第8章　导行电磁波

8.1 引言

8.2 规则导行系统的导波方程及其求解方法

8. 3 导行波的一般传输特性

BACK

8.1 引言

波导的主要功能有：①无辐射损耗地引导电磁波沿其轴向行进，将能量从一处传输至另一处，其称之为馈线；②设计构成各种微波电路的元件，如滤波器、阻抗变换器、定向耦合器等。

波导包括双导体系统、单导体系统和介质导行系统等，但在习惯上，往往对不同形式的波导赋予一些专有的名称，如图8－1所示。按结构不同把双导体系统分别称为平行双线传输线、同轴线、带状线及微带等；把空心金属管的单导体系统，按其截面形状分别称为矩形波导、圆形波导、脊形波导和椭圆波导等；而把介质导行系统又分别称为介质波导、镜像线和单根表面波传输线等。

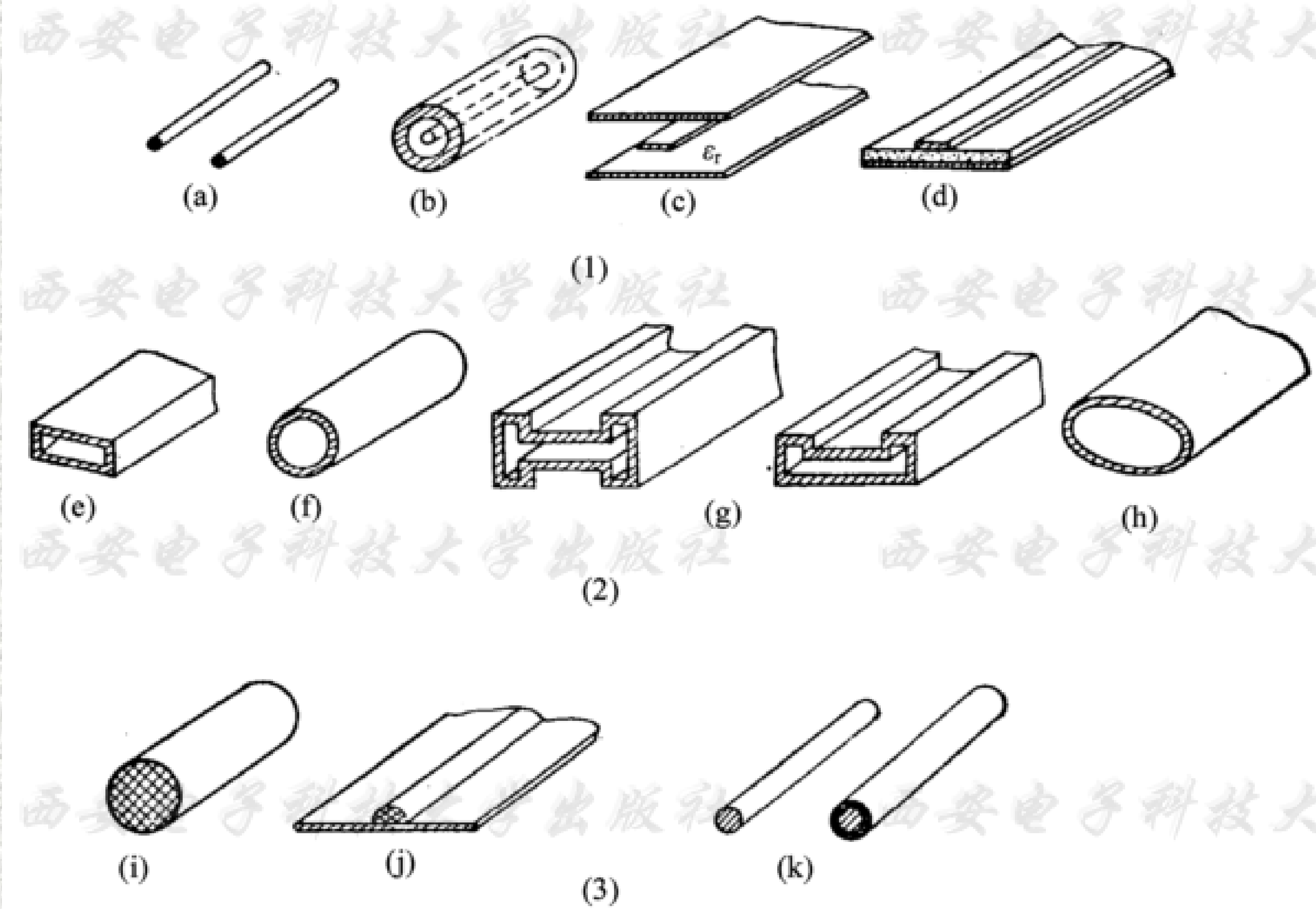

图8-1导行系统种类

(1)双导体系统；（2）单导体系统；（3）介质导行系统

（a）平行双线传输线；（b）同轴线；（c）带状线；（d）微带；

（e）矩形波导；（f）圆形波导；（g）脊形波导；（h）椭圆波导；

（i）介质波导；（j）镜像线；（k）单根表面波传输线

8.2规则导行系统的导波方程及其求解方法

8.2.1导波方程

图8-2所示的是任意截面形状的规则波导，为了求解简单起见，作如下假设：

（1）波导内壁的电导率为无限大。

（2）波导内的介质（ μ， ε ）是均匀无耗、线性、各向同性的。

（3）波导内无自由电荷和传导电流，即波导远离波源。

又设导行波的电场和磁场为时谐场，它们满足如下麦克斯韦方程：

$$\nabla \times H = \mathrm{j}\omega\varepsilon E \qquad \textbf{（8-1）}$$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H \qquad （8\text{-}2）$$

