# 广东省2021届高三数学八省联考考前模拟仿真模拟卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\in N|1\le x\le 4\}$， $B=\left\{x\in R|\ x^2-5x+6\le 0\right\}$， $C=\left\{x|\ x^2=9\right\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$

A．$\{2,3\}$　　B．$\{-3,2,3\}$　　C．$\{-3,3\}$　　D．$\{-3,2,3,4\}$

2．设复数 $z_1$，$z_2$ 在复平面内对应的点关于实轴对称，$z_1=2+i$，则 $\dfrac{z_1}{z_2}=$（　）

A．$1+i$　　B．$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

C．$1+\dfrac{4}{5}i$　　D．$1+\dfrac{4}{3}i$

3．命题 $p$：“$3<m<5$”是命题 $q$：“曲线 $\dfrac{x^2}{m-3}-\dfrac{y^2}{5-m}=1$”表示双曲线”的（　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

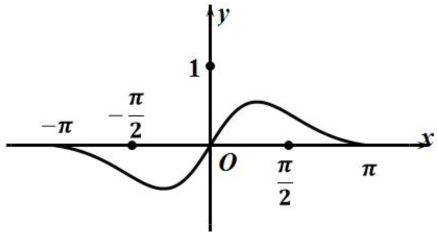
4．设 $a>0,b>0,\lg\sqrt{2}$ 是 $\lg 4^a$ 与 $\lg 2^b$ 的等差中项，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为（　）

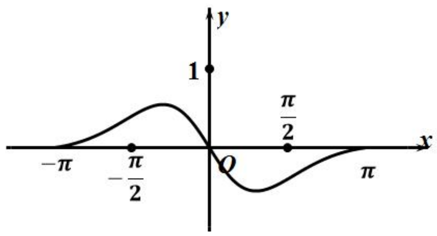
A．$2\sqrt{2}$　　B．3　　C．9　　D．$3\sqrt{2}$

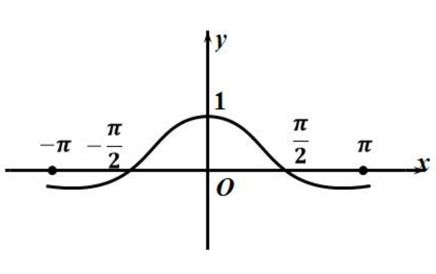
5．已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值为（　）

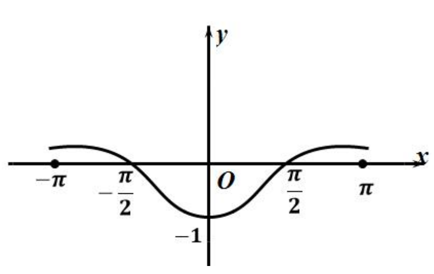
A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．$-\dfrac{7}{9}$

6．函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的大致图象是（　）.

A．


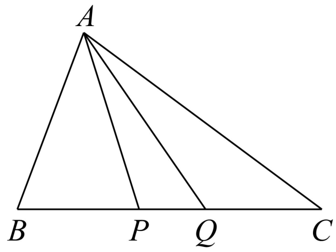

B．



C．



D．



7．将一线段 $AB$ 分为两线段 $AC$，$CB$，使得其中较长的一段 $AC$ 是全长 $AB$ 与另一段 $CB$

的比例中项，即满足$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，后人把这个数称为黄金分割，把点$C$称为线段$AB$的黄金分割点．图中在$\triangle ABC$中，若点$P$，$Q$为线段$BC$的两个黄金分割点，在$\triangle ABC$内任取一点$M$，则点$M$落在$\triangle APQ$内的概率为（　　）




A．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　　　B．$\sqrt{5}-2$

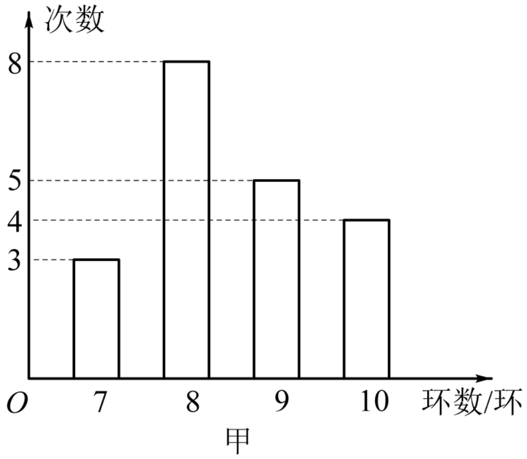
C．$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　　　D．$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

