第 16 章 二次根式（单元测试·拔尖卷）一、单选题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．与$\sqrt{3}(\sqrt{18}-\sqrt{3})$最接近的整数是（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2．若$\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$有意义，则字母 x 的取值范围是(　)

A．x≥1　　B．x≠2　　C．x≥1 且 x＝2　　D．.x≥-1 且 x≠2

3．化简$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$的结果是（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$-\sqrt{2}$　　C．2　　D．–2

4．化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+2}{a^2}}$的结果是（　）

A．$\sqrt{-a-2}$　　B．$-\sqrt{-a-2}$　　C．$\sqrt{a-2}$　　D．$-\sqrt{a-2}$

5．化简$\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}$的结果为（　　）

A．$\frac{\sqrt{11}}{30}$　　B．$30\sqrt{330}$　　C．$\frac{\sqrt{330}}{30}$　　D．$30\sqrt{11}$

6．若$a=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+\left|1-\sqrt{2}\right|$，$b=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}$，则 a 与 b 的大小关系是（　）

A．$a>b$　　B．$a<b$　　C．$a=b$　　D．不能确定

7．若二次根式$\sqrt{2-m}$有意义，且关于 x 的分式方程$\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$有正数解，则符合条件的整数 m 的和是（　　）

A．﹣7　　B．﹣6　　C．﹣5　　D．﹣4

8．已知$x=\sqrt{2}-\sqrt{3}, y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则代数式$\sqrt{x^2+2xy+y^2+x-y-4}$的值为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9．如果关于 x 的不等式组$\begin{cases}\frac{x-m}{2}>0,\\ \frac{x-2}{3}-x<-2\end{cases}$的解集为$x>2$，且式子$\sqrt{3-|m|}$的值是整数，则符合条件的所有整数 m 的个数是（　）.

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

10. 设 a 为$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$的小数部分，b 为$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$的小数部分，则$\frac{2}{\mathrm{b}}-\frac{1}{a}$的值为（　）

A．$\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$　　B．$\sqrt{6}-\sqrt{2}+1$　　C．$\sqrt{6}-\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

11．设 $x=\sqrt{3}-2$，则 $x^6+3x^5+11x^3+2x+1=$____.

12．a，b 为有理数，且 $a+\sqrt{3}b=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$，则 $a+b=$_____.

13．若 $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+m\right)$ 的积是有理数，则无理数 m 的值为_____.

14．在实数范围内分解因式：$2x^2-6xy-y^2=$_____.

15．已知 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}-\sqrt{3}$，则 $\left(x+y\right)^{2022}\left(x-y\right)^{2023}$ 的值为 ____.

16．已知 y＝$\sqrt{x-8}$ ＋$\sqrt{8-x}$ ＋18，求代数式 $\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ - $\frac{2xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ 的值为____.

17．可以用配方法化简二重根式，

例如：$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$，

请化简式子：$\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}-4}{4-2\sqrt{2}}=$_____.

18．观察下列等式：

第 1 个等式：$a_1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

第 2 个等式：$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

第 3 个等式：$a_3=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

第 4 个等式：$a_4=\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

…

按上述规律，计算 $a_1+a_2+a_3\cdots+a_n=$_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 58 分）

19．计算：

(1) $\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

(2) $\left(2\sqrt{5}-1\right)\left(1+2\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}\right)$

20．计算

(1) $(a^2\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{m}\sqrt{mn}+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}})\div a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$；

(2) $(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}})\div(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}})$（$a\neq b$）.

21．（1）已知其中$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，化简求值$\left(1-\dfrac{1}{a-1}\right)\div\dfrac{a^2-4a+4}{a^2-a}$；

（2）已知$\left(\sqrt{m^2+1}+m\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)=1$，探究 m 与 n 的关系．

22．如图 1，从一个大正方形纸板中截去面积分别为 8，32 的两个小正方形．

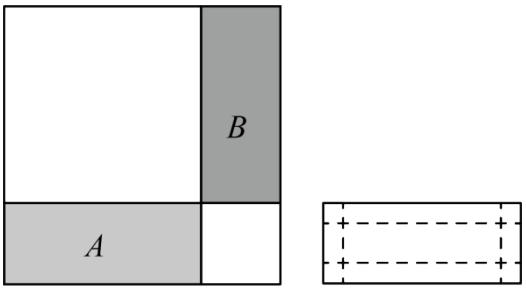


图1

图2

(1)求留下的部分（阴影部分）的面积；

(2)如图 2，用余下部分的长方形纸板 A，在它的四个角各切去一个同样的正方形，然后将四周突起的部分折起，制成一个无盖的长方体盒子，如果这个盒子的底面是长方形，高为 a，求盒子的底面积；

(3)用余下部分的长方形纸板 B，在它的四个角各切去一个同样的正方形，然后将四周突起的部分折起，制成一个无盖的长方体盒子，如果这个盒子的底面是长方形，而且长与宽的比是3:1，求这个盒子的容积．

23．先观察等式，再解答问题：

①$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}=1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{1+1}=1\dfrac{1}{2}$；②$\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+1}=1\dfrac{1}{6}$；

