

第 6 章 力法

一. 教学目的

正确的判断静定结构和超静定结构；

理解力法方程的物理意义；

掌握力法的基本概念及解题步骤；

能够应用力法求解超静定梁、刚架、排架、桁架在荷载作用下的内力；

了解温度变化时的内力计算。

二. 主要章节

§6-1 超静定结构的组成和超静定次数

§6-2 力法的基本概念

§6-3 超静定刚架和排架

§6-4 超静定桁架和组合结构

§6-5 对称结构的计算

§6-6 支座移动和温度改变时的计算

§6-7 小结

§6-8 思考与讨论

三. 学习指导

力法计算超静定结构主要是利用静定结构内力计算和位移计算来解决超静定结构的内力计算，因此静定结构的内力计算和位移计算是本章的基础；由于力法的计算量较大，本章的学习重点应是力法的基本方程的理解和应用，主要是不超过三次超静定结构。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P205～P266

§6-1 超静定结构的组成和超静定次数

一. 教学目的

正确理解超静定结构的概念和超静定的次数；

能够正确确定超静定结构的次数。

二. 主要内容

1. 超静定结构的组成

2. 超静定次数

三. 学习指导

正确理解超静定结构的含义，理解超静定结构的几何特征和静力特征，可以为今后的学习打下一个基础。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P205~P209

6.1.1 超静定结构的组成

超静定结构是在工程实践中大量采用的结构形式，进行受力分析时，需求的未知力总和数多于独立平衡方程数因此仅用静力平衡条件不可能求出全部未知量。本章介绍超静定结构的第一个基本方法---力法。

1. 几何组成方面：

静定结构和超静定结构都是几何不变体系，都能承受荷载，这一点是相同的。但是对于静定结构使其保持几何不变的约束个数刚好能限制其可能产生的刚体运动。若去掉一个体系将变成几何可变体系，因此静定结构是无多余约束的几何不变体系。如图 6-1 所示简支梁共有三个约束，如去掉 B 支座链杆则变为几何可变。

超静定结构除了具有保持几何不变所需的必要约束外，还有多余约束，在不违背几何不变体系组成法则的前提下，合理的去掉这些多余约束体系仍能保持几何不变性。例如图 6-1 (b) 所示，支座 C 为多余约束，去掉后仍能保持几何不变图 (c)。

由此得到一下结论：

静定结构是没有多余约束的几何不变体系，超静定结构是有多余约束的几何不变体系。

2. 静力平衡方程方面

在前面静定结构的支座反力、内力计算中，我们已经得到结论：静定结构的全部反力、内力可由结构的整体或局部的静力平衡方程求得。这是由于静定结构没有多余约束，所有的约束反力个数与所列的独立平衡方程个数相等。求出全部支座反力后，进而能够求出内力。

超静定结构有多余约束，使得在用静力平衡方程求解时，未知力的个数多余所列出的独立平衡方程个数，这种情况下方程没有确切解。

如图 6-1 (b) 所示，有四个支座反力，而只有三个平衡方程。

这种反力和各截面内力不能完全由平衡条件来确定的结构，称为超静定结构。求解反力或内力所缺少的方程的个数称为超静定结构的次数。显然超静定次数等于多余约束个数。如图 6-1 (b) 所示为一次超静定。

总之，超静定结构具有如下特点：

- (1) 静定结构和超静定结构都是几何不变体系
- (2) 超静定结构是有多余约束的结构
- (3) 超静定结构的未知力（反力和各截面内力）个数超过了所列出的独立静力平衡方程的个数，需另找途径列出补充方程。

