第二章 线性规划

（Linear Programming）

本章主要内容：

- 第一节 线性规划的模型与图解法
- 第二节 单纯形法
- 第三节 对偶问题与灵敏度分析
- 第四节 运输问题
- 第五节 线性整数规划

第一节 线性规划的模型与图解法

一、线性规划问题及其数学模型

在生产管理和经营活动中经常需要解决：如何合理地利用有限的资源，以得到最大的效益。

例1 某工厂可生产甲、乙两种产品，需消耗煤、电、油三种资源。现将有关数据列表如下：

资源单耗 产品 / 资源	甲	乙	资源限量
煤（t）	9	4	360
电（kw.h）	4	5	200
油(t)	3	10	300
单位产品价格(万元)	7	12	

试拟订使总收入最大的生产方案。

线性规划模型的三要素

1. **决策变量：** 需决策的量，即待求的未知数；

2. **目标函数：** 需优化的量，即欲达的目标，用决策变量的表达式表示；

3. **约束条件：** 为实现优化目标需受到的限制，用决策变量的等式或不 等式表示；

在本例中

决策变量：甲、乙产品的计划产量为x_1、x_2 ；

目标函数：总收入，记为z, 则$z=7x_1+12x_2$，为体现对其追求极大化，在z 的前面冠以极大号Max;

约束条件：分别来自资源煤、电、油限量的约束，和产量非负的约束，表示为

$$s.t.\begin{cases} 9x_1+4x_2\le 360 \\ 4x_1+5x_2\le 200 \\ 3x_1+10x_2\le 300 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

解：设安排甲、乙产量分别 为 x_1, x_2,总收入为 z，则问题1求解最优方案的数学模型为：

$$Max z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划模型的一个基本特点：

目标和约束均为变量的线性表达式

如果模型中出现如

$$x_1^2 + 2\ln x_2 - \frac{1}{x_3}$$

的非线性表达式，则属于非线性规划。

例2 某市今年要兴建大量住宅,已知有三种住宅体系可以大量兴建，各体系资源用量及今年供应量见下表：

资源 住宅体系	造价 (元/m²)	钢材 (公斤/m²)	水泥 (公斤/m²)	砖 (块/m²)	人工 (工日/m²)
砖混住宅	105	12	110	210	4.5
壁板住宅	135	30	190	——	3.0
大模住宅	120	25	180	——	3.5
资源限量	110000 (千元)	20000 (吨)	150000 (吨)	147000 (千块)	4000 (千工日)

要求在充分利用各种资源条件下使建造住宅的总面积为最大(即求安排各住宅多少m²)，求建造方案。

解：设今年计划修建砖混、壁板、大模住宅各为 x_1, x_2, x_3 m^2, z为总面积,则本问题的数学模型为:

$$Max z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 0.105x_1 + 0.135x_2 + 0.120x_3 \le 110000 \\ 0.012x_1 + 0.030x_2 + 0.025x_3 \le 20000 \\ 0.110x_1 + 0.190x_2 + 0.180x_3 \le 150000 \\ 0.210x_1 \le 147000 \\ 0.0045x_1 + 0.003x_2 + 0.0035x_3 \le 4000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

前苏联的尼古拉也夫斯克城住宅兴建计划采用了上述模型，共用了12个变量，10个约束条件。

练习：某畜牧厂每日要为牲畜购买饲料以使其获取A、B、C、D四种养分。市场上可选择的饲料有M、N两种。有关数据如下：

饲料	售价	每公斤含营养成分			
		A	B	C	D
M	10	0.1	0	0.1	0.2
N	4	0	0.1	0.2	0.1
牲畜每日每头需要量		0.4	0.6	2.0	1.7

试决定买M与N二种饲料各多少公斤而使支出的总费用为最少？

解：设购买M、N饲料各为x_1, x_2，则

$$Min z = 10x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 0.1x_1 + 0x_2 \geq 0.4 \\ 0x_1 + 0.1x_2 \geq 0.6 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 2.0 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

书例2.1，例2.2

线性规划模型的一般形式：（以MAX型、 $\le$ 约束为例）

决策变量： $x_1, \cdots, x_n$

目标函数： $Max\,z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

约束条件：

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

模型一般式的矩阵形式

记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T, C=(c_1,\cdots,c_n), A=(a_{ij})_{m\times n}, b=(b_1,\cdots,b_m)^T$

则模型可表示为

$$Maxz = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

资源约束条件

非负约束条件

X称为决策变量向量，C 称为价格系数向量，A称为技术系数矩阵，b称为资源限制向量。

问题：为什么 A 称为技术系数矩阵？

回顾例1的模型

其中

$X=(x_1,x_2)^T$ 表示决策变量的向量；

$C=(7,12)$ 表示产品的价格向量；

$b=(360,200,300)^T$ 表示资源限制向量；

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$ 表示产品对资源的单耗系数矩阵。

1.1.3 线性规划应用举例

例（下料问题） 某工厂要做 100 套钢架，每套用长为 2.9 m,2.1 m,1.5 m 的圆钢各一根。已知原料每根长 7.4 m，问：应如何下料，可使所用原料最省？

解： 共有 8 种下料方案，如表所示。

方案	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6.	6
剩余料头	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

方案	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6.	6
剩余料头	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8$分别为上述 8 种方案下料的原材料根数，建立如下的 LP 模型：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 100 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 100 \\ x \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, 8) \end{cases}$$

例（汽油调和问题）：新星炼油厂生产的70,80,85号三种汽油由三种原料调和而成，且有不同的质量要求。每种原料每日可用数量、质量指标、成本以及每种汽油的质量要求和价格见表。该炼油厂如何调和才能使利润最大？假定调和中的质量指标都符合线性相加关系。

汽油原料数据

原料	辛烷值 %	含硫量 %	成本 (元/吨)	可用量 (吨/日)
直馏汽油	62	1.5	600	2000
催化汽油	78	0.8	900	1000
重整汽油	90	0.2	1400	500

产品汽油数据

产品	辛烷值 %	含硫量 %	销售价格 (元/吨)
70 # 汽油	≥ 70	≤ 1.0	900
80 # 汽油	≥ 80	≤ 1.0	1200
85 # 汽油	≥ 85	≤ 0.6	1500

问题分析：

- **问题类型：** 最优调和方案

  什么原料调入什么产品，调入的数量是多少

- **目标：** 调和方案的利润最大

  利润＝销售收入－调和成本

  ＝ 产品价格*销售数量－原料成本*用量

- **变量：** 产品数量？原料数量？其他物理量？

  j 产品生产数量＝各原料调入 j 产品数量和

  i 原料使用数量＝i 原料调入各产品的数量和