

# 长沙市一中 2024 届高三适应性演练（一）

## 数学试卷

注意事项：

- 1.答卷前，考生勿将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$ ,  $B = \{x \mid \log_4 x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $(3, 4)$                       B.  $(-\infty, -1) \cup (3, 4)$                       C.  $(1, 4)$                       D.  $(-\infty, 4)$

2. 若复数  $z$  满足  $(3-4i)z = |4+3i|$ , 则在复平面内  $z$  对应的点位于 ( )

- A. 第一象限                                              B. 第二象限  
C. 第三象限                                              D. 第四象限

3. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 若  $S_3 = 9$ ,  $S_6 = 36$ , 则  $a_7 + a_8 + a_9 =$  ( )

- A. 18                                              B. 27                                              C. 45                                              D. 63

4. 若  $n$  为一组从小到大排列的数 1, 2, 4, 8, 9, 10 的第六十百分位数, 则二项式  $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x})^n$  的展开式的常数项是 ( )

- A. 7                                              B. 8                                              C. 9                                              D. 10

5. 折扇是我国古老文化的延续, 在我国已有四千年左右的历史, “扇”与“善”谐音, 折扇也寓意“善良”“善行”.它常以字画的形式体现我国的传统文化, 也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征 (如图 1). 图 2 是一个圆台的侧面展开图 (扇形的一部分), 若两个圆弧  $DE$ ,  $AC$  所在圆的半径分别是 3 和 6, 且  $\angle ABC = 120^\circ$ , 则该圆台的体积为 ( )



图1

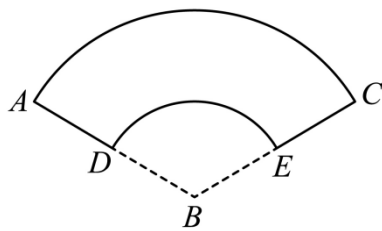


图2

- A.  $\frac{50\sqrt{2}}{3}\pi$       B.  $9\pi$       C.  $7\pi$       D.  $\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$

6. 已知函数  $f(x) = x^2 - bx + c$  ( $b > 0, c > 0$ ) 的两个零点分别为  $x_1, x_2$ , 若  $x_1, x_2, -1$  三个数适当调整顺序后可为等差数列, 也可为等比数列, 则不等式  $\frac{x-b}{x-c} \leq 0$  的解集为 ( )

- A.  $\left(1, \frac{5}{2}\right]$       B.  $\left[1, \frac{5}{2}\right)$   
C.  $(-\infty, 1) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$       D.  $(-\infty, 1] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

7. 已知  $a = \ln(1.2e), b = e^{0.2}, c = \frac{1.2}{e^{0.2}}$ , 则有 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $c < a < b$       D.  $c < b < a$

8. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  向双曲线的一条渐近线引垂线, 垂足为点  $P, PQ = \frac{1}{3}PF_1$  (且  $OQ \perp PF_1$  ( $O$  为坐标原点)), 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

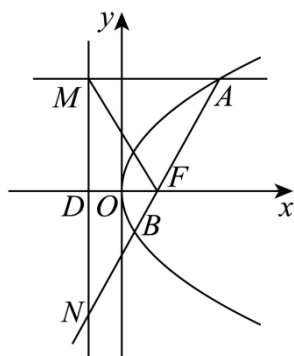
- A.  $y = \pm 2\sqrt{2}x$       B.  $y = \pm \sqrt{5}x$   
C.  $y = \pm \sqrt{3}x$       D.  $y = \pm \sqrt{2}x$

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知直线  $l, m$ , 平面  $\alpha, \beta$ , 则下列说法错误的是 ( ) .

- A.  $m \parallel l, l \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel \alpha$   
B.  $l \parallel \beta, m \parallel \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
C.  $l \parallel m, l \subset \alpha, m \subset \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
D.  $l \parallel \beta, m \parallel \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha, l \parallel m = M$ , 则  $\alpha \parallel \beta$

10. 如图, 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 抛物线  $C$  的准线与  $x$  轴交于点  $D$ , 过点  $F$  的直线  $l$  (直线  $l$  的倾斜角为锐角) 与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点 ( $A$  在  $x$  轴的上方,  $B$  在  $x$  轴的下方), 过点  $A$  作抛物线  $C$  的准线的垂线, 垂足为  $M$ , 直线  $l$  与抛物线  $C$  的准线相交于点  $N$ , 则 ( )