静定结构：结构的反力和各截面的内力都可以用静力平衡条件唯一确定(图 6-1a)。

超静定结构：结构的反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一的加以确定(图 6-1b)。

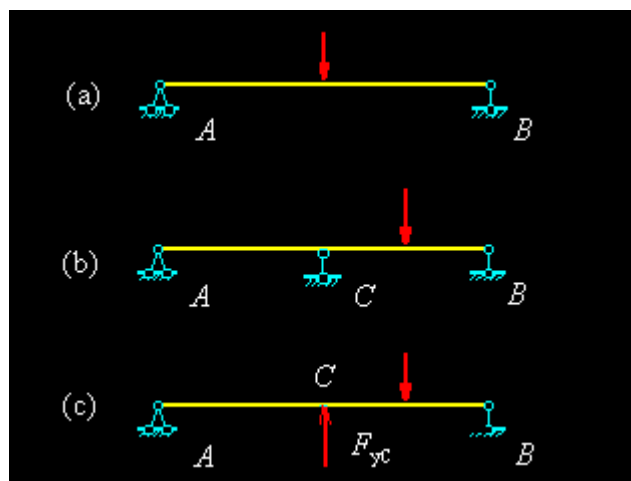


图 6-1

工程中常见的超静定结构有以下几大类：超静定梁、超静定桁架、超静定拱、超静定刚架、超静定组合结构等。（见课本）

6.1.2 超静定次数的确定

超静定次数：超静定结构中多余约束的个数；也可以认为多余未知力的数目。

将超静定结构中多余约束去掉，可变为相应的静定结构，则去掉多余约束的个数 n 即为原结构的超静定次数。

结构去掉多余约束的方式有以下几种：

1. 去掉一根支座链杆或切断一根链杆，等于去掉一个约束(图 7-2)。
2. 去掉一个固定铰支座或撤去一个单铰，等于去掉两个约束。

3. 将刚性连接改为单铰，相当于去掉一个约束(图 7-3)。

4. 去掉一个固定端或切断一个梁式杆，等于去掉三个约束(图 7-4)。

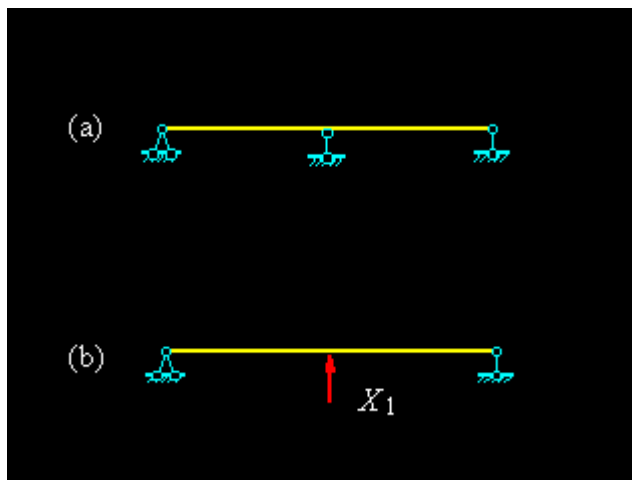


图 6-2

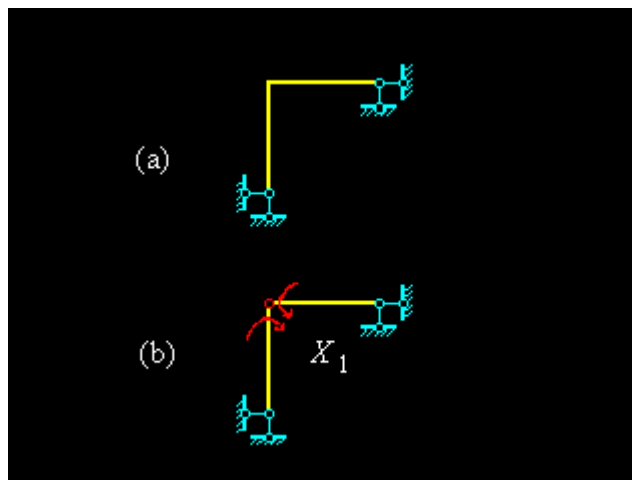


图 6-3

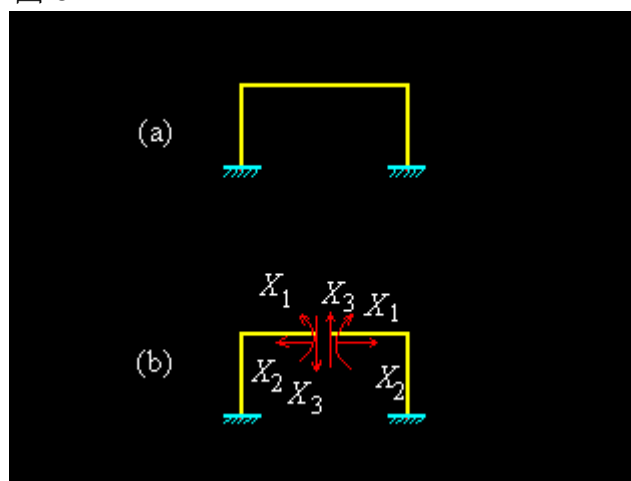


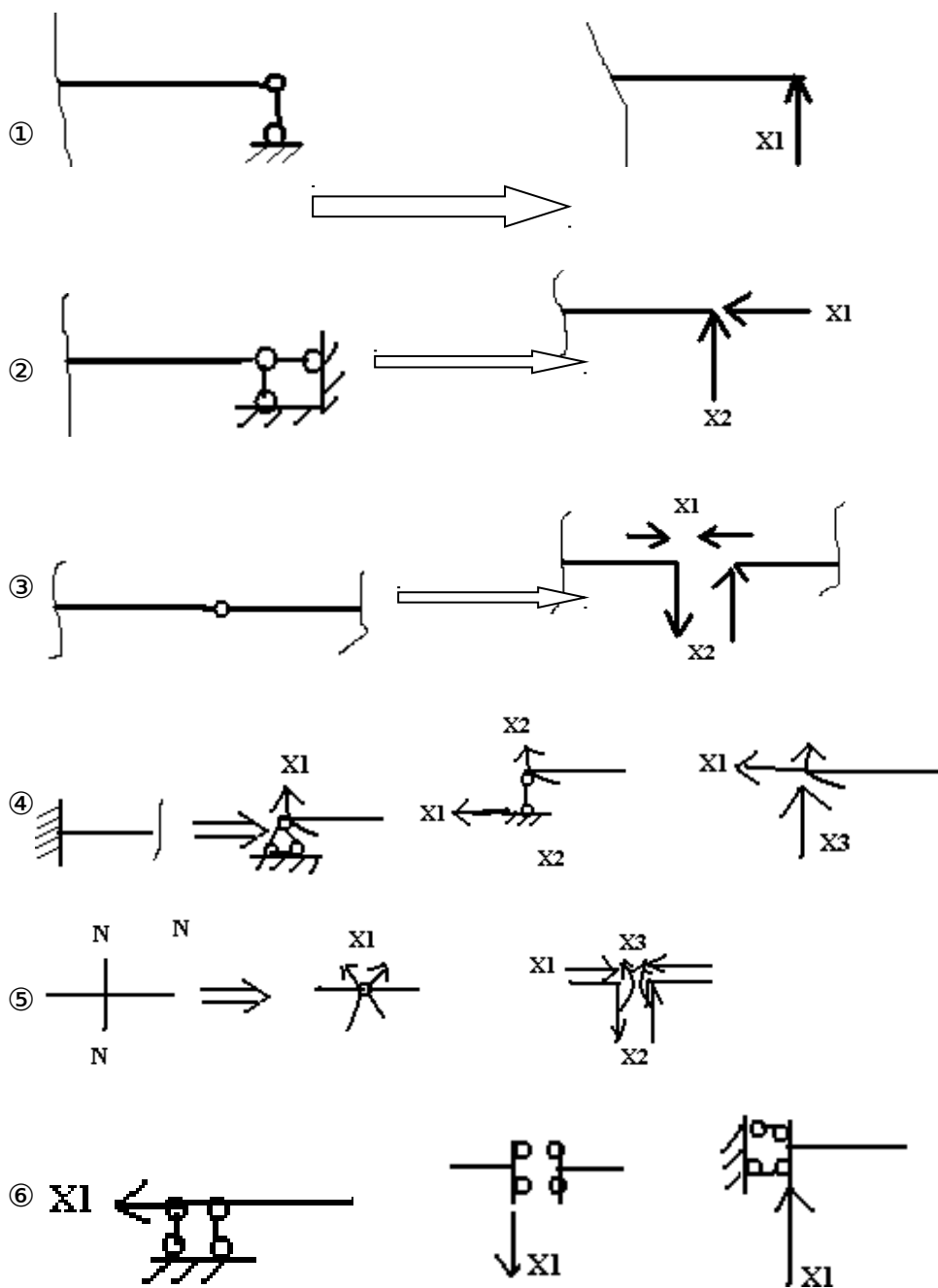
图 6-4

对于一个超静定结构，去掉多余约束的方式可能有几种，但必须注意：去掉多余约束后，一般应是几何不变的、静定的结构；。

图 6-2a、图 6-3a、图 6-4a 结构的超静定次数分别为 1、1、3。