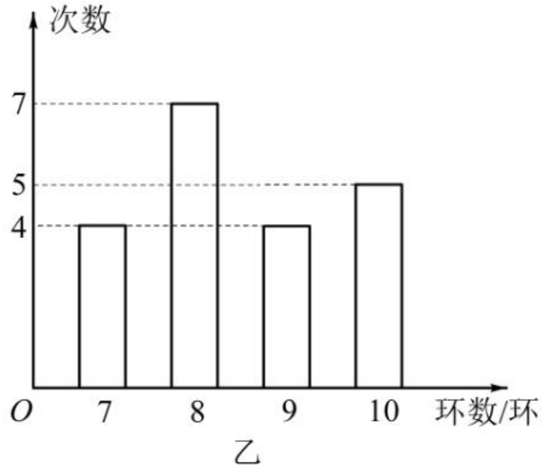
8．已知抛物线$C_1: y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为$F$，准线与$x$轴的交点为$E$，线段$EF$被双曲线$C_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$顶点三等分，且两曲线$C_1$，$C_2$的交点连线过曲线$C_1$的焦点$F$，则双曲线$C_2$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{11}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{22}}{2}$

## 二、多选题

9．甲、乙两名射击运动员在某次测试中各射击20次，两人测试成绩的条形图如图所示，则（　　）





乙

A．甲运动员测试成绩的中位数等于乙运动员测试成绩的中位数

B．甲运动员测试成绩的众数大于乙运动员测试成绩的众数

C．甲运动员测试成绩的平均数大于乙运动员测试成绩的平均数

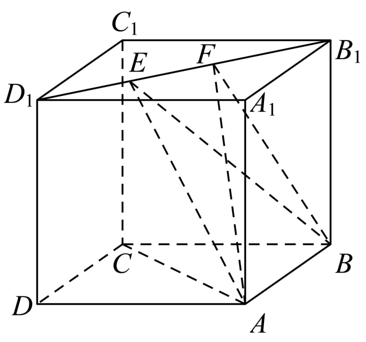
D．甲运动员测试成绩的方差小于乙运动员测试成绩的方差

10．若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+3\sin^2 x+\cos^2 x$ 在 $[-a,a]$ 上为增函数，则（　）

A．实数 $a$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　　B．实数 $a$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

C．点 $\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心 D．直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 $B_1D_1$ 上有两个动点 $E$，$F$，且 $EF=\dfrac{1}{2}$，则下列结论中正确的是（ ）




A．异面直线 $AE$、$BF$ 所成角为定值

B．$AC\perp BF$

C．$\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等

D．三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

12．定义在 $R$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(x\right)+f'\left(x\right)>1$，$f\left(0\right)=4$，则关于不等式 $e^x f\left(x\right)>e^x+3$ 的表述正确的为（　）

A．解集为 $\left(0,+\infty\right)$　　B．解集为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

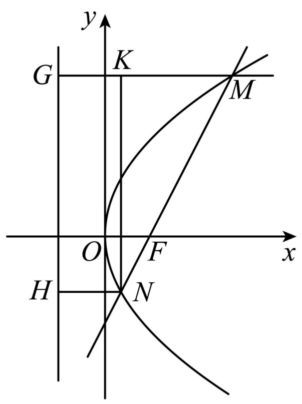
C．在$[-2,2]$上有解　　　　　　　　D．在$[-2,2]$上恒成立

## 三、填空题

13．已知非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$3|\vec{b}|=4|\vec{a}|$，若$\vec{b}\perp(-4\vec{a}+\vec{b})$，则$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角的大小为_________.

14．若函数$f(x)$满足$f(x+2)=\dfrac{x+3}{x+2}$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上的值域为______.

15．已知$M,N$是过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点$F$的直线$l$与抛物线$C$的交点，$O$是坐标原点，且满足$\overline{MF}=3\overline{FN}$，$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}|MN|$，则$p$的值为_____.