- A. 当直线  $l$  的斜率为 1 时,  $|AB| = 4p$       B. 若  $|NF| = |FM|$ , 则直线  $l$  的斜率为 2  
C. 存在直线  $l$  使得  $\angle AOB = 90^\circ$       D. 若  $\vec{AF} = 3\vec{FB}$ , 则直线  $l$  的倾斜角为  $60^\circ$

11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) + f(x) = f(2026)$ , 且  $f(x+1) - 1$  是奇函数. 则 ( )

- A.  $f(1) + f(3) = 2$       B.  $f(2023) + f(2025) = f(2024)$   
C.  $f(2023)$  是  $f(2022)$  与  $f(2024)$  的等差中项      D.  $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 2024$

### 三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = (1, 2), \vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$ , 则向量  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角的余弦值为\_\_\_\_\_.

13. 在四面体  $P-ABC$  中,  $BP \perp PC, \angle BAC = 60^\circ$ , 若  $BC = 2$ , 则四面体  $P-ABC$  体积的最大值是\_\_\_\_\_, 它的外接球表面积的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 已知反比例函数图象上三点  $A, B, P$  的坐标分别  $\left(3, \frac{a}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 3a\right) \left(a > \frac{1}{3}\right)$  与  $(x, y) \left(\frac{1}{3} < x < 3\right)$ , 过  $B$

作直线  $AP$  的垂线, 垂足为  $Q$ . 若  $|AP| \cdot |PQ| \leq \frac{5}{3} + a$  恒成立, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题 (本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. 某商场举行“庆元宵, 猜谜语”的促销活动, 抽奖规则如下: 在一个不透明的盒子中装有若干个标号为 1, 2, 3 的空心小球, 球内装有难度不同的谜语. 每次随机抽取 2

个球，答对一个小球中的谜语才能回答另一个小球中的谜语，答错则终止游戏。已知标号为 1, 2, 3 的小球个数比为 1: 2: 1，且取到异号球的概率为  $\frac{5}{7}$ 。

(1) 求盒中 2 号球的个数；

(2) 若甲抽到 1 号球和 3 号球，甲答对球中谜语的概率和对应奖金如表所示，请帮甲决策猜谜语的顺序（猜对谜语的的概率相互独立）

| 球号   | 1 号球 | 3 号球 |
|------|------|------|
| 答对概率 | 0.8  | 0.5  |
| 奖金   | 100  | 500  |

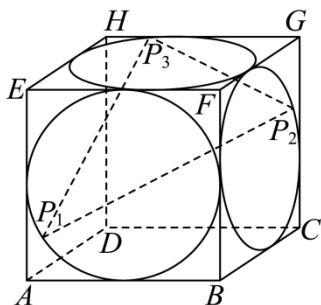
16. “费马点”是由十七世纪法国数学家费马提出.该问题是：“在一个三角形内求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小.”意大利数学家托里拆利给出了解答，当  $\triangle ABC$  的三个内角均小于  $120^\circ$  时，使得  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$  的点  $O$  即为费马点；当  $\triangle ABC$  有一个内角大于或等于  $120^\circ$  时，最大内角的顶点为费马点.试用以上知识解决下面问题：

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $\cos 2B + \cos 2C - \cos 2A = 1$

(1) 求  $A$ ；

(2) 若  $bc = 2$ ，设点  $P$  为  $\triangle ABC$  的费马点，求  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ 。

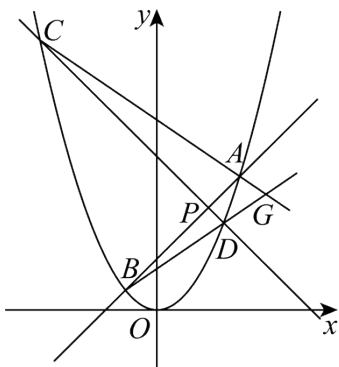
17. 如图，正方体  $ABCD - EFGH$  的棱长为 2，在正方形  $ABFE$  的内切圆上任取一点  $P_1$ ，在正方形  $BCGF$  的内切圆上任取一点  $P_2$ ，在正方形  $EFGH$  的内切圆上任取一点  $P_3$ 。



(1) 若  $P_1, P_2, P_3$  分别是棱  $AB, GC, HG$  的中点，求棱  $AE$  和平面  $P_1P_2P_3$  所成角的余弦值；

(2) 求  $|P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_1|$  的最小值与最大值。

18. 如图, 已知抛物线  $E: y = x^2$ , 点  $P(1, 2)$ , 过点  $P$  任作两条直线, 分别与抛物线  $E$  交于  $A, B$  与  $C, D$ .