运用这种方法确定结构的超静定次数时，尽量使解除多余约束后余下的部分尽量为我们所熟悉的简支梁、悬臂式、三铰式等。

从结构中取出某一杆件，全部或是部分的去掉它的约束，并用相应的多余未知力代替，归纳有如下几种常见的情况，如图所示：



下面举例说明一下：

例 1：确定下列所示超静定结构的超静定次数。

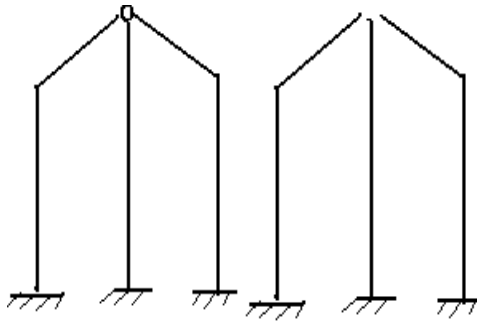
(1) 去掉铰 B，体系如图所示静定结构，因 B 点是连接三个刚片的复铰，相当于两个单铰，所以 $n=4$ 。

(2) 去掉 CD、CE、DE 三根连杆及铰结点 C，体系如图所示，共去掉五个约束，故 $n=5$ 。

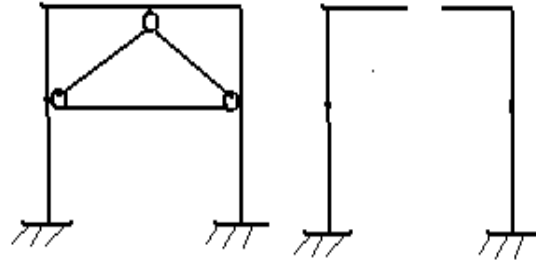
(3) 切断四根横梁，体系如图所示的静定结构，故超静定结构超静定次数为 $n=12$

(4)复铰相当于 $4-1=3$ 个单铰。由于刚结点引入铰结点相当于去掉 3 个约束, 则 $n=12-3=9$ 。

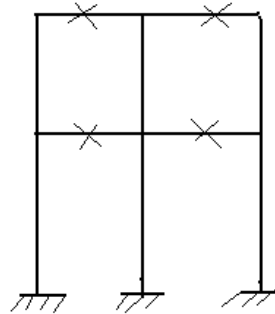
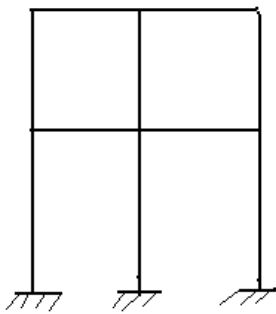
(1)



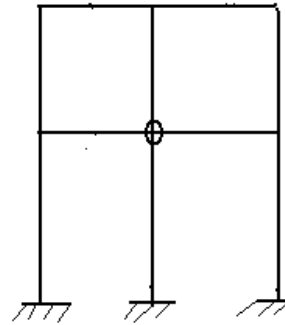
(2)



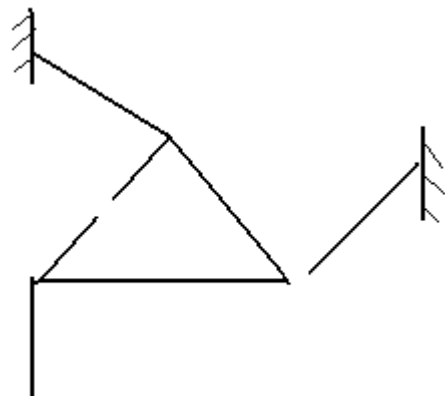
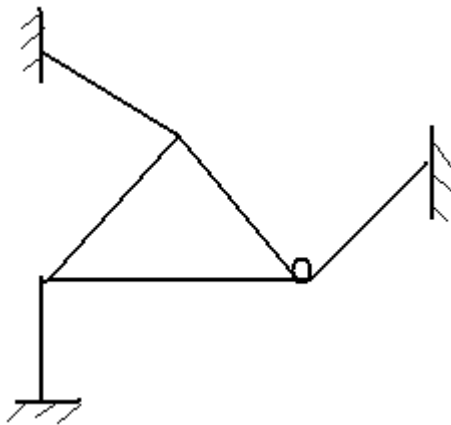
(3)



(4)



(5) $n=8$



§6-2 力法的基本原理和三要素

一. 教学目的

正确理解力法的基本原理和思路、力法方程的物理含义，掌握力法的基本解题过程，能够利用力法求解简单的超静定结构。

二. 主要内容

1. 基本思路(1)