③$\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}=1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3+1}=1\dfrac{1}{12}$．

(1)请你根据以上三个等式提供的信息，猜想$\sqrt{1+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}}$的结果，并验证；

(2)请你按照以上各等式反映的规律，试写出用含 n 的式子表示的等式（n 为正整数）．

(3)应用上述结论，请计算$\sqrt{4+\dfrac{4}{20^2}+\dfrac{4}{21^2}}$的值．

24．如图 1，在Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，D，E 两点分别在 AB，AC 上，且 $DE\parallel BC$，将△ADE 绕点 A 顺时针旋转，记旋转角为α．

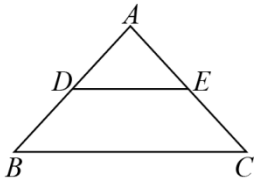


图1

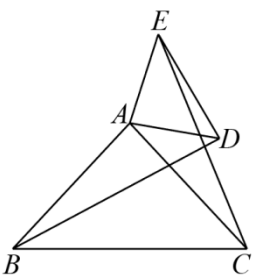
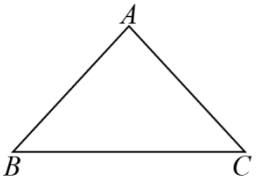


图2



备用图

(1)问题发现 当$\alpha=0°$时，线段 BD，CE 的数量关系是_；

(2)拓展探究 当$0° \le \alpha < 360°$时，（1）中的结论有无变化？请仅就图 2 的情形给出证明；

(3)问题解决 设$\boldsymbol{DE=2}$，$\boldsymbol{BC=6}$，$\boldsymbol{0° \le \alpha < 360°}$，$\triangle ADE$旋转至 A，B，E 三点共线时，直接写出线段 BE 的长.

1．B

【分析】把原式去括号后根据算术平方根的性质求解 ．

【详解】解：原式=$\sqrt{54}-3$，

∵49<54<64，

$\therefore 7<\sqrt{54}<8$，

$\because 7.5^2=56.25$，

$\therefore 7<\sqrt{54}<7.5$，

$\therefore \sqrt{54}$ 最接近 7，

$\therefore \sqrt{54}-3$ 最接近 7-3 即 4，

故选：B．

【点睛】本题考查二次根式的应用，熟练掌握二次根式的混合运算法则和算术平方根的性质是解题关键．

2．D

【分析】直接利用二次根式的有意义的条件分析得出答案．

【详解】$\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 有意义，则 x+1≥0 且 x-2≠0，

解得：x≥-1 且 x≠2．

故选 D．

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，正确把握相关性质是解题关键．

3．D

【分析】先将根号内整理为$(1-\sqrt{2})^2$和$(1+\sqrt{2})^2$，再化简，并计算即可．

【详解】原式=$\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}$-$\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}$=$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1-\left(1+\sqrt{2}\right)=-2$．

故选：D．

【点睛】本题主要考查了二次根式的化简，理解$3\pm2\sqrt{2}=(1\pm\sqrt{2})^2$是解题的关键．

4．B

【分析】首先根据二次根式有意义的条件求得 a、b 的取值范围，然后再利用二次根式的性质进行化简即可

【详解】 $\because a\sqrt{-\frac{a+2}{a^2}}$

$\therefore a+2<0$

$\therefore a<-2$

$\therefore a\sqrt{-\frac{a+2}{a^2}}=a\frac{\sqrt{-a-2}}{\sqrt{a^2}}=a\bullet\frac{\sqrt{-a-2}}{-a}=-\sqrt{-a-2}$

故选 B

【点睛】本题考查了二次根式的性质及化简，解题的关键是根据二次根式有意义的条件判断字母的取值范围．本题需要重点注意字母和式子的符号．

5．C

【详解】先把根号里因式通分，然后分母有理化，可得$\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{11}{30}}=\frac{\sqrt{330}}{30}$，

故选 C.

点睛: 此题主要考查了二次根式的化简，解题关键是利用分数的通分求和，然后把其分母有理化即可求解，比较简单，但是易出错，是常考题.

6．B

【分析】先利用二次根式的混合运算化简 a 和 b，再根据二次根式的估算比较即可．

【详解】解：$\because 2<16$，

$\therefore\sqrt{2}<4$，

$\therefore 1+\sqrt{2}<5$，

$\because a=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+\left|1-\sqrt{2}\right|$

$=3-1+\sqrt{2}-1$

$=1+\sqrt{2}$，

$b=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}$

$=2+3+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

$=5$，

$\therefore a<b$，

故选：B.

【点睛】本题主要考查了二次根式的估算以及二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的混合运算法则是解题的关键．

7．D

【分析】根据二次根式$\sqrt{2-m}$有意义，可得$m\le 2$，解出关于x的分式方程 $\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$的解为$x=\frac{m+5}{2}$，解为正数解，进而确定 m 的取值范围，注意增根时 m 的值除外，再根据 m 为整数，确定 m 的所有可能的整数值，求和即可.

