成才之路·数学

人教A版 · 必修2

路漫漫其修远兮 吾将上下而求索

第三章

直线与方程

第三章

3．3　直线的交点坐标与距离公式

第三章

3．3.3　点到直线的距离

3．3.4　两条平行直线间的距离

1 课前自主预习

2 思路办法技巧

3 名师辨误做答

4 基础巩固训练

5 能力强化提高

课前自主预习

温故知新

1．平面内两点$P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$间的距离$|P_1P_2|=$ $\underline{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$，其推导方法是利用勾股定理．

两点$A(1,2)$，$B(-1,3)$间的距离是$\underline{\sqrt{5}}$．

2．直线方程的一般形式：$Ax+By+C=0$(A、B不全为0)．

3．与直线$Ax+By+C=0$(A、B不全为0)垂直的直线可设为____$Bx-Ay+\lambda=0$____，与之平行的直线可设为____$Ax+By+\lambda=0(\lambda\neq C)$____.

4．点到直线的距离即点到直线的垂线段的长度.

5．两条平行直线间的距离可转化为一条直线上____任一点____到另一直线的距离.

新课引入

世界最大直径的隧道终于在上海诞生，根据设计，整条隧道用于人员安全转移和工作联系的江中联络通道，在长达7.5km的隧道中，每隔800m左右设置一条连接通道，总共有8条，目前已经完成了3条，使相距15m的两条隧道紧紧地联系在一起．如果将两条隧道看成平行直线，那么如何在坐标系中计算它们的距离呢？

自主预习

阅读教材P106～109，回答下列问题.

1．点到直线的距离公式

点$P_0(x_0，y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离$d=$________ $\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

[破疑点]点到几种特殊直线的距离：

(1)点$P(x_0, y_0)$到x轴的距离$d=|y_0|$；

(2)点$P(x_0, y_0)$到y轴的距离$d=|x_0|$；

(3)点$P(x_0, y_0)$到直线$y=a$的距离$d=|y_0-a|$；

(4)点$P(x_0, y_0)$到直线$x=b$的距离$d=|x_0-b|$.

即学即练1

点$(1,-5)$到直线$2x-y-2=0$的距离$d=$________.

[答案] $\sqrt{5}$

[解析] $d=\frac{|2\times1-(-5)-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$.

2．两条平行直线间的距离

(1)定义：夹在两条平行直线间公垂线段的长叫做这两条平行直线间的距离.

(2)求法：转化为求点到直线的距离，即在其中任意一条直线上任取一点，这点到另一条直线的距离就是这两条平行直线间的距离.

(3)公式

一般地，已知两条平行直线l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$．设$P(x_0,y_0)$是直线l_2上的任意一点，则$Ax_0+By_0+C_2=0$，即$Ax_0+By_0=-C_2$，于是$P(x_0,y_0)$到直线l_1：$Ax+By+C_1=0$的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

此式就是两条平行直线l_1与l_2间的距离公式.

[破疑点](1)使用两条平行直线间的距离公式的前提条件：

①把直线方程化为直线的一般式方程；

②两条直线方程中x，y系数必须分别相等.

(2)求两条平行直线间的距离通常转化为其中一条直线上任意一点到另一条直线的距离，且两平行线间距离与其中一条直线上点的选取无关.

(3)当两直线都与x轴(或y轴)垂直时，可利用数形结合来解决.

①两直线都与x轴垂直时，l_1：$x=x_1$，l_2：$x=x_2$，则$d=|x_2-x_1|$；

②两直线都与y轴垂直时，l_1：$y=y_1$，l_2：$y=y_2$，则$d=|y_2-y_1|$.

即学即练2

两平行直线$x+y+2=0$与$x+y-3=0$的距离等于(　　)

A.$\frac{5}{2}\sqrt{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$5\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{2}$

[答案]　A

[解析]　直线$x+y+2=0$与x轴的交点是$P(-2,0)$，点P到直线$x+y-3=0$的距离$d=\frac{|-2+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$，即这两条平行线间的距离为$\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

思路方法技巧

命题方向 1 点到直线的距离公式

学法指导 透析点到直线的距离公式：

(1)点到直线的距离是该点与直线上任意一点连线的最短距离；

(2)点到直线的距离公式适用于坐标平面内的所有情况，特别地点在直线上时，该距离为0；

(3)求点到直线的距离的步骤：

①将直线方程化为一般式$Ax+By+C=0$；

②将点$(x_0，y_0)$代入公式$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，计算可得.