2. 基本思路(2)

3. 基本思路(3)

4. 基本思路(4)

5. 超静定结构的计算(1)

6. 超静定结构的计算(2)

三. 学习指导

本节内容是通过简单的实例揭示力法的基本原理，对于今后的学习力法是一个基础，学习的关键是对力法原理的理解和应用，一定要正确理解力法方程的物理意义，才能最终达到融会贯通的目的。

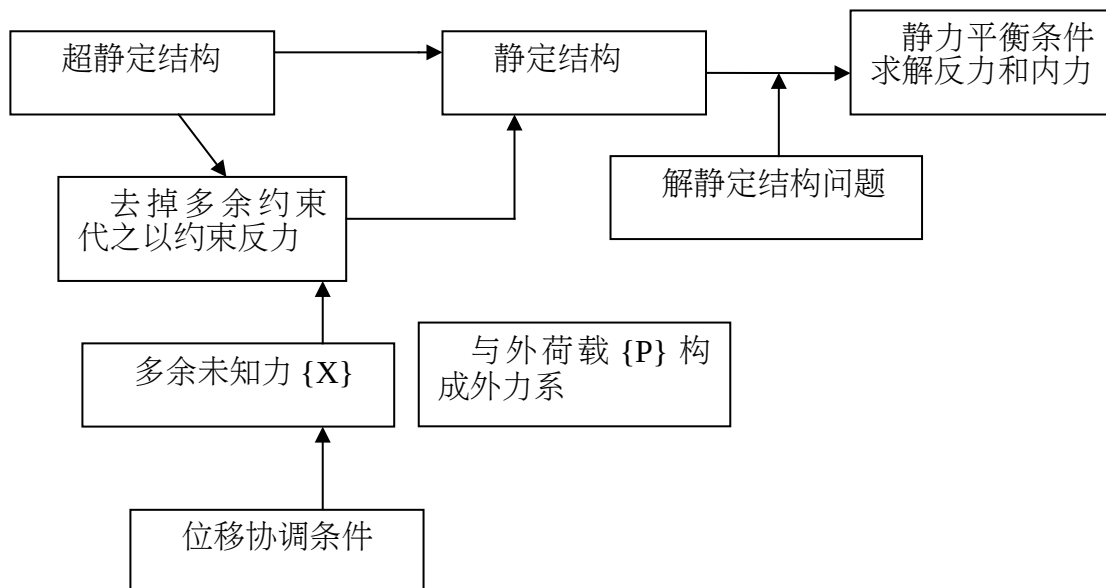
四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P318～P323

6.2.1 力法的基本原理

力法是计算超静定结构的最基本方法。其基本思路就是将一个未知问题转化为已知问题来解决，对于超静定结构，力法的基本思路是：将超静定结构去掉多余约束的方法使之转化为静定结构，或低次超静定结构，将多余约束力作为未知外力设置在去掉的多余约束处，取代其对原结构的作用。这样所得到的同时受到荷载与多余未知力作用的静定结构称之为力法的基本体系，而待求的未知力为力法的基本未知量。然后在寻找位移确定这些未知量的条件—位移协调条件是基本体系与原超静定结构在位移上也达到等效，据此位移协调条件可建立补充的力法方程来单独求解多余未知力。力法原理可用下式简单说明。

力法的基本思路是把超静定结构的计算问题转化为静定结构的计算问题。



6.2.2 基本思路(1)

下面结合实例说明力法的基本思路和原理

图 6-5a 为一次超静定结构，如果撤去 B 处的支座链杆并用未知力 X_1 代替变成了图 6-5b 所示的静定结构，这样就得到了含有多余未知力的静定结构，此结构称为力法的基本体系（基本体系并不唯一）。相应的把原超静定结构中多余约束和荷载都去掉后得到的静定结构称为力法的基本结构图 6-5c。

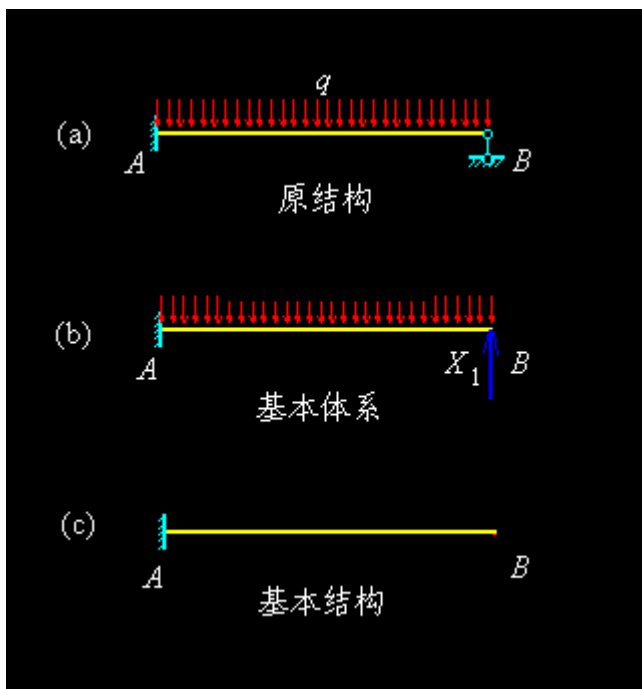


图 6-5

这样通过把多余约束去掉用多余未知力来代替，将超静定结构变为静定结构，解题的关键就是多余未知力的求解问题，这也是力法的第一个特点：

把多余未知力的计算问题当作超静定问题的关键，把多余未知力当作关键地位的未知力----**力法的基本未知量**

下面将讨论如何建立力法方程来求解基本未知量

6.2.3 基本思路(2)