16．记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，已知$na_{n+1}-(n+1)a_n+\dfrac{1}{2}=0$，且$a_1=\dfrac{3}{2}$．若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$m>\dfrac{S_n}{2^n}$，则实数$m$的取值范围为______.

## 四、解答题

17．在①$b\cdot\sin A+a\cdot\sin B=4c\cdot\sin A\cdot\sin B$，②$\cos 2C-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}=2$，③$(a-\sqrt{3}b)\sin A+b\cdot\sin B=c\cdot\sin C$，这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并解决该问题．已知△$ABC$中，$a$、$b$、$c$分别为内角$A$、$B$、$C$的对边，$\sin A\cdot\sin B=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$c=2$，________.

（1）求$C$;

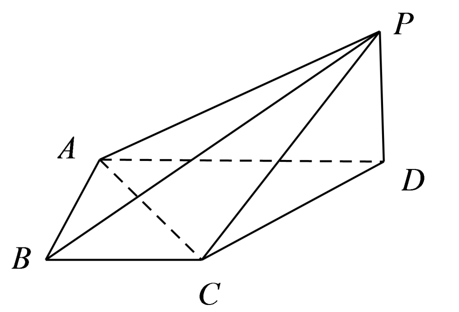
（2）求△$ABC$的面积$S$.

18．设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前$n$项和分别为$S_n$、$T_n$，且$S_n=\dfrac{1}{2}(3n^2+7n)$，$T_n=2(b_n-1)$ $(n\in N^*)$，

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令 $c_n = a_n \cdot b_n$，求 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $U_n$.

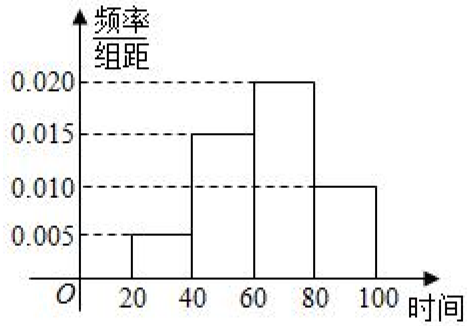
19．如图，四棱锥 $P-ABCD$，$PD \perp$ 平面 $ABCD$，$AD//BC$，$AB \perp BC$，$AB=BC=PD=1, AD=2$.




（1）求证：平面 $PAC \perp$ 上平面 $PCD$

（2）求平面 $PAB$ 与平面 $PCD$ 所成锐二面角的余弦值.

20．2020 年国庆节期间，我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”.某路桥公司为掌握国庆节期间车辆出行的高峰情况，在某高速公路收费站点记录了 3 日上午 9:20~10:40 这一时间段内通过的车辆数，统计发现这一时间段内共有 600 辆车通过该收费站点，它们通过该收费站点的时刻的频率分布直方图如下图所示，其中时间段 9:20~9:40 记作 $[20,40)$、9:40~10:00 记作 $[40,60)$，10:00~10:20 记作 $[60,80)$，10:20~10:40 记作 $[80,100)$，例如：10 点 04 分，记作时刻 64.




(1)估计这 600 辆车在 9:20~10:40 时间内通过该收费站点的时刻的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

(2)为了对数据进行分析，现采用分层抽样的方法从这 600 辆车中抽取 10 辆，再从这 10 辆车随机抽取 4 辆，设抽到的 4 辆车中，在 9:20~10:00 之间通过的车辆数为 $X$，求 $X$ 的分布列；

(3)根据大数据分析，车辆在每天通过该收费站点的时刻 $T$ 服从正态分布 $N \sim \left(\mu, \sigma^2\right)$，其中 $\mu$ 可用 3 日数据中的 600 辆车在 9:20~10:40 之间通过该收费站点的时刻的平均值近似代替，$\sigma^2$ 用样本的方差近似代替（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）.假如 4 日全天共有 1000 辆车通过该收费站点，估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数（结果

保留到整数）.

附：若随机变量 $T$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)=0.9545$， $P(\mu-3\sigma<T\le\mu+3\sigma)=0.9973$.

21．已知点 $F(1,0)$，直线 $L$： $x=-1$，$P$ 为平面上的动点，过点 $P$ 作直线 $L$ 的垂线，垂足为 $Q$，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

（1）求点 $P$ 的轨迹 $C$ 的方程.