(1) 若  $AB, CD$  的斜率分别为  $1, -1$ , 求四边形  $ABCD$  的面积;

(2) 设  $A(x_1, x_1^2), B(x_2, x_2^2), C(x_3, x_3^2), D(x_4, x_4^2)$

(i) 找到  $x_1, x_2$  满足的等量关系;

(ii)  $AC, BD$  交于点  $G$ , 证明: 点  $G$  在定直线上.

19. 置换是代数的基本模型, 定义域和值域都是集合  $A = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbf{N}_+$  的函数称为  $n$  次置换. 满足对任意  $i \in A, f(i) = i$  的置换称作恒等置换. 所有  $n$  次置换组成的集合记作  $S_n$ . 对于  $f(i) \in S_n$ , 我们可用列表法

表示此置换:  $f(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \text{L} & n \\ f(1) & f(2) & \text{L} & f(n) \end{pmatrix}$ , 记

$f(i) = f^1(i), f(f(i)) = f^2(i), f(f^2(i)) = f^3(i), \text{L}, f(f^{k-1}(i)) = f^k(i), i \in A, k \in \mathbf{N}_+.$

(1) 若  $f(i) \in S_4, f(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 计算  $f^3(i)$ ;

(2) 证明: 对任意  $f(i) \in S_4$ , 存在  $k \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $f^k(i)$  为恒等置换;

(3) 对编号从 1 到 52 的扑克牌进行洗牌, 分成上下各 26 张两部分, 互相交错插入, 即第 1 张不动, 第 27 张变为第 2 张, 第 2 张变为第 3 张, 第 28 张变为第 4 张, ....., 依次类推. 这样操作最少重复几次就能恢复原来的牌型? 请说明理由.

## 参考答案

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$ ,  $B = \{x \mid \log_4 x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $(3,4)$                       B.  $(-\infty,-1)\cup(3,4)$                       C.  $(1,4)$                       D.  $(-\infty,4)$

【答案】A

【解析】

【分析】首先求出绝对值不等式和对数不等式的解集，得出集合  $A, B$ ，进而可求出  $A \cap B$ 。

【详解】由  $|x-1| > 2$ ，得  $x < -1$  或  $x > 3$ ，所以  $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ ，

由  $\log_4 x < 1$ ，得  $0 < x < 4$ ，所以  $B = \{x | 0 < x < 4\}$ ，

所以  $A \cap B = \{x | 3 < x < 4\}$ 。

故选：A。

2. 若复数  $z$  满足  $(3-4i)z = |4+3i|$ ，则在复平面内  $z$  对应的点位于（    ）

- A. 第一象限                                              B. 第二象限  
C. 第三象限                                              D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】由复数除法、模的求法化简求复数  $z$ ，进而判断对应点所在象限。

【详解】由  $z = \frac{|4+3i|}{3-4i} = \frac{5}{3-4i} = \frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{5}$ ，对应点为  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  在第一象限。

故选：A

3. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ ，若  $S_3 = 9$ ， $S_6 = 36$ ，则  $a_7 + a_8 + a_9 =$ （    ）

- A. 18                                              B. 27                                              C. 45                                              D. 63

【答案】C

【解析】

【分析】根据  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$  成等差数列，得到方程，求出答案。

【详解】由题意得  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$  成等差数列，

即  $9, 36 - 9, a_7 + a_8 + a_9$  成等差数列，

即  $2 \times (36 - 9) = 9 + a_7 + a_8 + a_9$ ，解得  $a_7 + a_8 + a_9 = 45$ 。

故选：C

4. 若  $n$  为一组从小到大排列的数 1, 2, 4, 8, 9, 10 的第六十百分位数, 则二项式  $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x})^n$  的展开式的常数项是 ( )

- A. 7                                      B. 8                                      C. 9                                      D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】根据第六十百分位数, 结合二项式通项公式进行求解即可.

