

湖北省武汉为明学校 2023 届高三第一次调研联考数学试题试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 过 F_1 的直线与双曲线的两支分别交于 A, B 两点 (A 在右支, B 在左支) 若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

2. 已知函数 $y = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \\ -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$ 的图象与直线 $y = m(x+2) (m > 0)$ 恰有四个公共

点 $A(x_1, y_1), B(x_1, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 其中 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_4 + 2) \tan x_4 =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

3. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{5\pi}{8}$

4. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) = 3^x + \frac{4}{3}$, 则 $f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) =$ ()

- A. -2 B. 3 C. -3 D. 2

5. 已知点 $A(2, 0), B(0, -2)$. 若点 P 在函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象上, 则使得 $\triangle PAB$ 的面积为 2 的点 P 的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, 恒有 $\frac{x}{3} f'(x) + f(x) > 0$. 则不等式

$x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$ 的解集为 ().

- A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < -\frac{1}{3}\}$
 C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

7. 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，则经过点 F 与点 $M(2, 2)$ 且与抛物线的准线相切的圆的个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 0 个 D. 无数个

8. 已知函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图像的一条对称轴为直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ ，且 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$ ，则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

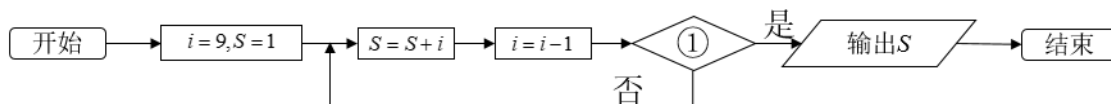
9. 若实数 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的取值范围是 ()

- A. $[4, +\infty)$ B. $[0, 6]$ C. $[0, 4]$ D. $[6, +\infty)$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $2(b \cos A + a \cos B) = c^2$ ， $b = 3$ ， $3 \cos A = 1$ ，则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $\sqrt{10}$ D. 4

11. 如图所示的程序框图，当其运行结果为 31 时，则图中判断框①处应填入的是 ()



- A. $i \leq 3?$ B. $i \leq 4?$ C. $i \leq 5?$ D. $i \leq 6?$

12. 若复数 $z = 2m - 1 + mi$ ($m \in \mathbb{R}$) 在复平面内的对应点在直线 $y = -x$ 上，则 $\bar{z}$ 等于 ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ D. $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

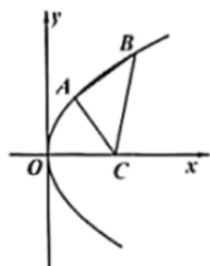
13. 已知 $f(x) = \sin[\frac{\pi}{3}(x+1)] - \sqrt{3} \cos[\frac{\pi}{3}(x+1)]$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2020) =$ _____

14. $(1-3x)(1+x)^5$ 展开式中 x^3 项的系数是 _____

15. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2\sqrt{5}$ ， $AC = \sqrt{5}$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 绕 BC 所在直线旋转一周所形成的几何体的表面积为 _____.

16. 如图所示，点 $A(1, 2)$ ， B 均在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边为 BC ，点 C 在 x 轴的正半轴上，则点

B 的坐标是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某精密仪器生产车间每天生产 n 个零件，质检员小张每天都会随机地从中抽取 50 个零件进行检查是否合格，若较多零件不合格，则需对其余所有零件进行检查。根据多年的生产数据和经验，这些零件的长度服从正态分布 $N(10, 0.1^2)$ (单位：微米 μm)，且相互独立。若零件的长度 d 满足 $9.7\mu m < d < 10.3\mu m$ ，则认为该零件是合格的，否则该零件不合格。

(1) 假设某一天小张抽查出不合格的零件数为 X ，求 $P(X \geq 2)$ 及 X 的数学期望 EX ；

(2) 小张某天恰好从 50 个零件中检查出 2 个不合格的零件，若以此频率作为当天生产零件的不合格率。已知检查一个零件的成本为 10 元，而每个不合格零件流入市场带来的损失为 260 元。假设 n 充分大，为了使损失尽量小，小张是否需要检查其余所有零件，试说明理由。

附：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9987, 0.9987^{50} = 0.9370, 0.9987^{49} \times 0.0013 = 0.0012.$$

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-2| - |x+1|$.

