2010-2023历年安徽省皖南八校高三第一次联考理科数学试卷（带解析）

第1卷

一.参考题库(共25题)

1.若$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-1,0)$，则$2\vec{a}-\vec{b}=$____.

2.函数$f(x)$的定义域为D,若对于任意$x_1,x_2\in D$,当$x_1<x_2$时都有$f(x_1)\le f(x_2)$,则称函数$f(x)$在D上为非减函数,设函数$f(x)$在[0,1]上为非减函数,且满足以下三个条件:①$f(0)=0$;②$f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$;③$f(1-x)=1-f(x)$,则$f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{8})$等于(　)

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. $\frac{4}{3}$

3.（本题满分14分）

已知函数$f(x)=x\ln x+mx(m\in R)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为2.

（Ⅰ）求实数m的值;

（Ⅱ）设$g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x-1}$,讨论$g(x)$的单调性;

（Ⅲ）已知$m,n\in N^{*}$且$m>n>1$,证明:$\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$

4.已知函数$f(x)=ax^2+ax$和$g(x)=x-a$．其中$a\in R$且$a\neq 0$.

（1）若函数$f(x)$与$g(x)$的图像的一个公共点恰好在x轴上，求a的值；

（2）若p和q是方程$f(x)-g(x)=0$的两根，且满足$0<p<q<\dfrac{1}{a}$，证明：当$x\in(0,p)$时，$g(x)<f(x)<p-a$.

5.在ΔABC中，a,b,c分别是A,B,C的对边，已知$b^2=c(b+2c)$，若$a=\sqrt{6},\cos A=\dfrac{7}{8}$，则$\Delta ABC$的面积等于____ .

6.已知函数$f(x)=\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>o)$在$(0,\dfrac{4\pi}{3})$单调增加, 在$(\dfrac{4\pi}{3},2\pi)$单调减少，则$\omega=$____

7.设$f(x)=e^x+x-4$，则函数$f(x)$的零点位于区间(　　)

A. $(-1,0)$

B. $(0,1)$

C. $(1,2)$

D. $(2,3)$

8.已知函数$f(x)=x^2-a\ln x$和$g(x)=\dfrac{1}{a}x-\sqrt{x}$，且$f'(1)=g'(1)$.

（1）求函数$f(x)$，$g(x)$的表达式；

（2）当$a<1$时，不等式$f(x)\geq m\cdot g(x)$在$x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$上恒成立，求实数$m$的取值范围.

9.设$a,b\in R$，那么“$\frac{a}{b}>1$”是“$|a|>|b|$”的（ ）

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

10.已知$a\in(0,\frac{\pi}{2}),\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$等于(　)

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. $-1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

11.已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$，则$|\vec{b}|$的取值范围为(　)

A. $[1,2]$

B. $[2,4]$

C. $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

D. $[\frac{1}{2},1]$

12.（本题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)$ （ $\omega>0, 0<|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 为奇函数,且函数 $y=f(x)$ 的图象的两相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值;

（Ⅱ）将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,求函数 $g(x)$ 的单调递增区间.

13.命题“对任意 $x\in R, x^2-3x+1>0$”的否定是________

14.已知函数 $f(x)=x\sin\frac{x}{2}$，如果存在实数 x_1, x_2，使得对任意的实数 x 都有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值是______.

15.（本题满分 13 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+2x-\ln x$，其中 $a<0$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在其定义域内单调递减,求实数 a 的取值范围;

（Ⅱ）若 $a=-\frac{1}{2}$,且关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}x-b$恒谦在 $[1,4]$ 上恰有两个不相等的实数根,求实数 b 的取值范围.

16.在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a，b，c，若 $20a\overrightarrow{BC}+15b\overrightarrow{CA}+12c\overrightarrow{AB}=\vec{0}$，则△ABC 最小角的正弦值等于（ ）

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

17.由直线$y=\frac{1}{2}$，y=2，曲线$y=\frac{1}{x}$及 y 轴所围图形的面积为（ ）

A．21n2

B．21n 2-1

C. $\frac{1}{2}\ln 2$

D. $\frac{5}{4}$

18.设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-6x+6, x\geq 0\\ 3x+4, \quad x<0\end{cases}$，若互不相等的实数$x_1, x_2, x_3$，满足$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$则$x_1+x_2+x_3$的取值范围是_______

19.已知点$A(2,-\frac{1}{2}), B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量是（ ）

A. $(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5})$

B. $(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5})$

C. $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

D. $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

20.已知函数$f(x)=x^2-(2a+1)x+a\ln x$.

（1）当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程；

（2）当$a>0$，且$a\neq\frac{1}{2}$，求函数$f(x)$的单调区间.

21.已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & (0\leq x<1)\\ 2^x-\frac{1}{2} & (x\geq 1)\end{cases}$，设$a>b\geq 0$，若$f(a)=f(b)$，则$b\cdot f(a)$的取值范围是___.

22.已知复数$z=\frac{2-i}{1+i}$，则在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限
B．第二象限
C．第三象限
D．第四象限

23.已知向量$\vec{a}=(3,4),\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$，则$\left|\vec{b}\right|$的取值范围是_______

24.关于函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}(a,b\in R)$，下列命题正确的是——（写出所有正确命题的编号）

①不论 a，b 取什么值，函数 f（x）的图像都关于原点对称.

②若 a=b≠0，则函数 f（x）的极小值是 2a，极大值是-2a.

③当 ab≠0 时，函数 f（x）图像上任意一点的切线都不可能经过原点.