（2）是否存在正数 $m$，对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 $C$ 有两个交点 A，$B$ 的任一直线，都有 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}<0$？若存在，求出 $m$ 的取值范围；若不存在，请说明理由.

22．已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x+2a\left(a\in R\right)$

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $0<a<\frac{e}{4}$，求证： $f\left(x\right)<x+\frac{e^x}{x}$.

## 参考答案：

1．B

【解析】根据题意化简集合 $A,B,C$ ，根据集合并交补运算即可.

【详解】解：由题意化简集合得：$A=\{1,2,3,4\}$ ，$B=\left\{x|2\le x\le 3\right\}$，$C=\left\{-3,3\right\}$

所以 $A\cap B=\{2,3\}$ ,

所以 $(A\cap B)\cup C=\{2,3\}\cup\{-3,3\}=\{-3,2,3\}$.

故选：B.

【点睛】集合基本运算的方法技巧:

（1）当集合是用列举法表示的数集时，可以通过列举集合的元素进行运算，也可借助 Venn 图运算;

（2）当集合是用不等式表示时，可运用数轴求解，对于端点处的取舍，可以单独检验.

2．B

【解析】由题可得 $z_2=2-i$，再根据复数除法运算法则即可求出.

【详解】因为复数 $z_1$，$z_2$ 在复平面内对应的点关于实轴对称，$z_1=2+i$，所以 $z_2=2-i$，

所以 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ .

故选：B.

3．A

【解析】根据双曲线的标准方程，满足 $(m-3)(5-m)>0$ ，求出 $m$ 的取值范围，再利用充分条件、必要条件的定义即可求解.

【详解】曲线 $\frac{x^2}{m-3}-\frac{y^2}{5-m}=1$ 表示双曲线，

可得 $(m-3)(5-m)>0$ ，解得 $3<m<5$，

命题 $p$：“$3<m<5$”是命题 $q$：“曲线 $\frac{x^2}{m-3}-\frac{y^2}{5-m}=1$”表示双曲线”的充要条件,

故选：A

4．C

【解析】根据等差中项的定义，利用对数的运算得到 $2a+b=1$ ，然后利用这一结论，将目标化为齐次式，利用基本不等式即可求最小值.

【详解】解：Q $a>0,b>0,\lg\sqrt{2}$ 是 $\lg 4^a$ 与 $\lg 2^b$ 的等差中项，

$\therefore 2\lg\sqrt{2}=\lg 4^{a}+\lg 2^{b}, \therefore \lg 2=\lg 2^{2a+b}$，

即 $2=2^{2a+b}$，即 $2a+b=1$，

则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 5+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=9$,

当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时取等号.

故选 $C$.

【点睛】本题主要考查利用基本不等式求最值中的其次化方法，涉及等差中项概念和对数运算，难度中等.

当已知 $\alpha a+\beta b=k$（$\alpha,\beta,a,b,k$ 都是正实数，且 $\alpha,\beta,k$ 为常数），求 $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}(m,n>0$，为常数）的最小值时常用 $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=\frac{1}{k}\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)(\alpha a+\beta b)$ 方法，展开后对变量部分利用基本不等式，从而求得最小值；

已知 $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=k$（$\alpha,\beta,a,b,k$ 都是正实数，且 $\alpha,\beta,k$ 为常数），求 $ma+nb(m,n>0$，为常数）的最小值时也可以用同样的方法.

5．D

【解析】利用两角和与差的正弦公式，诱导公式化简已知等式可得 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，进而利用诱导公式，二倍角公式化简所求即可求解.

【详解】因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^{2}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-1=-\frac{7}{9}$，

故选：D

6．A

【解析】根据函数的奇偶性排除 C、D，根据 $x\in(0,\pi)$ 时，函数值的符号排除 B，故选 A.

【详解】因为 $f(x)=\frac{2\sin x}{e^{x}+e^{-x}}$，所以 $f(-x)=\frac{2\sin(-x)}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{2\sin x}{e^{x}+e^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，其图象关于原点对称，故 C、D 不正确；

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\sin x>0$，所以 $f(x)>0$，故 B 不正确;

故选：A

【点睛】关键点点睛：利用函数的性质排除不正确选项是解题关键.