(I) 解不等式 $f(x) > 1$;

(II) 当 $x > 0$ 时，若函数 $g(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x}$ ($a > 0$) 的最小值恒大于 $f(x)$ ，求实数 a 的取值范围。

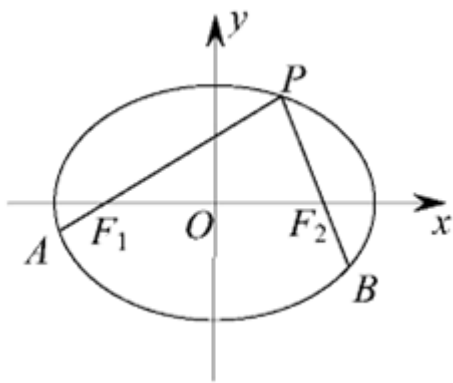
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + e$, $g(x) = 1 - \ln x$ ，其中 e 为自然对数的底数。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中较大者，记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, ($x > 0$)。若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围。

20. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率是 e ，动点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上运

动，当 $PF_2 \perp x$ 轴时， $x_0 = 1, y_0 = e$ 。



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 延长 PF_1, PF_2 分别交椭圆于点 A, B (A, B 不重合). 设 $\overrightarrow{AF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1P}, \overrightarrow{BF_2} = \mu \overrightarrow{F_2P}$, 求 $\lambda + \mu$ 的最小值.

21. (12 分) 已知椭圆: $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{15}$, 原点到直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知定点 $P(0, 2)$, 是否存在过 P 的直线 l , 使 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且以 $|AB|$ 为直径的圆过椭圆 C 的左顶点? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $a \in R, a \neq 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x) = 0$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 求证: $x_1 \cdot x_2$ 随着 $\frac{x_2}{x_1}$ 的增大而增大.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

根据双曲线的定义可得 $\triangle ABF_2$ 的边长为 $4a$ ，然后在 $\triangle AF_1F_2$ 中应用余弦定理得 a, c 的等式，从而求得离心率。

【详解】

由题意 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ ， $|BF_2| - |BF_1| = 2a$ ，又 $|AF_2| = |BF_2| = |AB|$ ，

$\therefore |AF_1| - |BF_1| = |AB| = 4a$ ， $\therefore |BF_1| = 2a$ ，

在 $\triangle AF_1F_2$ 中 $|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1||AF_2|\cos 60^\circ$ ，

即 $4c^2 = (6a)^2 + (4a)^2 - 2 \times 6a \times 4a \times \frac{1}{2} = 28a^2$ ， $\therefore$

故选：D.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，解题关键是应用双曲线的定义把 A 到两焦点距离用 a 表示，然后用余弦定理建立关系式。

2. A

【解析】

先将函数解析式化简为 $y = |\cos x|$ ，结合题意可求得切点 x_4 及其范围 $x_4 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，根据导数几何意义，即可求得

$(x_4 + 2)\tan x_4$ 的值。

【详解】

$$\text{函数 } y = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \\ -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

即 $y = |\cos x|$

直线 $y = m(x + 2) (m > 0)$ 与函数 $y = |\cos x|$ 图象恰有四个公共点，结合图象知直线 $y = m(x + 2) (m > 0)$ 与函数

$y = -\cos x$ 相切于 x_4 ， $x_4 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，

因为 $y' = \sin x$ ，

故 $k = \sin x_4 = \frac{-\cos x_4}{x_4 + 2}$ ，

$$\text{所以 } (x_4 + 2) \tan x_4 = (x_4 + 2) \times \frac{\sin x_4}{\cos x_4} = (x_4 + 2) \times \frac{-1}{(x_4 + 2)} = -1.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了三角函数的图像与性质的综合应用，由交点及导数的几何意义求函数值，属于难题.