为了求解多余的未知力，显然静力平衡方程式不能够求解，必须建立新的方程。

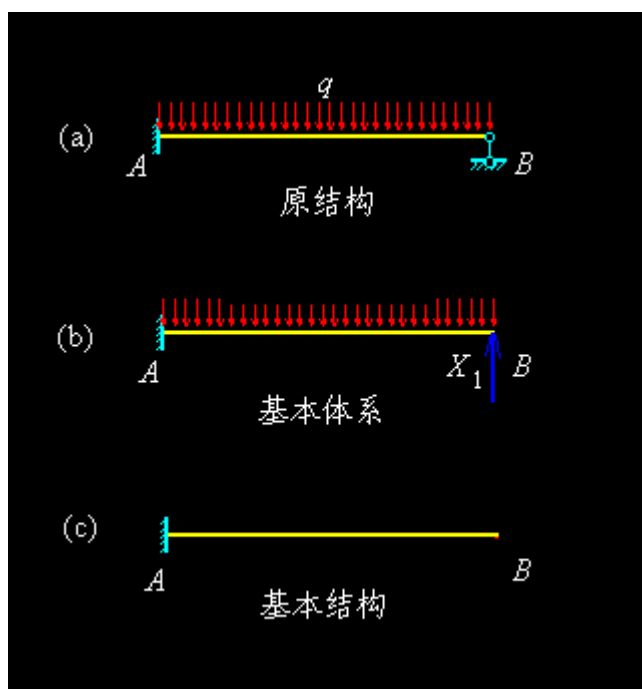


图 6-5

下面将通过对原结构和基本体系进行受力和变形对比，从而建立力法方程。

从受力上看，当基本未知量 X_1 为任意有限值时，基本体系和原结构都满足的平衡方程。

从变形上看，原结构由于支座 B 的支承，因此，不会发生竖向位移。而基本体系 B 处的竖向位移与基本未知量 X_1 有关，只有当基本未知量 X_1 为某一值时，基本体系 B 处的竖向位移 Δ_1 恰好等于零，即不发生竖向位移，这时基本体系的变形也与原结构的变形相同。于是，可以根据 $\Delta_1 = 0$ 的条件来确定基本未知量 X_1 的大小，所求的 X_1 就是原结构多余约束的反力。

归纳起来力法的基本思路就是：

第一步：去掉原结构的多余约束，代之以多余未知力，得到静定的基本体系。

第二步：基本体系和原结构的变形相同，特别是基本体系上与多余未知力相应的位移与原超静定结构上多余约束处的位移条件一致，这是确定多余未知力大小的依据。一般情况下，当原结构上在多余约束处没有支座位移时，则基本体系应满足的变形条件是：与多余未知力相应的位移为零。

下面按照以上思路具体求解图 6-5a 所示的超静定结构。

6.2.4 基本思路(3)

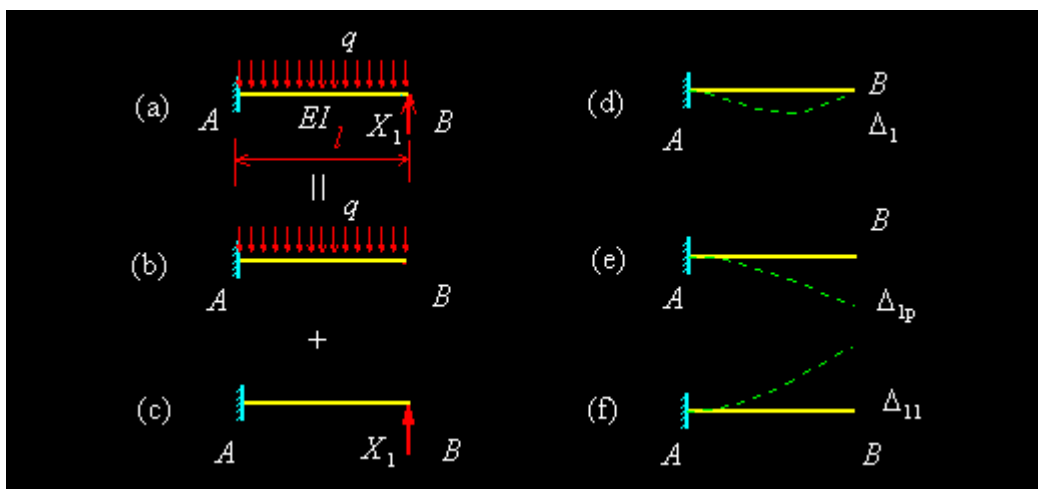


图 6-6

根据以上分析图 6-5b 所示的基本体系应满足的变形条件是：沿多余未知力 X_1 方向的位移 Δ_1 为零，即

$$\Delta_1 = 0$$

利用叠加原理计算基本体系的位移 Δ_1 并用基本未知量表示。

图 6-6a 为基本体系在荷载和多余未知力 X_1 共同作用，图 (b)、(c) 则分别是两者单独作用的状态，图 (d)、(e)、(f) 则是相应的变形图。

利用叠加原理，上述变形条件可表述为：

$$\Delta_1 = \Delta_{1p} + \Delta_{11} = 0$$

这里 Δ_1 是基本体系上多余未知力 X_1 方向的位移(图 6-6d)， Δ_{1p} 是基本结构在实际荷载作用下沿多余未知力 X_1 方向的位移(图 6-6e)， Δ_{11} 是基本结构在多余未知力 X_1 单独作用下沿多余未知力 X_1 方向的位移(图 6-6f)，位移与多余未知力方向一致时为正。