[例1]　求点$P(3,-2)$到下列直线的距离．

(1)$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$；(2)$y=6$；(3)$x=4$.

[分析]　解答本题可先把直线方程化为一般式(特殊直线可以不化)，然后再利用点到直线的距离公式及特殊形式求出相应的距离．

[解析] (1)把方程$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$写成$3x-4y+1=0$，由点到直线的距离公式得$d=\frac{|3\times3-4\times(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{18}{5}$.

(2)方法一：把方程$y=6$写成$0\cdot x+y-6=0$，由点到直线的距离公式得$d=\frac{|0\times3+(-2)-6|}{\sqrt{0^2+1^2}}=8$.

方法二：因为直线$y=6$平行于x轴，

所以$d=|6-(-2)|=8$.

(3)因为直线$x=4$平行于y轴，

所以$d=|4-3|=1$.

规律总结：针对这个类型的题目一般先把直线的方程化为一般式，然后直接利用点到直线的距离公式求得．对于与坐标轴平行的直线$x=a$或$y=b$，求点到它们的距离时，既可以用点到直线的距离公式，也可以直接写成$d=|x_0-a|$或$d=|y_0-b|$.

跟踪练习 1

求点$P_0(-1,2)$到下列直线的距离：

(1)$2x+y-10=0$；(2)$x=2$；(3)$y-1=0$.

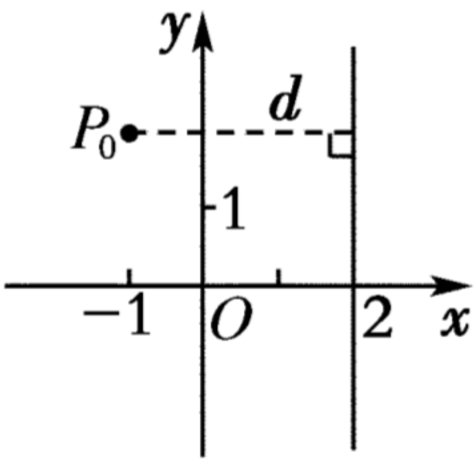
[分析]　对于(1)(2)(3)，均可直接利用点到直线的距离公式求解；

另外对于(2)，还可利用$d=|x-x_0|$求解；

对于(3)，还可利用$d=|y-y_0|$求解.

[解析] (1)由点到直线的距离公式知

$$d=\frac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

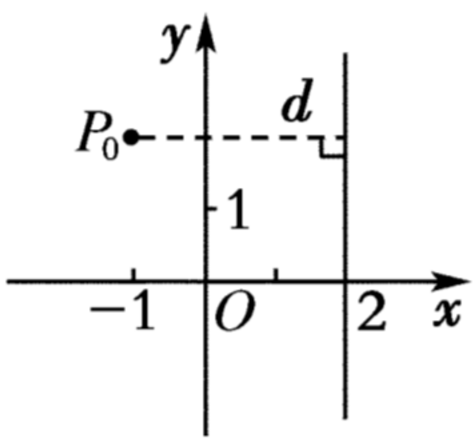


(2)解法一：直线方程化为一般式为$x-2=0$.

由点到直线的距离公式$d=\dfrac{|-1+0\times 2-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3$.

解法二：∵直线$x=2$与y轴平行，

∴由右图知$d=|-1-2|=3$.



(3)解法一：由点到直线的距离公式得$d=\dfrac{|-1\times 0+2-1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=1$.

解法二：∵直线$y-1=0$与x轴平行，

∴由右图知$d=|2-1|=1$.

命题方向2 求两平行直线的距离

学法指导 利用求两平行直线间距离的公式时注意把直线方程化为一般形式且使x，y的系数对应相等.

[例2] 求两条平行线l_1：$6x+8y=20$和l_2：$3x+4y-15=0$的距离.

[分析] 解答本题可先在直线l_1上任取一点$A(2,1)$，然后再求点A到直线l_2的距离即为两直线的距离；或者直接应用两条平行线间的距离公式$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

[解析] 方法一：若在直线l_1上任取一点$A(2,1)$，则点A到直线l_2的距离即为所求的平行线间的距离，

$$\therefore d=\frac{|3\times2+4\times1-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

如图所示.