3. A

【解析】

首先求得平移后的函数 $g(x) = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ ，再根据 $\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 求 φ 的最小值.

【详解】

根据题意， $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位后，所得图象对应的函数

$$g(x) = \sin\left[2(x + \varphi) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $2\varphi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 又 $\varphi > 0$ ，所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

故选：A

【点睛】

本题考查三角函数的图象变换，诱导公式，意在考查平移变换，属于基础题型.

4. D

【解析】

判断 $-1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0$ ，利用函数的奇偶性代入计算得到答案.

【详解】

$$\because -1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0, \therefore f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) = f\left(-\log_3 \frac{2}{3}\right) = f\left(\log_3 \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了利用函数的奇偶性求值，意在考查学生对于函数性质的灵活运用.

5. C

【解析】

设出点 P 的坐标，以 AB 为底结合 $\triangle PAB$ 的面积计算出点 P 到直线 AB 的距离，利用点到直线的距离公式可得出关于

a 的方程, 求出方程的解, 即可得出结论.

【详解】

设点 P 的坐标为 $(a, \sqrt{a})$, 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$, 即 $x - y - 2 = 0$,

设点 P 到直线 AB 的距离为 d , 则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times d = 2$, 解得 $d = \sqrt{2}$,

另一方面, 由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|a - \sqrt{a} - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

整理得 $a - \sqrt{a} = 0$ 或 $a - \sqrt{a} - 4 = 0$, $\because a \geq 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = 1$ 或 $a = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$.

综上, 满足条件的点 P 共有三个.

故选: C.

【点睛】

本题考查三角形面积的计算, 涉及点到直线的距离公式的应用, 考查运算求解能力, 属于中等题.

6. D

【解析】

先通过 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 得到原函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为增函数且为偶函数, 再利用到 y 轴距离求解不等式即可.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$,

则 $g'(x) = x^2 f(x) + \frac{x^3}{3} f'(x) = x^2 \left(\frac{x}{3} f'(x) + f(x) \right)$

由题可知 $\frac{x}{3} f'(x) + f(x) > 0$, 所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 在 $x \geq 0$ 时为增函数;

由 x^3 为奇函数, $f(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数;

又 $x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$, 即 $x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$

即 $g(x) < g(1+2x)$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

所以 $|x| < |1+2x|$, 解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$

故选：D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数，偶函数解不等式等知识点，属于较难题目.

7. B

【解析】

圆心在 FM 的中垂线上，经过点 F ， M 且与 l 相切的圆的圆心到准线的距离与到焦点 F 的距离相等，圆心在抛物线上，直线与抛物线交于 2 个点，得到 2 个圆.

【详解】

因为点 $M(2, 2)$ 在抛物线 $y^2 = 2x$ 上，

又焦点 $F(\frac{1}{2}, 0)$ ，

由抛物线的定义知，过点 F 、 M 且与 l 相切的圆的圆心即为线段 FM 的垂直平分线与抛物线的交点，

这样的交点共有 2 个，

故过点 F 、 M 且与 l 相切的圆的不同情况种数是 2 种.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的简单性质，本题解题的关键是求出圆心的位置，看出圆心必须在抛物线上，且在垂直平分线上.