由于位移 Δ_{11} 与多余未知力 X_1 成正比，可以写成

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1$$

δ_{11} 表示单位未知力 $X_1 = 1$ 的作用，使基本结构在多余未知力 X_1 方向产生的位移，于是变形条件可写成

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

这个方程叫作力法典型方程，它体现了是基本体系恢复到原超静定结构的转化条件。式中的系数由单位荷载法进行计算。

整个计算过程自始至终都在基本结构上进行，从而把一个超静定结构问题转化为静定结构问题。在力法计算过程中，关键是确定三要素：**基本未知量**：多余未知力；**基本体系**：桥梁；**力法典型方程**。

下面将具体进行计算

6.2.5 基本思路(4)

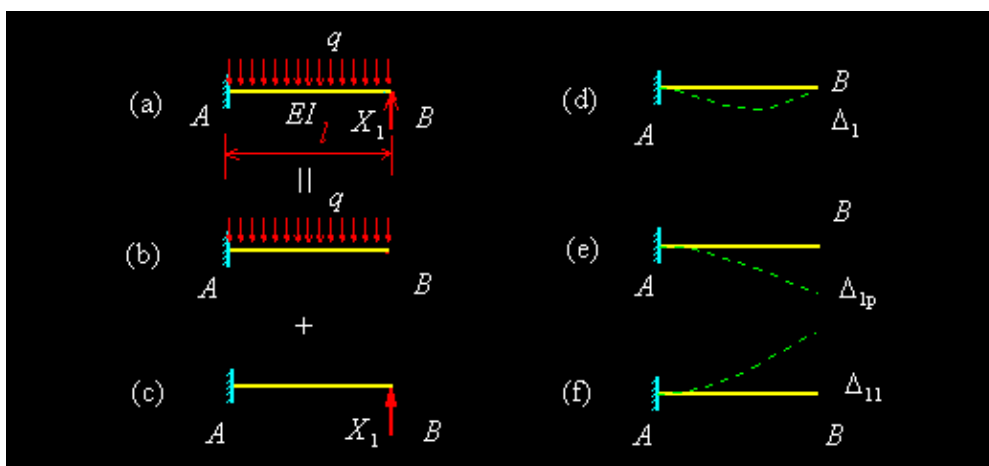


图 6-6

根据分析确定了力法典型方程： $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

为了计算 δ_{11} 、 Δ_{1P} ，做基本结构在荷载作用下的荷载弯矩 M_P (图 6-7b) 和单位未知力 $X_1 = 1$ 的作用下的单位弯矩图 M_1 (图 6-7c)。

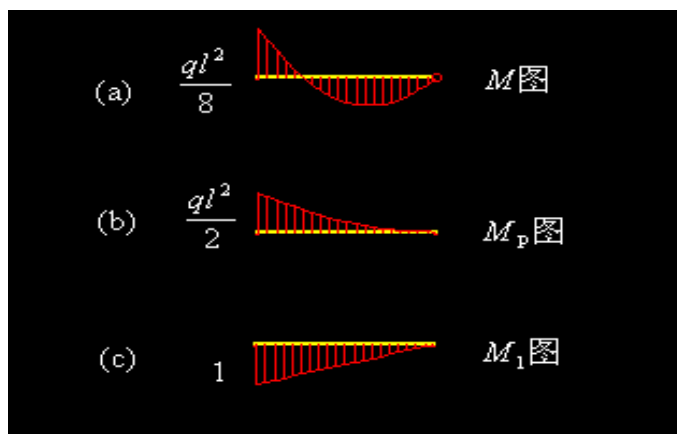


图 6-7

应用图乘法得到:

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \right] \times \frac{3l}{4} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{1} \times l \times l \right] \times \frac{2l}{3} = -\frac{l^3}{3EI}$$

代入力法方程:

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{ql^4}{8EI} = 0$$

$$X_1 = \frac{3}{8} ql$$

多余未知力求出后,利用平衡条件求原结构的内力计算结果如图 6-7a, 弯矩图也可以应用叠加公式计算:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_P$$

力法的基本思路: 将超静定结构的计算转化为静定结构的计算, 首先选择基本结构和基本体系, 然后利用基本体系与原结构之间在多余约束方向的位移一致性和变形叠加列出力法典型方程, 最后求出多余未知力和原结构的内力。

下面讨论一般情况下的力法典型方程

6.2.6 多次超静定结构的计算(1)