【详解】解：去分母得，$-m+2(x-1)=3$，

解得，$x=\frac{m+5}{2}$，

∵关于 x 的分式方程$\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$有正数解，

$\therefore \frac{m+5}{2}>0$ ，

$\therefore m>-5$，

又∵$x=1$是增根，当$x=1$时，

$\frac{m+5}{2}=1$，即$m=-3$，

$\therefore m\ne -3$，

∵$\sqrt{2-m}$有意义，

$\therefore 2-m\ge 0$，

$\therefore m\le 2$，

因此$-5<m\le 2$ 且$m\ne -3$，

∵m 为整数，

∴m 可以为-4，-2，-1，0，1，2，其和为-4，

故选：D.

【点睛】考查二次根式的意义、分式方程的解法，以及分式方程产生增根的条件等知识，解题的关键是理解正数解，整数 m 的意义.

8．C

【分析】根据已知，得到$x+y=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{2},x-y=\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$，整体思想带入求值即可.

【详解】解：∵$x=\sqrt{2}-\sqrt{3},y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，

$\therefore x+y=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{2},x-y=\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{x^2+2xy+y^2+x-y-4}=\sqrt{(x+y)^2+(x-y)-4}$

$=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{3}-4}$

$=\sqrt{8-2\sqrt{3}-4}$

$=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$

$=\sqrt{3}-1$.

故选 C.

【点睛】本题考查二次根式的化简求值．熟练掌握二次根式的运算法则，利用整体思想进行求解，是解题的关键．

9．C

【分析】先求出两个不等式的解集，根据不等式组的解集为$x>2$可得出 m≤2，再由式子$\sqrt{3-|m|}$的值是整数，得出|m|=3 或 2，于是 m=-3，3，-2 或 2，由 m≤2，得 m=-3，-2 或 2．

【详解】解：解不等式$\frac{x-m}{2}>0$得 x＞m，

解不等式$\frac{x-2}{3}-x<-2$得 x＞2，

∵不等式组解集为 x＞2，

∴m≤2，

∵式子$\sqrt{3-|m|}$的值是整数，

则|m|=3 或 2，∴m=-3，3，2 或-2，

由 m≤2 得，m=-3，-2 或 2．

即符合条件的所有整数 m 的个数是 3 个．

故选：C．

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组以及二次根式的性质，熟练运用一元一次不等式组的解法是解题的关键．

10．B

【分析】首先分别化简所给的两个二次根式，分别求出 a、b 对应的小数部分，然后化简、

运算、求值，即可解决问题.

【详解】$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}$

∴a 的小数部分为$\sqrt{2}-1$，

$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\frac{12+6\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}}-\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}$

∴b 的小数部分为$\sqrt{6}-2$，

$\therefore \frac{2}{b}-\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{6}+2-\sqrt{2}-1=\sqrt{6}-\sqrt{2}+1$，

故选：B.

【点睛】该题主要考查了二次根式的化简与求值问题；解题的关键是灵活运用二次根式的运算法则来分析、判断、解答.

11．$14\sqrt{3}-24$

【分析】利用$(x+2)^2=x^2+4x+4$和$x=\sqrt{3}-2$，推得$x^2+4x+1=0$，借助该式将多项式进行降幂化简，即可求解.

【详解】解：∵$x=\sqrt{3}-2$，

∴$(x+2)^2=(\sqrt{3}-2+2)^2=3$，

又∵$(x+2)^2=x^2+4x+4$，

即$x^2+4x+4=3$，

整理得$x^2+4x+1=0$，

$x^6+3x^5+11x^3+2x+1$

$=x^4\left(x^2+4x+1\right)+3x^5+11x^3+2x+1-4x^5-x^4$

$=-x^5-x^4+11x^3+2x+1$

$=-x^3\left(x^2+4x+1\right)-x^4+11x^3+2x+1+4x^4+x^3$

$=3x^4+12x^3+2x+1$

$=3x^2\left(x^2+4x+1\right)+2x+1-3x^2$

$=-3x^2+2x+1$

$=-3\left(x^2+4x+1\right)+2x+1+12x+3$

$=14x+4$，

将$x=\sqrt{3}-2$代入原式可得$14\times\left(\sqrt{3}-2\right)+4=14\sqrt{3}-24$.

故答案为：$14\sqrt{3}-24$.

【点睛】本题考查了二次根式的化简求值，完全平方公式，解题的关键是通过完全平方公式得到$x^2+4x+1=0$，借助该式将原多项式进行降幂化简.

12．2

【分析】先根据完全平方公式进行变形计算，即$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{3}$，且$a$，$b$为有理数，求出$a=1,b=1$，进而得到$a+b=2$.

【详解】解：$\because\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+3+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{3}$

$\therefore a+\sqrt{3}b=1+\sqrt{3}$

$\because a$，b为有理数

$\therefore a=1,b=1$

$\therefore a+b=2$

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查了完全平方公式与二次根式的化简，关键在于完全平方公式的变形.

13．$-\sqrt{3}$（答案不唯一）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/215343301231011113