$$\nabla \cdot H = 0 \qquad （8\text{-}3）$$

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad （8\text{-}4）$$

式中， ε 和 μ 分别为介质的介电常数和磁导率， ω 为角频率。

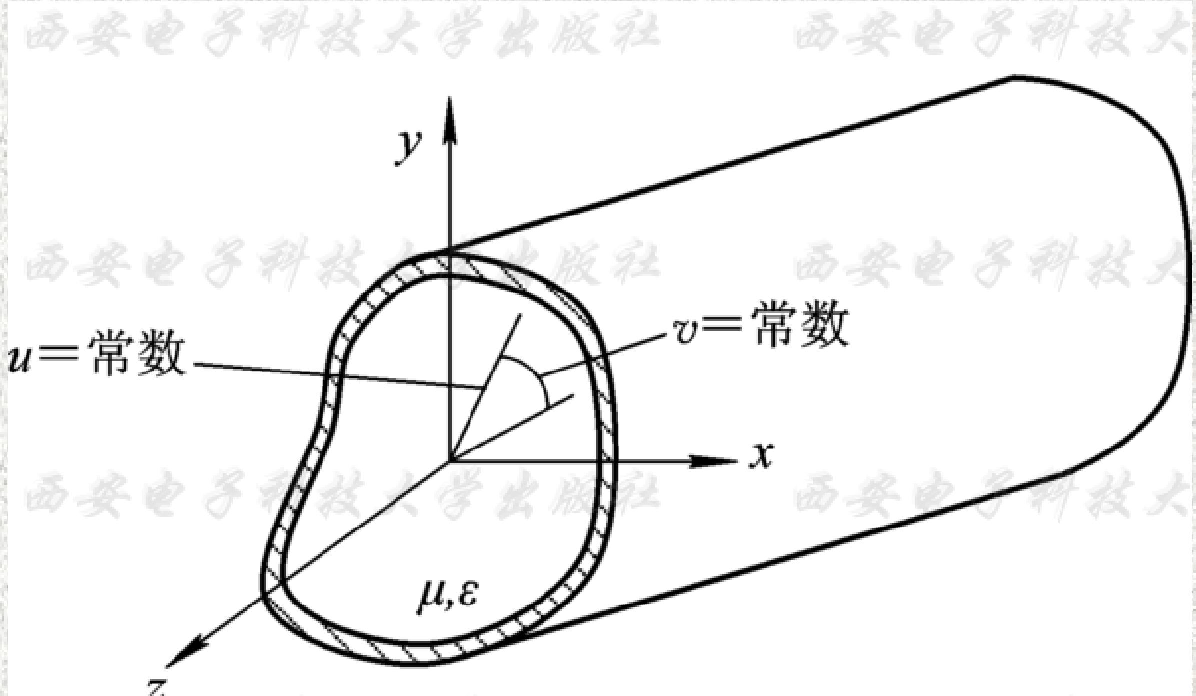

图8-2导行波沿规则波导传播

将式（8-2）两边取旋度，并将式（8-1）代入，得到

$$\nabla \times \nabla \times E = \omega^2 \mu\varepsilon E$$

应用矢量公式

$$\nabla \times \nabla \times F = \nabla\nabla \cdot F - \nabla^2 F$$

及式（8-4），得到

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \qquad （8-5）$$

同理可得

$$\nabla^2 H + k^2 H = 0 \qquad （8-6）$$

式中，$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$。式（8-5）和式（8-6）分别称为电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$的波动方程，也称为齐次亥姆霍兹方程。

8.2.2纵向场所满足的导波方程

为求解式（8-5）和式（8-6），需要将矢量方程化为标量一维常微分方程，然后用分离变量法求解。

对于图8-2所示的规则柱形波导，应采用广义柱坐标系（u,v,z）。设导波沿波导轴向（$+z$方向）传播，波动因子为$e^{-j\beta z}$（若考虑导体和介质损耗，则波动因子为$e^{-\gamma z}$，γ为传播常数，其值为$\alpha+j\beta$），β为相位因数。

根据假设，规则波导是无限长直波导，其截面形状与z无关，因此，横向坐标度量系数h_1和h_2与z无关，其坐标度量系数满足如下条件：

$$\begin{cases} h_3 = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(h_1 h_2) = 0 \end{cases} \qquad 或 \qquad \begin{cases} h_3 = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(h_1) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(h_2) = 0 \end{cases}$$

哈密顿算子▽、拉普拉斯算子▽²和电场***E***、磁场***H***可以表示成