图 6-8 为一个二次超静定结构, 如图选择基本体系和基本结构。

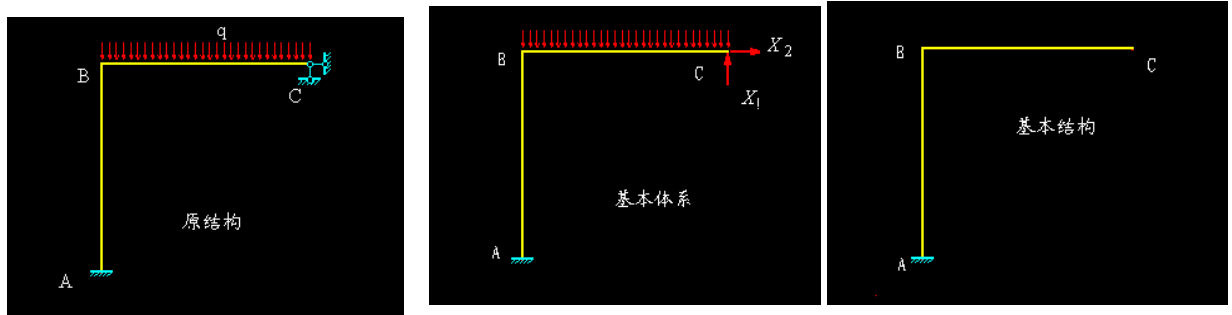


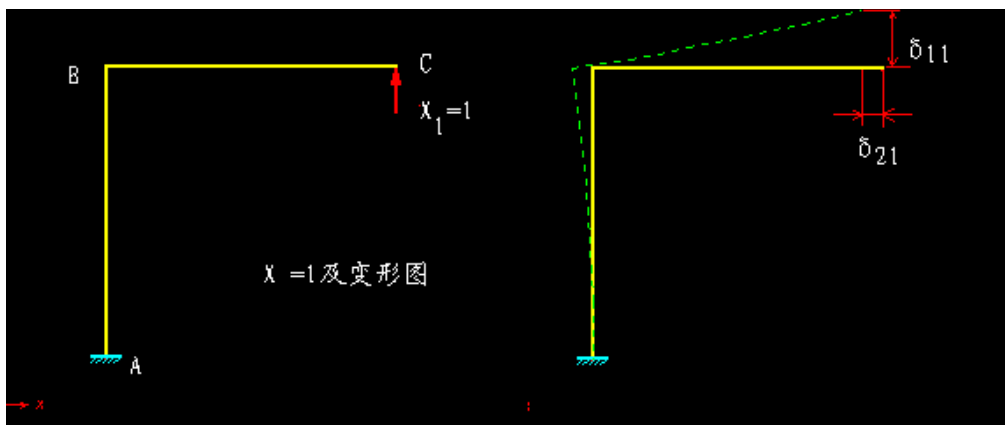
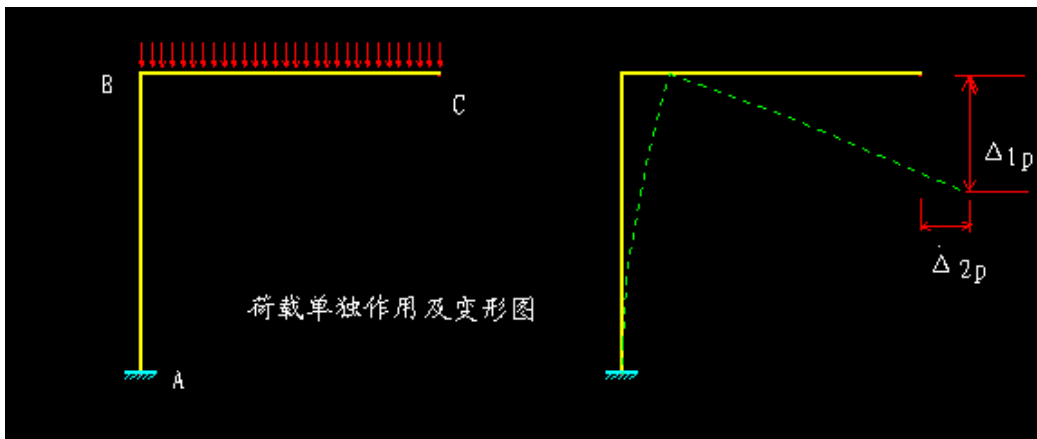
图 6-8

利用原结构与基本体系的在结点 C 沿 X_1 和 X_2 方向的位移相同的条件

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = 0$$

这里 Δ_1 和 Δ_2 分别是基本体系沿 X_1 和 X_2 方向的位移。



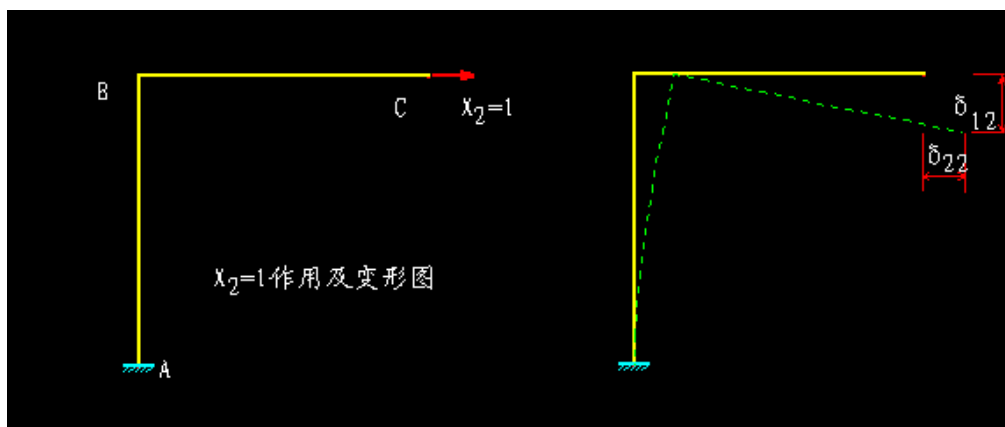


图 6-9

下面应用叠加原理把变形条件展开，分别计算荷载、 $X_1=1$ 和 $X_2=1$ 单独作用时在 X_1 和 X_2 方向的位移,如图 6-9。

位移的表示采用双下标，第一个下标表示位移的位置和方向，第二个下标表示产生的原因。于是可得： $\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}$$

变形条件即为：

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

这也是两次超静定结构的力法基本方程。

多余未知力求出后，利用叠加原理可绘制弯矩图，具体计算为：

$$M = \overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + M_P$$

下面讨论 n 次超静定的情形。

6.2.7 多次超静定结构的计算(2)

若结构为 n 次超静定，则与 n 个多余约束相对应，基本体系上就有 n 个多余的未知力 X_1 、 X_2 、 X_3 X_n ，则力法典型方程为

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0
\end{aligned}$$

δ_{ij} 表示单位力 $X_j = 1$ 在基本结构沿 X_i 方向产生的位移, Δ_{ip} 表示在基本结构实际荷载沿 X_i 方向产生的位移。 δ_{ij} 又称为**柔度系数**。

将方程的柔度系数写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}
\delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}
\end{bmatrix}$$

这个矩阵称为**柔度矩阵**, 其中, 主对角线上的系数为**主系数**, 主系数都为正值, δ_{ij} ($i \neq j$) 称为副系数, 副系数可以为正、为负、为零。根据位移互等定理: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, 柔度矩阵为一沿对角线对称矩阵。

