如图，M、N 分别是四面体 $OABC$ 的棱 OA、BC 的中点，P、Q 是 MN 的三等分点（点 P 靠近点 N），若 $\overrightarrow{AO}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，解答下列问题：



(1)以 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为基底表示 $\overrightarrow{OP}$；

(2)若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle OAB=\angle OAC=\frac{\pi}{2}$，$\angle CAB=\frac{2\pi}{3}$，求 $|\overrightarrow{OP}|$ 的值.

【题型十三】空间向量基底型大题 2:向量夹角

知识点与技巧：

夹角

（1）求异面直线所成的角

若两异面直线 l_1,l_2 所成角为 θ，它们的方向向量分别为 $\vec{u_1},\vec{u_2}$，则有 $\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$.

（2）求直线和平面所成的角