$$\nabla \equiv \nabla_T + e_z \partial / \partial z \equiv \nabla_T - e_z \gamma \equiv \nabla_T - e_z j\beta \tag{8-7}$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla_T^2 + \partial^2 / \partial z^2 \equiv \nabla_T^2 + \gamma^2 \equiv \nabla_T^2 - \beta^2 \tag{8-8}$$

$$
\begin{aligned}
E &= e_u E_u(u,v,z) + e_v E_v(u,v,z) + e_z E_z(u,v,z) \\
&= E_T(u,v,z) + e_z E_z(u,v,z) \\
&= E_T(u,v) e^{-j\beta z} + e_z E_z(u,v) e^{-j\beta z}
\end{aligned}
\qquad （8\text{-}9）
$$

$$
\begin{aligned}
H &= e_u H_u(u,v,z) + e_v H_v(u,v,z) + e_z H_z(u,v,z) \\
&= H_T(u,v,z) + e_z H_z(u,v,z) \\
&= H_T(u,v) e^{-j\beta z} + e_z H_z(u,v) e^{-j\beta z}
\end{aligned}
\qquad （8\text{-}10）
$$

角标T表示横向分量。将式（8-7）、式（8-9）和式（8-10）代入式（8-1）和式（8-2），展开后令方程两边的横向分量和纵向分量分别相等，得到

$$
\nabla_T \times H_T = j\omega\varepsilon e_z E_z \qquad （8\text{-}11a）
$$

$$\nabla_T \times e_z H_z - j\beta e_z \times H_T = j\omega\varepsilon E_T \qquad （8\text{-}11b）$$

$$\nabla_T \times E_T = -j\omega\mu e_z H_z \qquad （8\text{-}12a）$$

$$\nabla_T \times e_z E_z - j\beta e_z \times E_T = -j\omega\mu H_T \qquad （8\text{-}12b）$$

对式（8-12a）进行$\nabla_T\times$运算，得到

$$\nabla_T \times \nabla_T \times E_T = -j\omega\mu \nabla_T \times e_z H_z \qquad （8\text{-}13）$$