解力法方程求出多余的未知力, 然后应用叠加法计算超静定的内力。

$$M = \overline{M_1}X_1 + \overline{M_2}X_2 + \dots + \overline{M_n}X_n + M_P$$

$$F_Q = \overline{F_{Q1}}X_1 + \overline{F_{Q2}}X_2 + \dots + \overline{F_{Qn}}X_n + F_{QP}$$

$$F_N = \overline{F_{N1}}X_1 + \overline{F_{N2}}X_2 + \dots + \overline{F_n}X_n + F_{NP}$$

总结力法的适用范围: ①力法只适用于超静定结构, 不适用于静定结构。②即可以考虑弯曲变形, 也可以考虑轴向变形和剪切变形。③适用于各种超静定结构类型。④从材料性质来看, 只适用于弹性材料。

§6-3 用力法计算超静定梁、刚架和排架

一. 教学目的

通过实例分析, 掌握力法的基本方法, 能够应用力法求解超静定梁、刚架和排架。

二. 主要内容

1. 力法的基本解题步骤

2. 应用力法求解超静定梁、刚架、排架

三. 学习指导

本节内容是通过实例进一步揭示力法的基本原理，主要是通过例题的分析，掌握力法的应用，主要应掌握一次和二次超静定结构。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P325~P331

6.3.1 力法的基本解题思路

根据力法的基本原理和思路，用力法计算超静定结构的步骤可归纳如下：

1. 选择基本体系

确定超静定结构的次数，去掉多余约束，并用相应的约束反力来代替。

2. 建立力法方程

利用基本体系与原结构在相应约束处的变形条件，建立力法典型方程。

3. 计算系数和自由项

4. 求多余的未知力

5. 作内力图

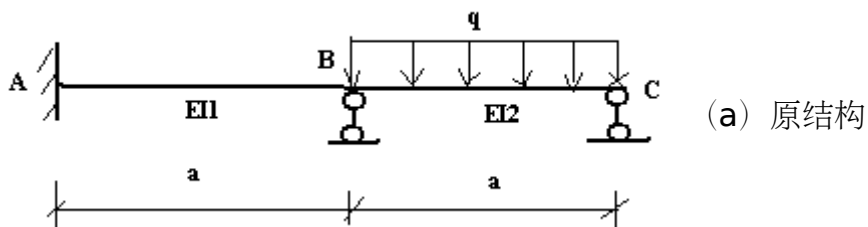
按静定结构，用平衡条件或叠加原理计算结构特殊截面的内力，然后画出内力图。

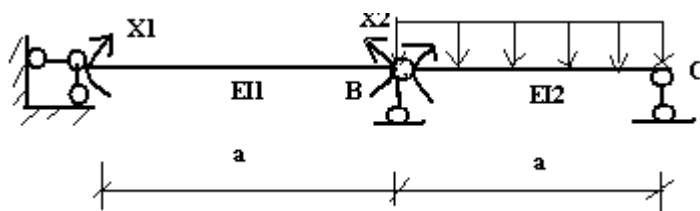
下面以例题分析进行说明

6.3.2 应用力法求解超静定梁

例 1.求图 (a) 所示连续梁的弯矩图。

解： (1) 此结构为二次超静定。现将固定端 A 及梁 B 点界面分别用铰代替，以相应的多余力 X_1 、 X_2 代替原约束作用基本体系如图 (b) 所示。





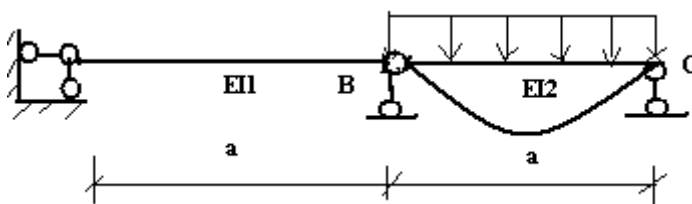
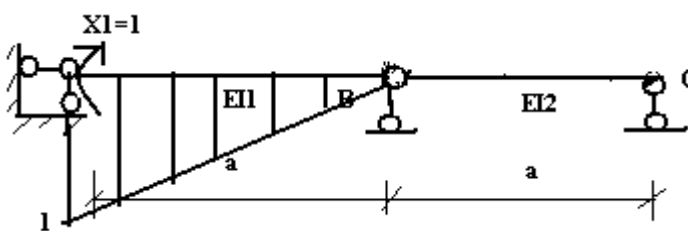
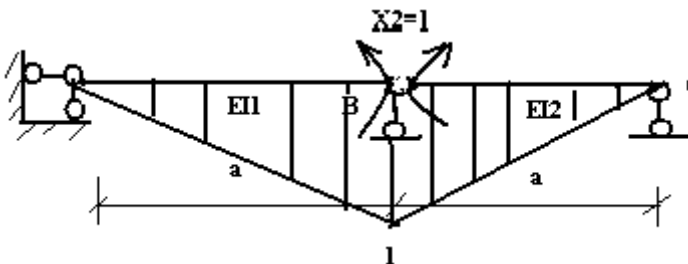
(b) 基本体系

(2) 相应的位移协调条件有两个：基本结构 A 端转角与原结构 A 端相等，所以 $\Delta_1=0$ ；铰 B 两侧的相对转角等于原结构 B 点两侧截面的相对转角，由于原结构的实际变形是处处连续的，显然同意截面两侧不可能有相对转角或移动，所以 $\Delta_2=0$ 。

力法方程为： $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

(3) 分别作实际荷载和单位多余未知力作用下的弯矩图。如下图 (a) (b) (c) 所示。用图乘法计算系数和自由项。


 (a) M_P 图

 (b) $\overline{M}_1$ 图

 (c) $\overline{M}_2$ 图

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/217022054155006040>