北京市中国人民大学附属中学2024届高三下学期5月热身练习数学试题（三模）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $P=\left\{x\mid x^{2}\leq 1\right\}, M=\{a\}$，若 $P \cap M=M$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[-1,1]$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

2．若 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

3．已知 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-x\right)^{n}$ 的二项式系数之和为64，则其展开式的常数项为（　）

A．-240　　B．240　　C．60　　D．-60

4．已知 $x, y\in \mathrm{R}$，且 $x>y$，则（　）

A．$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$　　B．$\tan x-\tan y>0$

C．$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y}<0$　　D．$\ln|x|-\ln|y|>0$

5．若双曲线 $C_1:\frac{x^{2}}{4}-\frac{y^{2}}{2}=1$ 与 $C_2:\frac{y^{2}}{a^{2}}-\frac{x^{2}}{b^{2}}=1$ 具有相同的渐近线，则 C_2 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$，则不等式 $xf(x-1)\leq 1$ 的解集为(　).

A．$[-1,+\infty)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$[1,2]$　　D．$[-1,1]$

7．已知 $A(-1,0), B(1,0)$，若点 P 满足 $PA\perp PB$，则点 P 到直线 $l: m(x-\sqrt{3})+n(y-1)=0$ 的距离的最大值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .则“a, b, c 成等比数列”是 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

9．故宫角楼的屋顶是我国十字脊顶的典型代表，如图 1，它是由两个完全相同的直三棱柱垂直交叉构成，将其抽象成几何体如图 2 所示.已知三棱柱 $ABF-CDE$ 和 $BDG-ACH$ 是两个完全相同的直三棱柱，侧棱 EF 与 GH 互相垂直平分，EF,GH 交于点 I，$AF=BF=a$，$AF\perp BF$，则点 G 到平面 $ACEF$ 的距离是（　）


图1

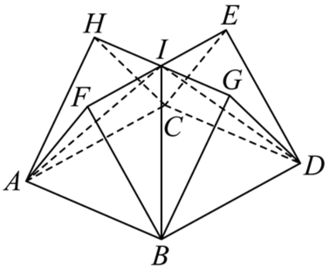
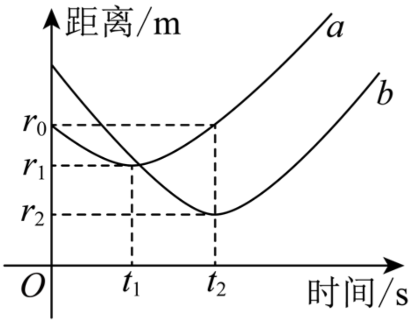


图2

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}a$　　B．$\frac{1}{2}a$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}a$

10．2024 年 1 月 17 日我国自行研制的天舟七号货运飞船在发射 3 小时后成功对接于空间站天和核心舱后向端口，创造了自动交会对接的记录.某学校的航天科技活动小组为了探索运动物体追踪技术，设计了如下实验：目标 P 在地面轨道上做匀速直线运动；在地面上相距 7m 的 A，B 两点各放置一个传感器，分别实时记录 A，B 两点与物体 P 的距离.科技小组的同学根据传感器的数据，绘制了“距离-时间”函数图像，分别如曲线 a，b 所示.t_1 和 t_2 分别是两个函数的极小值点.曲线 a 经过 $(0,r_0),(t_1,r_1)$ 和 (t_2,r_0)，曲线 b 经过 (t_2,r_2).已知 $r_1t_1=r_2t_2,r_1=4\text{m},t_2=4\text{s}$，并且从 $t=0$ 时刻到 $t=t_2$ 时刻 P 的运动轨迹与线段 AB 相交.分析曲线数据可知，P 的运动轨迹与直线 AB 所成夹角的正弦值以及 P 的速度大小分别为（　）



A．$\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{4}\text{m/s}$　　B．$\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{2}\text{m/s}$

C．$\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{4}\text{m/s}$　　D．$\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{2}\text{m/s}$

二、填空题

11．若$\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}$是纯虚数，则实数 a 的值为________.