【详解】因为  $n$  为一组从小到大排列的数 1, 2, 4, 8, 9, 10 的第六十百分位数,  $6 \times 60\% = 3.6$ , 所以  $n = 8$ ,

二项式  $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x})^8$  的通项公式为  $T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt[3]{x})^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = C_8^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{\frac{8-r}{3}-r}$ ,

令  $\frac{8-r}{3} - r = 0 \Rightarrow r = 2$ , 所以常数项为  $C_8^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{4} = 7$ ,

故选: A

5. 折扇是我国古老文化的延续, 在我国已有四千年左右的历史, “扇”与“善”谐音, 折扇也寓意“善良”“善行”. 它常以字画的形式体现我国的传统文化, 也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征 (如图 1). 图 2 是一个圆台的侧面展开图 (扇形的一部分), 若两个圆弧  $DE$ ,  $AC$  所在圆的半径分别是 3 和 6, 且  $\angle ABC = 120^\circ$ , 则该圆台的体积为 ( )



图1

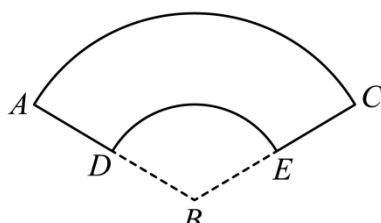


图2

- A.  $\frac{50\sqrt{2}}{3}\pi$                                       B.  $9\pi$                                       C.  $7\pi$                                       D.  $\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$

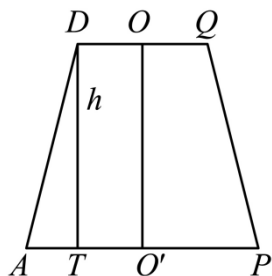
【答案】D

【解析】

【分析】根据题意求出圆台上下底面半径  $r_1 = 1, r_2 = 2$ , 圆台的高  $h = 2\sqrt{2}$ , 代入圆台的体积计算公式即可求解.

【详解】设圆台上下底面的半径分别为  $r_1, r_2$ , 由题意可知  $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 3 = 2\pi r_1$ , 解得  $r_1 = 1$ ,

$\frac{1}{3} \times 2\pi \times 6 = 2\pi r_2$ , 解得:  $r_2 = 2$ , 作出圆台的轴截面, 如图所示:



图中  $OD = r_1 = 1$ ,  $O'A = r_2 = 2$ ,  $AD = 6 - 3 = 3$ ,

过点  $D$  向  $AP$  作垂线, 垂足为  $T$ , 则  $AT = r_2 - r_1 = 1$ ,

所以圆台的高  $h = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$ ,

则上底面面积  $S_1 = \pi \times 1^2 = \pi$ ,  $S_2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$ , 由圆台的体积计算公式可得:

$$V = \frac{1}{3} \times (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \times h = \frac{1}{3} \times 7\pi \times 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3},$$

故选: D.

6. 已知函数  $f(x) = x^2 - bx + c$  ( $b > 0$ ,  $c > 0$ ) 的两个零点分别为  $x_1$ ,  $x_2$ , 若  $x_1$ ,  $x_2$ , -1 三个数适当

调整顺序后可为等差数列, 也可为等比数列, 则不等式  $\frac{x-b}{x-c} \leq 0$  的解集为 ( )

A.  $\left(1, \frac{5}{2}\right]$

B.  $\left[1, \frac{5}{2}\right)$

C.  $(-\infty, 1) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

D.  $(-\infty, 1] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】由韦达定理可知,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , 所以调整顺序后 -1,  $x_1$ ,  $x_2$  成等差数列,  $x_1$ , -1,  $x_2$  成等比数列, 从而列出关系得到  $x_1$ ,  $x_2$  的值, 再由韦达定理得  $b, c$  的值, 再解分式不等式即可得结果.

【详解】由韦达定理可知,  $x_1 + x_2 = b > 0$ ,  $x_1 \cdot x_2 = c > 0$ ,

所以调整顺序后 -1,  $x_1$ ,  $x_2$  成等差数列,  $x_1$ , -1,  $x_2$  成等比数列,

所以  $2x_1 = x_2 - 1$ ,  $x_2 \cdot x_1 = 1$ , 所以  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$ ,

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \therefore b = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = 1, \therefore c = 1,$$

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{x - 1} \leq 0 \text{ 解集 } \left(1, \frac{5}{2}\right],$$

故选: A.

7. 已知  $a = \ln(1.2e), b = e^{0.2}, c = \frac{1.2}{e^{0.2}}$ , 则有 ( )

A.  $a < b < c$

B.  $a < c < b$

C.  $c < a < b$

D.  $c < b < a$

【答案】C

【解析】

【分析】构造  $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1, x > 1$ , 根据导函数得出函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 即可得出  $f(0.2) > 0$ , 所以  $c < a$ ; 构造  $g(x) = e^x - (x+1), x > 0$ , 根据导函数得出函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 可判断  $c < 1$ , 再根据对数函数的运算性质得到  $c < a$ .