8. D

【解析】

运用辅助角公式，化简函数 $f(x)$ 的解析式，由对称轴的方程，求得 a 的值，得出函数 $f(x)$ 的解析式，集合正弦函数的最值，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \theta)$ (θ 为辅助角)，

由于函数的对称轴的方程为 $x = \frac{5\pi}{6}$ ，且 $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{a}{2} + \frac{3}{2}$ ，

即 $\left| \frac{a}{2} + \frac{3}{2} \right| = \sqrt{a^2 + 3}$ ，解得 $a = 1$ ，所以 $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，

又由 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$ ，所以函数必须取得最大值和最小值，

所以可设 $x_1 = 2k_1\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k_1 \in Z$ ， $x_2 = 2k_2\pi - \frac{\pi}{6}$, $k_2 \in Z$ ，

所以 $|x_1 + x_2| = 2k_1\pi + 2k_2\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in Z$,

当 $k_1 = k_2 = 0$ 时, $|x_1 + x_2|$ 的最小值 $\frac{2\pi}{3}$, 故选 D.

【点睛】

本题主要考查了正弦函数的图象与性质, 其中解答中利用三角恒等变换的公式, 化简函数的解析式, 合理利用正弦函数的对称性与最值是解答的关键, 着重考查了分析问题和解决问题的能力, 属于中档试题.

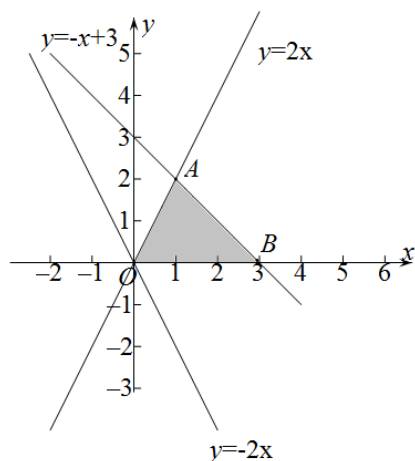
9. B

【解析】

根据所给不等式组, 画出不等式表示的可行域, 将目标函数化为直线方程, 平移后即可确定取值范围.

【详解】

实数 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$, 画出可行域如下图所示:



将线性目标函数 $z = 2x + y$ 化为 $y = -2x + z$,

则将 $y = -2x$ 平移, 平移后结合图像可知, 当经过原点 $O(0,0)$ 时截距最小, $z_{\min} = 0$;

当经过 $B(3,0)$ 时, 截距最大值, $z_{\max} = 2 \times 3 + 0 = 6$,

所以线性目标函数 $z = 2x + y$ 的取值范围为 $[0, 6]$,

故选: B.

【点睛】

本题考查了线性规划的简单应用, 线性目标函数取值范围的求法, 属于基础题.

10. B

【解析】

由正弦定理及条件可得 $2(\sin B \cos A + \sin A \cos B) = c \sin C$,

即 $2 \sin(A+B) = 2 \sin C = c \sin C$.

∵ $\sin C > 0$,

∴ $c = 2$,

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 9$ 。

∴ $a = 3$. 选 B。

11. C

【解析】

根据程序框图的运行，循环算出当 $S = 31$ 时，结束运行，总结分析即可得出答案。

【详解】

由题可知，程序框图的运行结果为 31，

当 $S = 1$ 时， $i = 9$ ；

当 $S = 1 + 9 = 10$ 时， $i = 8$ ；

当 $S = 1 + 9 + 8 = 18$ 时， $i = 7$ ；

当 $S = 1 + 9 + 8 + 7 = 25$ 时， $i = 6$ ；

当 $S = 1 + 9 + 8 + 7 + 6 = 31$ 时， $i = 5$ 。

此时输出 $S = 31$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查根据程序框图的循环结构，已知输出结果求条件框，属于基础题。

12. C

【解析】

由题意得 $2m - 1 + m = 0$ ，可求得 $m = -\frac{1}{3}$ ，再根据共轭复数的定义可得选项。

【详解】

由题意得 $2m - 1 + m = 0$ ，解得 $m = -\frac{1}{3}$ ，所以 $z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$ ，所以 $\bar{z} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ ，

故选：C。

【点睛】

本题考查复数的几何表示和共轭复数的定义，属于基础题。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/216214132105010235>