12．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 A，点 B 在 C 上.若$|FB|=2$，则直线 AB 的方程为________.

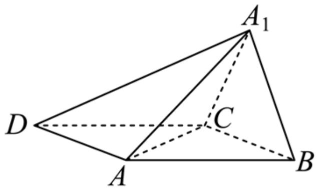
13．使$\lg a+\lg b=\lg(a+b)$成立的一组 a，b 的值为$a=$________，$b=$________.

14．已知函数$f(x)=\sin(\omega\pi x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi\le\pi)$，若$f(x)$是偶函数，则$\varphi=$________；若圆面$x^2+y^2\le 2$恰好覆盖$f(x)$图象的最高点或最低点共 3 个，则$\omega$的取值范围是________.

15．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n, a_1=1$且$a_{n+1}=S_n^2+1,\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，给出下列四个结论：①长度分别为$1,a_{n+1},S_n$的三条线段可以构成一个直角三角形；②$\forall n\in\mathrm{N}^*,S_n\ge 2^{n-1}$；③$\forall n\in\mathrm{N}^*,a_n+a_{n+2}<2a_{n+1}$；④$\forall n\in\mathrm{N}^*,a_{n+1}=2a_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题

16．如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3},AB=2$，把$\triangle ABC$沿着 BC 折起，使 A 到 A_1 位置.



(1)证明：$BC\perp AA_1$；

(2)若$AA_1=\sqrt{6}$，求直线DA_1与平面ABA_1所成角的正弦值；

(3)在（2）的条件下，求点 D 到平面ABA_1的距离.

17．已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x,(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$.

(1)求ω的值；

(2)在锐角$\triangle ABC$中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.c 为$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求$a-b$的取值范围.条件①：$a\cos B+b\cos A=2c\cos C$；条件②：$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=\sqrt{3}a$；条件③：$\triangle ABC$

的面积为S，且$S=\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4}$.注：如果选择多个条件分别解答，按第一个条件计分.

18．某口罩加工厂加工口罩由A，B，C三道工序组成，每道工序之间相互独立，且每道工序加工质量分为高和低两种层次级别，A，B，C三道工序加工的质量层次决定口罩的过滤等级；A，B，C工序加工质量层次均为高时，口罩过滤等级为100等级（表示最低过滤效率为99.97%）；C工序的加工质量层次为高，A，B工序至少有一个质量层次为低时，口罩过滤等级为99等级（表示最低过滤效率为99%）；其余均为95级（表示最低过滤效率为95%）.现从A，B，C三道工序的流水线上分别随机抽取100个口罩进行检测，其中A工序加工质量层次为高的个数为50个，B工序加工质量层次高的个数为75个，C工序加工质量层次为高的个数为80个.

表①：表示加工一个口罩的利润.

口罩等级	100等级	99等级	95等级
利润/元	2	1	0.5

(1)用样本估计总体，估计该厂生产的口罩过滤等级为100等级的概率；

(2)X表示一个口罩的利润，求X的分布列和数学期望；

(3)用频率估计概率，由于工厂中A工序加工质量层次为高的概率较低，工厂计划通过增加检测环节对A工序进行升级.在升级过程中，每个口罩检测成本增加了0.2元时，相应的A工序加工层次为高的概率在原来的基础上增加了b.试问：若工厂升级方案后对一个口罩利润的期望有所提高，写出一个满足条件的b的值.

19．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，以线段$F_1F_2$为直径的圆过$C$的上下顶点，点$\left(1,e\right)$在$C$上，其中$e$为$C$的离心率.

(1)求椭圆C的方程和短轴长；

(2)点A,B在C上，且在x轴的上方，满足$AF_1//BF_2,\left|AF_1\right|=2\left|BF_2\right|$，直线$AF_2$与直线$BF_1$的交点为$P$，求$\triangle PF_1F_2$的面积.