【详解】令  $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1, x > 0$ , 则  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ .

当  $x > 0$  时, 有  $e^x > 1, \frac{1}{x+1} < 1$ , 所以  $\frac{1}{x+1} < 1$ ,

所以,  $f'(x) > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

所以,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以,  $f(x) > f(0) = 1 - 1 = 0$ ,

所以,  $f(0.2) > 0$ , 即  $e^{0.2} - \ln 1.2 - 1 > 0$ , 所以  $a < b$ .

令  $g(x) = e^x - (x+1), x > 0$ , 则  $g'(x) = e^x - 1$  在  $x > 0$  时恒大于零, 故  $g(x)$  为增函数,

所以  $\frac{x+1}{e^x} < 1, x > 0$ , 而  $a = \ln(1.2e) = 1 + \ln 1.2 > 1$ , 所以  $c < a$ ,

所以  $c < a < b$ ,

故选: C

8. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  向双曲线的一条渐近线引垂线, 垂足为点  $P, PQ = \frac{1}{3} PF_1$  (  $O$  为坐标原点), 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

线, 垂足为点  $P, PQ = \frac{1}{3} PF_1$ , 且  $OQ \perp PF_1$  (  $O$  为坐标原点), 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

A.  $y = \pm 2\sqrt{2}x$

B.  $y = \pm \sqrt{5}x$

C.  $y = \pm\sqrt{3}x$

D.  $y = \pm\sqrt{2}x$

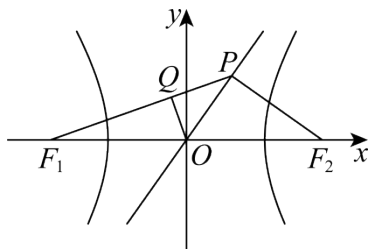
【答案】D

【解析】

【分析】不妨设渐近线  $OP$  的方程为  $y = \frac{b}{a}x$ ，求出点  $P$  的坐标，根据已知条件可得出关于  $a, b$  的齐次等式，解方程求  $\frac{b}{a}$ ，由此可得双曲线的渐近线的方程。

【详解】设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  焦距为  $2c$ ，则  $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ，

不妨设渐近线  $OP$  的方程为  $y = \frac{b}{a}x$ ，如图：



因为直线  $PF_2$  与直线  $y = \frac{b}{a}x$  垂直，则直线  $PF_2$  的方程为  $y = -\frac{a}{b}(x - c)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{a}{b}(x - c) \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = \frac{a^2}{c} \\ y = \frac{ab}{c} \end{cases}, \text{ 即点 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\text{所以, } \overrightarrow{PF_1} = \left(-c - \frac{a^2}{c}, -\frac{ab}{c}\right) = \left(-\frac{a^2 + c^2}{c}, -\frac{ab}{c}\right),$$

因为  $OQ \perp PF_1$ ，所以  $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF_1} = 0$ ，

$$\text{又 } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}, \text{ 故 } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1},$$

$$\text{所以, } \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF_1} = \left(\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}\right) \cdot \overrightarrow{PF_1} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PF_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}^2$$

$$= -\frac{a^2b^2 + a^2(a^2 + c^2)}{c^2} + \frac{(a^2 + c^2)^2 + a^2b^2}{3c^2} = 0,$$

$$\text{整理可得 } b^4 - a^2b^2 - 2a^4 = 0,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0, \text{ 又 } \frac{b}{a} > 0,$$

所以  $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ ,

故该双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{2}x$ .

故选: D.

二、选择题(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知直线  $l, m$ , 平面  $\alpha, \beta$ , 则下列说法错误的是 ( ).

A.  $m//l, l//\alpha$ , 则  $m//\alpha$

B.  $l//\beta, m//\beta, l\subset\alpha, m\subset\alpha$ , 则  $\alpha//\beta$

C.  $l//m, l\subset\alpha, m\subset\beta$ , 则  $\alpha//\beta$

D.  $l//\beta, m//\beta, l\subset\alpha, m\subset\alpha, l\cap m=M$ , 则  $\alpha//\beta$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由线面平行, 面面平行的判定可判断各选项的正误.