应用矢量公式

$$A \times B \times C = B(A \cdot C) - (A \cdot B)C \qquad （8\text{-}14）$$

及方程（8-4），式（8-13）的左边得到

$$\nabla_T \times \nabla_T \times E_T = \nabla_T(\nabla_T \cdot E_T) - \nabla_T^2 \cdot E_T = j\beta\nabla_T E_z - \nabla_T^2 \cdot E_T$$

再次应用矢量公式（8-14）及式（8-11b）和式(8-12b)，式（8-13）的右边得到

$$-j\omega\mu\nabla_T \times e_z H_z = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon E_T + j\beta e_z \times H_T) = \mathrm{k}^2 E_T + \beta\omega\mu e_z \times H_T$$

$$= \mathrm{k}^2 E_T - \beta^2 E_T + j\beta\nabla_T E_z$$

则式（8-13）现在变成

$$(\nabla_T^2 - \beta^2) E_T + k^2 E_T = 0 \qquad \text{（8-15）}$$

即得到导波的横向电场所满足的波动方程：

$$\nabla^2 E_T + k^2 E_T = 0 \qquad \text{（8-16）}$$

同理，可得到导波的横向磁场所满足的波动方程：

$$\nabla^2 H_T + k^2 H_T = 0 \qquad (8\text{-}17)$$

式（8−16）和式（8−17）为矢量亥姆霍兹方程。

将方程（8-5）的左边展开，并应用式（8-16），得到

$$\begin{aligned}\nabla^2 E + k^2 E &= \nabla^2 (E_T + e_z E_z) + k^2 (E_T + e_z E_z) \\ &= (\nabla^2 E_T + k^2 E_T) + e_z (\nabla^2 E_z + k^2 E_z) \\ &= e_z (\nabla^2 E_z + k^2 E_z)\end{aligned}$$

即得到导波的纵向电场所满足的波动方程：

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \qquad (8\text{-}18)$$

同理，可得到导波的横向磁场所满足的波动方程：

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \qquad (8\text{-}19)$$

式（8–18）和式（8–19）是标量亥姆霍兹方程。

将式（8-8）代入式（8-18）和式（8-19），得到

$$\nabla_T^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} - \beta^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0$$

即

$$\nabla_T^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + k_c^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0 \qquad (8\text{-}20)$$

式中

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \qquad (8\text{-}21)$$

8.2.3边界条件

规则波导中的导波场应该满足理想导体边界条件，即要求在理想导体表面上电场的切向分量和磁场的法向分量应等于零。在具体求解时，根据导波的模式只需使用其中一个条件就够了，即要求

$$e_n \times E = 0 \qquad (8\text{-}22)$$

或者

$$e_n \cdot H = 0 \qquad (8\text{-}23)$$

式中e_n为波导壁内法向单位矢量。

8.2.4横向场与纵向场之间的关系

将式（8-1）和式（8-2）在广义柱坐标系展开后分别得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial v} - \dfrac{\partial (h_2 H_v)}{\partial z} = j\omega\varepsilon h_2 E_u \\ \dfrac{\partial (h_1 H_u)}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial u} = j\omega\varepsilon h_1 E_v \\ \dfrac{\partial (h_2 H_v)}{\partial u} - \dfrac{\partial (h_1 H_u)}{\partial v} = j\omega\varepsilon h_1 h_2 E_z \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial v} - \dfrac{\partial (h_2 E_v)}{\partial z} = -j\omega\mu h_2 H_u \\ \dfrac{\partial (h_1 E_u)}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial u} = -j\omega\mu h_1 H_v \\ \dfrac{\partial (h_2 E_v)}{\partial u} - \dfrac{\partial (h_1 E_u)}{\partial v} = -j\omega\mu h_1 h_2 H_z \end{cases}$$