④当 a>0，b>0 时，对函数 f（x）图像上任意一点 A，图像上存在唯一的点 B，使得$\tan\angle AOB=\frac{1}{a}$.（点 O 是坐标原点）

⑤当 ab≠0 时，函数 f（x）图像上任意一点的切线与直线 y=ax 及 y 轴围成的三角形的面积是定值.

25.已知函数，f（x）是 R 上的奇函数，且在区间[0,+∞）上是增函数．令

$a=f(sin\frac{2\pi}{7})$，$b=f(\cos\frac{5\pi}{7}),c=f(\tan\frac{5\pi}{7})$，则（ ）

A. b<a<e
B. c<b<a
C. b<c<a
D. a<b<c

第 1 卷参考答案

一. 参考题库

1.参考答案：(3，4)试题分析：$2\vec{a}-\vec{b}=(2,4)-(-1,0)=(3,4)$.

考点：向量的坐标运算.

2.参考答案：B 试题分析：由$f(1-x)=1-f(x)$，令$x=1$可得$f(1)=1$，

∴$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$,∴$f(\frac{1}{9})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{3})=\frac{1}{4}$.

令$x=\frac{1}{2}$代入$f(1-x)=1-f(x)$可得$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，

∴$f(\frac{1}{6})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

由$f(x)$在$[0,1]$上是非减函数，且$f(\frac{1}{9})=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{4}$，

∴当$\frac{1}{9}\le x\le\frac{1}{6}$时，$f(x)=\frac{1}{4}$.

∴$f(\frac{1}{8})=\frac{1}{4}$，∴$f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{8})=\frac{3}{4}$.

考点：1.信息题；2.函数值.

3.参考答案：（Ⅰ）$m=1$；（Ⅱ）$g(x)$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$都是单调递增的；（Ⅲ）详见解析.试题分析：（Ⅰ）因为$f(x)=x\ln x+mx$图象在点$(1,f(1))$

处的切线的斜率为 2，所以$f'(1)=2$,即可求出 m 的值；（Ⅱ）因为

$g(x)=\frac{x\ln x}{x-1}(x>0,x\neq 1)$，所以$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.设$h(x)=x-1-\ln x,h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

当$x>1$时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，$h(x)$是增函数，$h(x)>h(1)=0$，所以

$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，故$g(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数；当$0<x<1$时，

$h'(x)=1-\frac{1}{x}<0$，$h(x)$是减函数，$h(x)>h(1)=0$，

所以$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，故$g(x)$在$(0,1)$上为增函数；所以$g(x)$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$都是单调递增的；（Ⅲ）利用分析证明法：由已知可知要证$\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$，即证$\frac{\ln n}{m}-\frac{\ln m}{n}>\ln n-\ln m$,即证$\frac{n-1}{n}\ln m>\frac{m-1}{m}\ln n$，即证$\frac{m\ln m}{m-1}>\frac{n\ln n}{n-1}$，即证

$g(m)>g(n)$，又$m>n>1(m,n\in N^*)$，由（2）知$g(m)>g(n)$成立，所以$\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$

.

试题解析：解：（Ⅰ）$f(x)=x\ln x+mx$,所以$f'(x)=1+\ln x+m$

由题意$f'(1)=1+\ln 1+m=2$,得$m=1$ 3 分

（Ⅱ）$g(x)=\frac{f(x)-x}{x-1}=\frac{x\ln x}{x-1}(x>0,x\neq 1)$，所以$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

设$h(x)=x-1-\ln x,h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

当$x>1$时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，$h(x)$是增函数，$h(x)>h(1)=0$，

所以$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，故$g(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数； 6 分

当$0<x<1$时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}<0$，$h(x)$是减函数，$h(x)>h(1)=0$，

所以$g'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，故$g(x)$在$(0,1)$上为增函数；

所以$g(x)$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$都是单调递增的。 8 分

（Ⅲ）由已知可知要证$\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$，即证$\frac{\ln n}{m}-\frac{\ln m}{n}>\ln n-\ln m$， 10 分

即证$\frac{n-1}{n}\ln m>\frac{m-1}{m}\ln n$，即证$\frac{m\ln m}{m-1}>\frac{n\ln n}{n-1}$，即证$g(m)>g(n)$， 12 分

又$m>n>1(m,n\in N^*)$，由（2）知$g(m)>g(n)$成立，所以$\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$。 14 分.

考点：1.导数的几何意义；2.导数在函数单调性中的应用；3.函数单调性在不等式证明中的应用.

4.参考答案：（1）$a=-1$；（2）证明过程详见解析.试题分析：本题考查一次函数与二次函数图像的关系以及作差法比较大小证明不等式问题，考查学生分析问题解决问题的能力.第一问，先求$g(x)$与x轴的交点，由已知得此交点同时也在$f(x)$图像上，所以代入到$f(x)$解析式中，解出a的值;第二问，作差法比较$f(x)$与$g(x)$的大小，再用作差法比较$f(x)$与$p-a$的大小.

试题解析：(1)设函数$g(x)$图象与x轴的交点坐标为$(a,0)$，

又∵点$(a,0)$也在函数$f(x)$的图象上，∴$a^3+a^2=0$.

而$a\neq 0$，∴$a=-1$.(4 分)

(2)由题意可知$f(x)-g(x)=a(x-p)(x-q)$.

∵$0<x<p<q<\frac{1}{a}$，∴$a(x-p)(x-q)>0$，

∴当 $x\in(0,p)$ 时，$f(x)-g(x)>0$，即 $f(x)>g(x)$．(8 分)