第十章　圆锥曲线

§10.5 圆锥曲线的综合问题

真题分类43　圆锥曲线的综合问题

C1. 研究常见方程表示的曲线
C2. 求轨迹或轨迹方程
C3. 直线与圆锥曲线的位置关系及其判定
C4. 相交弦长的计算和面积问题
C5. 求值、求点、求方程

C6. 最值及范围问题
C7. 定值、定点、定向问题
C8. 存在性问题、探索性问题
C9. 几何关系的判断与证明
C10. 椭圆、双曲线、抛物线的综合考查

C1.研究常见方程表示的曲线

命题者说：能利用方程思想，用代数方法判断曲线类型，研究曲线的性质.

第1题　第2题　第3题

已知方程判断曲线的类型

1．(2021·**浙江，9，4分**)已知 a，$b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，函数 $f(x)=ax^2+b(x\in\mathbf{R})$.若 $f(s-t)$，$f(s)$，$f(s+t)$成等比数列，则平面上点$(s，t)$的轨迹是(　　)

A．直线和圆　　B．直线和椭圆

C．直线和双曲线　　D．直线和抛物线

答案：C　　由题意，得 $f(s-t)f(s+t)=[f(s)]^2$，

即 $[a(s-t)^2+b][a(s+t)^2+b]=(as^2+b)^2$，

对其进行整理变形，得 $(as^2+at^2-2ast+b)(as^2+at^2+2ast+b)=(as^2+b)^2$，

$(as^2+at^2+b)^2-(2ast)^2-(as^2+b)^2=0$，

$(2as^2+at^2+2b)at^2-4a^2s^2t^2=0$，

$-2a^2s^2t^2+a^2t^4+2abt^2=0$，

所以 $-2as^2+at^2+2b=0$ 或 $t=0$，

其中 $\dfrac{s^2}{\frac{b}{a}}-\dfrac{t^2}{\frac{2b}{a}}=1$ 为双曲线，$t=0$ 为直线．故选 C.

2．(2020·新高考全国Ⅰ 9，5分)(多选)已知曲线 C：$mx^2+ny^2=1$.(　　)

A．若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B．若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C．若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}\ x$

D．若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

答案：ACD　由曲线 C：$mx^2+ny^2=1$，当 $m>n>0$ 时，$\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，曲线 C：$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 正确；当 $m=n>0$ 时，曲线 C：$x^2+y^2=\frac{1}{n}$ 表示半径为$\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的圆，故 B 错误；当 $mn<0$ 时，曲线 C：$mx^2+ny^2=1$ 表示双曲线，令 $mx^2+ny^2=0$，则其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$，故 C 正确；当 $m=0$，$n>0$ 时，曲线 C：$ny^2=1$，即 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$ 表示两条与 x 轴平行的直线，故 D 正确．故选 ACD.

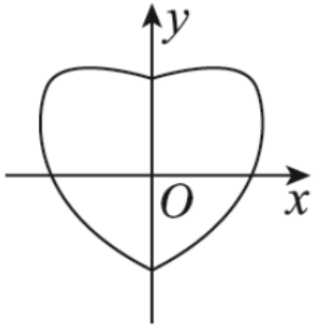
Ⅱ.已知方程研究曲线的性质

3.(2019·北京(理)，8，5 分)数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一(如图).给出下列三个结论：

①曲线 C 恰好经过 6 个整点(即横、纵坐标均为整数的点)；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过$\sqrt{2}$；

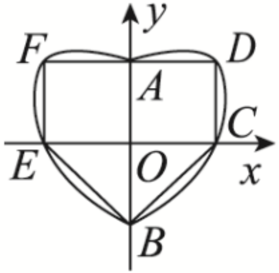
③曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.



其中，所有正确结论的序号是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①②③

答案：C　由 $x^2+y^2=1+|x|y$，当 $x=0$ 时，$y=\pm1$；当 $y=0$ 时，$x=\pm1$；当 $y=1$ 时，$x=0$，±1.故曲线 C 恰好经过6个整点：$A(0，1)$，$B(0，-1)$，$C(1，0)$，$D(1，1)$，$E(-1，0)$，$F(-1，1)$，所以①正确．由基本不等式，当 $y>0$ 时，$x^2+y^2=1+|x|y=1+|xy|\le1+\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $x^2+y^2\le2$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2}$，故②正确.



如图，由①知长方形 $CDFE$ 面积为2，三角形 BCE 面积为1，所以曲线 C 所围成的“心形”区域的面积大于3，故③错误．故选C.