【详解】选项 A 中,  $m$  可能在  $\alpha$  内, 也可能与  $\alpha$  平行, 故 A 错误;

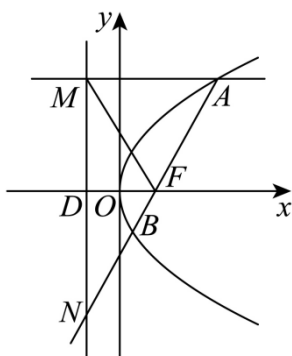
选项 B 中,  $\alpha$  与  $\beta$  也可能相交, 故 B 错误;

选项 C 中,  $\alpha$  与  $\beta$  也可能相交, 故 C 错误;

选项 D 中, 依据面面平行的判定定理可知  $\alpha//\beta$ , 故 D 正确.

故选: ABC.

10. 如图, 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 抛物线  $C$  的准线与  $x$  轴交于点  $D$ , 过点  $F$  的直线  $l$  (直线  $l$  的倾斜角为锐角) 与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点 ( $A$  在  $x$  轴的上方,  $B$  在  $x$  轴的下方), 过点  $A$  作抛物线  $C$  的准线的垂线, 垂足为  $M$ , 直线  $l$  与抛物线  $C$  的准线相交于点  $N$ , 则 ( )



- A. 当直线  $l$  的斜率为 1 时,  $|AB| = 4p$                       B. 若  $|NF| = |FM|$ , 则直线  $l$  的斜率为 2
- C. 存在直线  $l$  使得  $\angle AOB = 90^\circ$                       D. 若  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则直线  $l$  的倾斜角为  $60^\circ$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据抛物线的焦点弦的性质一一计算即可.

【详解】易知  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 可设  $AB: y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) (k > 0)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{与抛物线方程联立得} \begin{cases} y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 - (k^2 p + 2p)x + \frac{k^2 p^2}{4} = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{k^2 p + 2p}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{p^2}{4},$$

对于 A 项, 当直线  $l$  的斜率为 1 时, 此时  $x_1 + x_2 = 3p$ ,

由抛物线定义可知  $|AF| + |BF| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = |AB| = 4p$ , 故 A 正确;

易知  $\triangle AMN$  是直角三角形, 若  $|NF| = |FM|$ ,

则  $\angle ANM = \angle FMN \Rightarrow \angle AMF = \angle FAM$ ,

又  $|AF| = |AM|$ , 所以  $\triangle AMF$  为等边三角形, 即  $\angle AFx = 60^\circ$ , 此时  $k = \sqrt{3}$ , 故 B 错误;

$$\text{由上可知 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = (k^2 + 1)x_1 x_2 - \frac{pk^2}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p^2 k^2}{4}$$

$$= (k^2 + 1) \times \frac{p^2}{4} - \frac{pk^2}{2} \times \frac{p(k^2 + 2)}{k^2} + \frac{p^2 k^2}{4} = -\frac{3}{4}p^2 < 0,$$

即  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$ , 故 C 错误;

$$\text{若 } AF = 3FB \Rightarrow \frac{p}{2} - x_1 = 3\left(x_2 - \frac{p}{2}\right) \Rightarrow x_1 = 2p - 3x_2,$$

$$\text{又知 } x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{p}{6}, x_1 = \frac{3p}{2}, \text{ 所以 } y_1 = \sqrt{3}p,$$

$$\text{则 } k = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} = \sqrt{3}, \text{ 即直线 } l \text{ 的倾斜角为 } 60^\circ, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：AD

11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) + f(x) = f(2026)$ ，且  $f(x+1) - 1$  是奇函数. 则 ( )

A.  $f(1) + f(3) = 2$

B.  $f(2023) + f(2025) = f(2024)$

C.  $f(2023)$  是  $f(2022)$  与  $f(2024)$  的等差中项

D.  $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 2024$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由  $f(x+2) + f(x) = f(2026)$ ，可推出  $f(x)$  的周期为 4，由  $f(x+1) - 1$  是奇函数可推出  $f(1) = 1$ ，

通过赋值及函数的周期性可逐个判断各个选项.

【详解】因为  $f(x+2) + f(x) = f(2026)$ ，

$$\text{所以 } f(x+4) + f(x+2) = f(2026),$$

$$\text{两式相减得 } f(x+4) = f(x),$$

所以  $f(x)$  的周期为 4.

因为  $f(x+1) - 1$  是奇函数，

$$\text{所以 } f(-x+1) - 1 = -f(x+1) + 1, \text{ 所以 } f(-x+1) + f(x+1) = 2,$$

$$\text{即 } f(-x) + f(x+2) = 2,$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } f(1) = 1.$$

$$\text{因为 } f(x+2) + f(x) = f(2026) = f(2),$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } f(4) + f(2) = f(2),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/216230212154010122>