20．已知函数$f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x-x,(a\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线为 x 轴，求 a 的值；

(2)在（1）的条件下，判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(3) $g(x)=\left(x^2-ax+1\right)\mathrm{e}^x-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x+1\right)$，若 -1 是 $g(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

21．给定正整数 $n\geq 2$，设数列 $a_1,a_2,...,a_n$ 是 $1,2,...,n$ 的一个排列，对 $i\in\{1,2,...,n\}$，x_i 表示以 a_i 为首项的递增子列的最大长度，y_i 表示以 a_i 为首项的递减子列的最大长度.

(1)若 $n=4$，$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=2$，$a_4=3$，求 x_1 和 y_2；

(2)求证：$\forall i\in\{1,2,...,n-1\}$，$\left(x_i-y_i\right)^2+\left(x_{i+1}-y_{i+1}\right)^2\neq 0$；

(3)求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|$ 的最小值.

参考答案：

1．B

【分析】化简集合P，由$P\cap M=M$得出$M\subseteq P$，由子集的定义得出实数a的取值范围.

【详解】$\because$集合$P=\left\{x\middle|\ x^2-1\le 0\right\}=\{x|-1\le x\le 1\}=[-1,1]$, $M=\{a\}, P\cap M=M$

$\therefore M\subseteq P, \therefore a\in[-1,1]$

故选：B

【点睛】本题主要考查了根据交集的结果求参数的取值范围，属于基础题.

2．B

【分析】根据$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，得$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，结合数量积的运算律求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据向量的夹角公式即可得解.

【详解】因为$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，所以$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，

即$\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2=1$，

所以$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$，

又$0^\circ\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le 180^\circ$，

所以向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°.

故选：B.

3．B

【分析】根据二项式系数之和可得$n=6$，结合二项展开式分析求解.

【详解】由题意可知：二项式系数之和为$2^n=64$，可得$n=6$，

其展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6-r}(-x)^r=(-1)^r\cdot 2^{6-r}\cdot\mathrm{C}_6^r\cdot x^{\frac{3}{2}r-3}, r=0,1,2,\cdots,6$，

令$\dfrac{3}{2}r-3=0$，解得$r=2$，

所以其展开式的常数项为$(-1)^2\cdot 2^4\cdot\mathrm{C}_6^2=240$.

故选：B.

4．C

【分析】根据题意，利用不等式的基本性质，正切函数的性质，以及指数函数与对数函数的性质，逐项判定，即可求解.

【详解】对于 A 中，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$，其中 $y-x<0$，但 xy 的符号不确定，所以 A 不正确；

对于 B 中，例如 $x=\pi, y=\frac{\pi}{4}$，此时 $\tan x-\tan y=0-1=-1<0$，所以 B 不正确；

对于 C 中，由函数 $f(x)=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}$ 在 R 上为单调递减函数，

因为 $x>y$，所以 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}<\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y}$，可得 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y}<0$，所以 C 正确；

对于 D 中，例如 $x=2, y=-3$，此时 $\ln|x|-\ln|y|=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}<0$，所以 D 不正确.

故选：C.

5．C

【分析】先求出两个双曲线的离心率，根据渐近线相等列式，代入离心率求解即可.

【详解】双曲线 $C_1:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$C_2:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，

由题可知 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{b}$，

所以 C_2 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

故选：C.

6．D

【分析】由题可得 $f(x-1)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$，然后分类讨论解不等式即得.

【详解】$\because f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$，

$\therefore f(x-1)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$，

当 $x\geq 1$ 时，$xf(x-1)\leq 1\Leftrightarrow x\leq 1$，

$\therefore x=1$，

当 $x<1$ 时，$xf(x-1)\leq 1\Leftrightarrow -x\leq 1\Leftrightarrow x\geq -1$，

$\therefore -1\leq x<1$，

综上所述，$xf(x-1)\leq 1$ 的解集为 $[-1,1]$.

故选:D.

7．C

【分析】先确定P的轨迹以及直线l过的定点，再根据圆的性质特点求最值.