C2. 求轨迹或轨迹方程

命题者说：掌握求轨迹方程的几种常见方法：定义法、直接法、相关点法、参数法、交轨法、点差法等.

第1题　第2题　第3题

Ⅰ直接法

1．(2016·**课标全国Ⅲ，20，12 分**)已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点．

(1)若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR∥FQ$；

(2)若△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程．

解： 由题知 $F(\frac{1}{2}，0)$.设 l_1：$y=a$，l_2：$y=b$，则 $ab\neq 0$，

且 $A(\frac{a^2}{2}，a)$，$B(\frac{b^2}{2}，b)$，$P(-\frac{1}{2}，a)$，$Q(-\frac{1}{2}，b)$，$R(-\frac{1}{2}，\frac{a+b}{2})$.

记过 A，B 两点的直线为 l，则 l 的方程为 $2x-(a+b)y+ab=0$.

(1)证明： 由于 F 在线段 AB 上，故 $1+ab=0$.

记 AR 的斜率为 k_1，FQ 的斜率为 k_2，则

$$k_1=\frac{a-b}{1+a^2}=\frac{a-b}{a^2-ab}=\frac{1}{a}=\frac{-ab}{a}=-b=k_2.$$

所以 $AR\parallel FQ$.

(2)解：设 l 与 x 轴的交点为 $D(x_1，0)$，

则 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|b-a|\cdot|FD|=\frac{1}{2}|b-a|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|$，$S_{\triangle PQF}=\frac{|a-b|}{2}$.

由题设可得 $2\times\frac{1}{2}|b-a|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2}$，所以 $x_1=0$(舍去)或 $x_1=1$.

设满足条件的 AB 的中点为 $E(x，y)$.

当 AB 与 x 轴不垂直时，由 $k_{AB}=k_{DE}$ 可得 $\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}$ $(x\neq1)$.

而 $\frac{a+b}{2}=y$，所以 $y^2=x-1(x\neq1)$.

当 AB 与 x 轴垂直时，E 与 D 重合.

所以所求轨迹方程为 $y^2=x-1$.

Ⅱ.代入法(相关点法)

2．(2017·课标全国Ⅱ，20，12 分)设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1)求点 P 的轨迹方程；

(2)设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

(1)解：设 $P(x，y)$，$M(x_0，y_0)$，

则 $N(x_0，0)$，$\overrightarrow{NP}=(x-x_0，y)$，$\overrightarrow{NM}=(0，y_0)$.

由 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{NM}$，得 $x_0=x$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}y$.

因为 $M(x_0，y_0)$在椭圆 C 上，

所以$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$.

因此点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=2$.

(2)证明：由题意，知 $F(-1，0)$.设 $Q(-3，t)$，$P(m，n)$，

则 $\overrightarrow{OQ}=(-3，t)$，$\overrightarrow{PF}=(-1-m，-n)$，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=3+3m-tn$，

$\overrightarrow{OP}=(m，n)$，$\overrightarrow{PQ}=(-3-m，t-n)$.

由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，得 $-3m-m^2+tn-n^2=1$，

又由(1)知 $m^2+n^2=2$，故 $3+3m-tn=0$.

所以 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，即 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{PF}$.

又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ，

所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

3．(2015·**湖北，21，14分**)一种作图工具如图1所示．O是滑槽AB的中点，短杆ON可绕O转动，长杆MN通过N处铰链与ON连接，MN上的栓子D可沿滑槽AB滑动，且$DN=ON=1$，$MN=3$.当栓子D在滑槽AB内作往复运动时，带动N绕O转动一周(D不动时，N也不动)，M处的笔尖画出的曲线记为C.以O为原点，AB所在的直线为x轴建立如图2所示的平面直角坐标系．

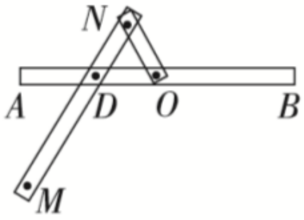


图1

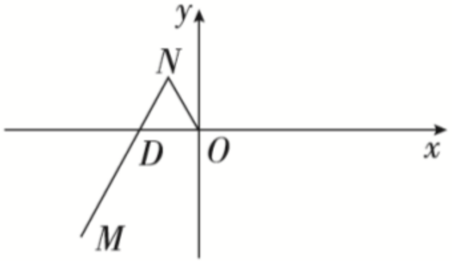


图2