7．B

【解析】根据几何概型公式求出面积比可得答案.

【详解】由几何概型公式知，

所求概率为$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PQ}{BC}=\frac{BQ-BP}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}BC-\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)BC}{BC}=\sqrt{5}-2$.

故选：B.

8．D

【解析】求得抛物线的焦点和准线，可得$EF$的长度，由题意可得$p=6a$，求出两曲线交点坐标，代入双曲线方程可得$a,b$的关系，利用离心率公式可求得结果.

【详解】抛物线$y^2=2px$的焦点为$F(\frac{p}{2},0)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，$E(-\frac{p}{2},0)$，

$|EF|=p$，

因为线段$EF$被双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$顶点三等分，所以$2a=\frac{p}{3}$，即$p=6a$，

因为两曲线$C_1$，$C_2$的交点连线过曲线$C_1$的焦点$F$，所以两个交点为$(\frac{p}{2},p)$、$(\frac{p}{2},-p)$，

将$(\frac{p}{2},p)$代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$得$\frac{p^2}{4a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1$，

所以$\frac{36a^2}{4a^2}-\frac{36a^2}{b^2}=1$，所以$9-\frac{36a^2}{b^2}=1$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{2}$，

所以双曲线$C_2$的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

故选：D

【点睛】关键点点睛：本题考查求椭圆的离心率，解题关键是找到关于$a,b,c$的等量关系．根据线段$EF$被双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$顶点三等分得到$p=6a$，再求出两曲线交点坐标，代入双曲线方程可得$a,b$的关系，考查了学生的运算求解能力，逻辑推理能力．属于中档题.

9．AD

【解析】分别根据条形图求出甲和乙运动员的中位数、众数、平均数、方差，经过比较即可判断四个选项的正确性，即可得正确选项.

【详解】由图可得甲运动员测试成绩中3次7环，8次8环，5次9环，4次10环，

所以甲运动员测试成绩的中位数为$8$，众数为$8$，

平均数为$\dfrac{3\times7+8\times8+5\times9+4\times10}{20}=8.5$，

方差$\dfrac{(7-8.5)^2\times3+(8-8.5)^2\times8+(9-8.5)^2\times5+(10-8.5)^2\times4}{20}=\dfrac{19}{20}$；

乙运动员测试成绩中$4$次$7$环，$7$次$8$环，$4$次$9$环，$5$次$10$环，

所以乙运动员测试成绩的中位数为$8$，众数为$8$，

平均数为$\dfrac{4\times7+7\times8+4\times9+5\times10}{20}=8.5$，

方差$\dfrac{(7-8.5)^2\times4+(8-8.5)^2\times7+(9-8.5)^2\times4+(10-8.5)^2\times5}{20}=\dfrac{23}{20}$，

故选项 A 正确，B 不正确，C 不正确，D 正确，

故选：AD

10．ACD

【解析】化简函数$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2$，结合三角函数的性质，逐项判定，即可求解.

【详解】由题意，函数$f(x)=\sqrt{3}\sin2x+3\sin^2x+\cos^2x=\sqrt{3}\sin2x+2\sin^2x+1$

$=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x+2=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2$，

令$-\dfrac{\pi}{2}\le2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}$，可得$-\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$，所以$0<a\le\dfrac{\pi}{6}$，所以 A 正确，B 不正确；

令$x=\dfrac{\pi}{12}$，可得$f(\dfrac{\pi}{12})=2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}\right)+2=2$，

所以点$\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$为曲线$y=f(x)$的对称中心，所以 C 正确；

令$x=\dfrac{\pi}{3}$，可得$f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)+2=4$，所以$x=\dfrac{\pi}{3}$为曲线$y=f(x)$的对称轴，所以 D 正确.

故选：ACD

【点睛】解答三角函数的图象与性质的基本方法：

1、根据已知条件化简得出三角函数的解析式为$y=A\sin(wx+\varphi)$的形式；

2、熟练应用三角函数的图象与性质，结合数形结合法的思想研究函数的性质（如：单调性、奇偶性、对称性、周期性与最值等），进而加深理解函数的极值点、最值点、零点及有界性等概念与性质，但解答中主要角的范围的判定，防止错解.

11．BD