经替换整理，并将$\dfrac{\partial}{\partial z}=-\mathrm{j}\beta$代入得到

$$
\begin{cases}
E_u=-\dfrac{j}{k_c^2}\left[\dfrac{\beta}{h_1}\dfrac{\partial E_z}{\partial u}+\dfrac{\omega\mu}{h_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial v}\right]\\
E_v=-\dfrac{j}{k_c^2}\left[\dfrac{\beta}{h_2}\dfrac{\partial E_z}{\partial v}-\dfrac{\omega\mu}{h_1}\dfrac{\partial H_z}{\partial u}\right]\\
H_u=-\dfrac{j}{k_c^2}\left[\dfrac{\beta}{h_1}\dfrac{\partial H_z}{\partial u}-\dfrac{\omega\varepsilon}{h_2}\dfrac{\partial E_z}{\partial v}\right]\\
H_v=-\dfrac{j}{k_c^2}\left[\dfrac{\beta}{h_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial v}+\dfrac{\omega\varepsilon}{h_1}\dfrac{\partial E_z}{\partial u}\right]
\end{cases}
\qquad (8\text{-}24a)
$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} E_u \\ H_v \\ H_u \\ E_v \end{bmatrix} = \frac{-j}{k_c^2} \begin{bmatrix} \frac{\omega\mu}{h_2} & \frac{\beta}{h_1} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{h_2} & \frac{\omega\varepsilon}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{h_1} & \frac{-\omega\varepsilon}{h_2} \\ 0 & 0 & \frac{-\omega\mu}{h_1} & \frac{\beta}{h_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial v} \\ \frac{\partial E_z}{\partial u} \\ \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ \frac{\partial E_z}{\partial v} \end{bmatrix} \qquad \text{（8-24b）}$$

式（8-24）即为用纵向场E_z和H_z表示横向场分量的表达式，只要知道了E_z或/和H_z，就可由此式求出导波的横向场分量。

8.2.5规则波导中导波的种类

导波是在规则波导中传输的电磁波，它具有不同的模式，称为导模（guidedmode），又称为传输模、正规模，是能够沿导行系统独立存在的场型，其特点是：①在导行系统横截面上的电磁场呈驻波分布，且是完全确定的，这一分布与频率无关，并与横截面在导行系统上的位置无关；②导模是离散的，具有离散谱，当工作频率一定时，每个导模具有唯一的传播常数；③导模之间相互正交，彼此独立，互不耦合；④具有截止特性，截止条件和截止波长因导行系统和模式而异。

满足式（8-21）的传输模，按其有无纵向场分量E_z和H_z分为以下三类：

（1）$E_z=0$和$H_z=0$的导模称为横电磁模，记为TEM模。

这种模只能存在于双导体或多导体导行系统中。由式（8-24）可知，此时$k^2_c=0$，即$\beta^2=k^2$，则

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\upsilon \qquad (8\text{-}25)$$

表明TEM模沿轴向传播的相速度v_p与同一介质中平面波的速度v相等。

（2）E_z=0而H_z≠0的导模称为横电模或磁模，记为TE模或H模；H_z=0，而E_z≠0的导模称为横磁模或电模，记为TM模或E模。

因为空心金属波导管中只能传输这类模式，所以也将它们称做波导模。此时，$k^2_c \neq 0$，且$k^2_c > 0$，即$\beta^2 < k^2$，则

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \upsilon \qquad (8\text{-}26)$$

表明空心金属波导管中的TE模和TM模沿轴向传播的相速度v_p大于同一介质中平面波的速度v，因而TE模和TM模是一种快波。

（3）$E_z \neq 0$和$H_z \neq 0$的导模称为混合模。

这类模式存在于开放式波导中，且在波导表面附近的空间内传播，故又称为表面波模。此时$k_c^2 \neq 0$，且$k_c^2 < 0$，即$\beta^2 > k^2$，则

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} < \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \upsilon \qquad (8\text{-}27)$$

表明表面波模沿轴向传播的相速度v_p小于同一介质中平面波的速度v，是一种慢波。

需要指出的是，上述按有无E_z和/或H_z分量分类的方法不是唯一的。

8.2.6导波方程的求解方法

1. $k^2_c \neq 0$的情况

此种情况下导波场的求解问题属于本征值问题，其解可用纵向场法（longitudinal fiel dmethod）求得。

第一步：结合边界条件由本征值方程（8-20）求出纵向场分量$H_z(u,v)$或$E_z(u,v)$。求解方法通常采用分离变量法，边界条件要求在波导内壁切向电场为零，即

$$\begin{cases} E_z = 0 & \text{TM模} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial n} = 0 & \text{TE模} \end{cases} \tag{8-28}$$