【详解】由$PA \perp PB$可得点P的轨迹为以线段AB为直线的圆，圆心为$\left(0,0\right)$，半径为1，

又直线$l: m(x-\sqrt{3})+n(y-1)=0$，其过定点$\left(\sqrt{3},1\right)$，

故距离的最大值为$\sqrt{3+1}+1=3$.

故答案为：C

8．A

【分析】先将$b^2=ac$代入余弦定理，利用基本不等式得到$\cos B \geq \frac{1}{2}$，从而得到$\sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$，接着根据$\sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$得到$B$可能为钝角，不满足$a,b,c$成等比数列，从而得答案.

【详解】当a,b,c成等比数列时，$b^2=ac$，

所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \geq \frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当$a=c$时等号成立，

又$B \in \left(0,\pi\right)$，所以$B \leq \frac{\pi}{3}$，所以$\sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$，充分性满足；

当$\sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$时，$B \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，

而当$B \in \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$时，$b$为最长的边，不满足$a,b,c$成等比数列，必要性不满足.

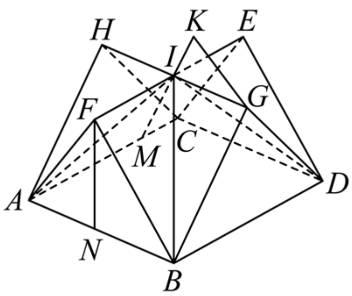
则“a,b,c成等比数列”是$\sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$的充分不必要条件.

故选：A.

9．B

【分析】根据已知条件，结合空间总直线与平面的位置关系，先确定点G到平面$ACEF$的垂线段，在根据已知条件得$\sin\theta=\frac{KG}{IG}=\frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$，解方程求出$h$即可.

【详解】取AC中点M，连接MI，过G作MI的垂线交MI的延长线于点K，



取AB中点N，连接FN，

由已知，M、I 分别为 AC、EF 中点，

因为 $ABF-CDE$ 是直三棱柱，所以 $AF \perp AC$，$EF//AC$ 且 $EF=AC$，

所以 $FI//AM$ 其 $FI=AM$，所以四边形 $AMIF$ 为平行四边形，

又 $AF \perp AC$，所以 $AMIF$ 为矩形，所以 $EF \perp MK$，

又 $EF \perp GH$，$MK \subset$ 平面 KIG，GH Ì 平面 KIG，$MK \cap GH = I$，

所以 $EF \perp$ 平面 KIG，$KG \subset$ 平面 KIG，所以 $EF \perp KG$，

又因为 $KG \perp MK$，$EF \subset$ 平面 $ACEF$，$MK \subset$ 平面 $ACEF$，$EF \cap MK = I$，

所以 $KG \perp$ 平面 $ACEF$，所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离等于线段 KG 的长度，设为 h；

$AF \perp BF$，在 $\mathrm{Rt}\vee ABF$ 中，$AF=BF=a$，

所以 $AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，设角 $\angle FAB=\theta$，则有 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为四边形 $AMIF$ 为平行四边形，所以 $MI//AF$，

又因为因为 $BDG-ACH$ 是直三棱柱，所以 $AB//HG$，且 $HG=AB=a$，

所以 $\angle KIG=\angle FAB=\theta$，$IG=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，

又因为 $KG \perp$ 平面 $ACEF$，$IK \subset$ 平面 $ACEF$，所以 $KG \perp IK$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{KG}{IG}=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$，即 $\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\dfrac{a}{2}$，

所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离是 $\dfrac{a}{2}$，

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于根据空间中点、线、面的位置关系，确定点 G 到平面 $ACEF$ 的垂线段.

10．B

【分析】建系，设点，作相应的辅助线，分析可知 $|AC|=6\mathrm{m},|BC|=2v\mathrm{m}$，结合 $|AB|=7\mathrm{m}$ 分析求解即可.

【详解】如图，建立平面直角坐标系，